CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

2

EDITORIAL MIR MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

МОСКВА «НАУКА»

CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

I

MECÁNICA
FÍSICA MOLECULAR

Traducido al español
por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URRS.

© Издательство «Наука». 1982
© Traducción al español. Editorial Mir. 1984

INDICE

PRÓLOGO

Este tomo se consagra al estudio del electromagnetismo y de las ondas (elásticas, electromagnéticas y luminosas).

La expoisición se hace de acuerdo con el Sistema Internacional de unidades (SI). Al mismo tiempo se da a conocer al lector el sistema de Gauss (con texto en letra gallarda). En los apéndices, al final del libro, se incluyen las unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el SI y en el sistema de Gauss y se comparan las formas de las fórmulas fundamentales del electromagnetismo para ambos sistemas.

El «Curso de física general» se dedica en primer lugar a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior (CETS) en los que el programa de física es más extenso. No obstante, la exposición se hace de tal modo, que, omitiendo algunas de sus partes, se puede utilizar como libro de texto en los CETS que siguen el programa de física ordinario. En las «Recomendaciones metodológicas» que preceden al texto, además de otro material, se da una relación aproximada de los cortes (omisiones) que pueden hacerse si el tiempo disponible para estudiar el libro en toda su extensión es insuficiente.

I. V. Savéliev

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS

Hacemos aquí unas aclaraciones acerca de aquellas cuestiones que no siempre se exponen correctamente. Damos también una lista aproximada de los párrafos o sus partes cuyo estudio no es obligatorio si no se dispone del tiempo necesario para el estudio del Curso en toda su extensión. Esta relación refleja el criterio particular del autor y, por lo tanto, sólo tiene carácter de recomendación.

1. No es conveniente llamar, como hacen algunos libros, ε_0, «permitividad eléctrica del vacío» y μ_0, «permeabilidad magnética del vacío». Estas denominaciones carecen de sentido físico. Respectivamente, no se deben estudiar las «permeabilidades absolutas» sin sentido físico $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$ y $\mu_a = \mu\mu_0$.

2. En aquellos casos en que las constantes eléctrica y magnética se encuentran en la combinación $\varepsilon_0\mu_0$ es preferible sustitui reste producto por $1/c^2$, donde c es la constante electromagnética, que coincida con la velocidad de la luz en el vacío (véase la fórmula (39.15)).

3. Es útil tener en cuenta que ε_0 y μ_0 figuran en las fórmulas en combinación con el factor 4π, siendo $1/4\,\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9$ y $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$. Por eso es más conveniente utilizar los valores numéricos $\varepsilon_0 = 0{,}885\cdot 10^{-11}$ F/m y $\mu_0 = 1{,}26\cdot 10^{-6}$ H/m Aún mejor es emplear los valores de estas constantes expresadas por medio de π, a saber: $\varepsilon_0 = 1/(4\pi\cdot 9\cdot 10f)$ y $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-6}$.

4. No se debe escatimar el tiempo en aprender los conceptos fundamentales y las relaciones del análisis vectorial § 11). Este tiempo se compensa con creces por la mayor facilidad y elegancia con que se obtienen después una serie de resultados. Además, la verdadera comprensión de la naturaleza y las propiedades del campo electromagnético es imposible si no se utilizan los conceptos de divergencia y rotor.

5. Es frecuente encontrarse con afirmaciones como que el desplazamiento eléctrico **D** (o la intensidad del campo magnético **H**) es una característica del campo eléctrico (o magnético) independiente de las propiedades del medio, es decir, que $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, donde $\mathbf{D}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son los valores de las magnitudes en ausencia del medio, mientras que **D** y **H**, los valores de las mismas magnitudes en el medio. Respectivamente, la permitividad relativa y la permeabilidad relativa del medio de determinan de la forma $\varepsilon = E_0/E$ y $\mu = B/B_0$. Debe tenerse en cuenta que tales afirmaciones son erróneas. En cambio, las relaciones $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon$ y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{B}_0$ resultan ser correctas únicamente en condiciones muy específicas, que para el campo eléctrico se determinan en la pág. 80 y para el campo magnético en la pág. 170.

La inexactitud, en el caso general, de la igualdad $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ se infiere, en particular, de la fig. 20.3. Para cerciorarnos de que en el caso general es incorrecta la relación $\mu = B/B_0$, consideremos una lámina delgada grande, de un ferromagnético homogéneo e isótropo, situada perpendicularmente a las líneas **B** de un campo magnético exterior. En este caso $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, pero μ puede alcanzar un valor del orden de 10^5.

6. Las magnitudes **D** y **H** hay que interpretarlas como características auxiliares del campo electromagnético (las fundamentales son **E** y **B**), determinadas por las fórmulas (19.3) y (52.5). La magnitud **D** resulta ser útil porque su divergencia está determinada por la densidad de las cargas extrañas solamente, y la magnitud **H**, porque su rotor está determinado por la densidad de las corrientes macroscópicas solamente (véanse las fórmulas (19.8) y (52.6)).

7. La exposición de muchas cuestiones relacionadas con las oscilaciones y ondas se simplifica y facilita mucho si en vez de las funciones armónicas (es decir, el coseno y el seno) se utilizan exponentes. Por eso la introducción en el curso de física de los centros de enseñanza técnica superior de la representación de las ondas en forma de exponente se ha hecho esencialmente necesaria. Hay que tener en cuenta que es muy fácil acostumbrarse a esta representación y que el tiempo que se emplea en adquirir la costumbre se compensa con creces.

8. En el § 18 se puede omitir la demostración de la fórmula (18.4) de la densidad volumétrica de las cargas ligadas y dar dicha fórmula sin demostración.

9. Si no hay tiempo suficiente, el § 45, «El magnetismo como efecto relativista», se puede eliminar.

10. Los cómputos de los § 57 y § 58 se pueden saltar y limitarse al estudio cualitativo del diamagnetismo y el paramagnetismo.

11. En el § 76 se puede prescindir del cálculo del campo para el betatrón (fórmulas (76.1) — (76.6)).

12. El capítulo XII, «Corriente eléctrica en los gases», puede no incluirse en la variante abreviada del programa.

13. En el § 97, «Velocidad del las ondas elásticas en un medio sólido», se pueden omitir todos los cómputos y dar solamente las fórmulas definitivas (97.7) y (97.8).

14. En el § 98, «Energía de una onda elástica», es posible prescindir de la deducción de la fórmula (98.5) y comenzar el estudio de este párrafo en la fórmula (98.5).

15. La primera parte del § 112, hasta las fórmulas (112.7) y (112.8) puede omitirse.

16. El párrafo 116, «Sistema óptico centrado», se puede excluir.

17. En el § 120, «Coherencia», puede prescindirse de los cálculos que empiezan en la fórmula (120.4) y terminan en la fórmula (120.6).

18. El párrafo 124, «Interferencia de muchos rayos», se puede omitir.

19. En el § 131, «Difracción de rayos X», puede prescindirse de la deducción de las fórmulas de Laue y de estas mismas fórmulas y limitarse al estudio de la fórmula de Bragg — Wulf.

20. El párrafo 133, «Holografía», se puede excluir.

21. La parte del § 135 que se refiere a las fórmulas de Fresnel puede no estudiarse.

22. El § 143, «Velocidad de grupo», puede reducirse al estudio elemental, que termina en la fórmula (143.7). Los cálculos que empiezan el la fórmula (143.8) y terminan en la (143.13) se pueden omitir.

Subrayamos que esta lista de reducciones tiene carácter orientador. El profesor, de acuerdo con las circunstancia, puede modificarla o ampliarla a su juicio.

PRIMERA PARTE

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CAPÍTULO I

CAMPO ELÉCTRICO EN EL VACÍO

§ 1. Carga eléctrica

Todos los cuerpos de la naturaleza pueden electrizarse, es decir, adquirir carga eléctrica. La existencia de la carga eléctrica se manifiesta en que el cuerpo cargado interacciona con otros cuerpos también cargados. Hay dos tipos de cargas eléctricas, llamadas convencionalmente positivas y negativas. Las cargas del mismo signo se repelen y las de signos distintos se atraen.

La carga eléctrica es una propiedad inseparable de algunas partículas elementales. La carga de todas las partículas elementales (si no es nula) es igual en magnitud absoluta y puede llamarse *carga elemental*. La carga elemental positiva la designaremos por medio de la letra e.

Al número de las partículas elementales pertenecen, en particular, el electrón (portador de la carga negativa $-e$), el protón (portador de la carga positiva $+e$) y el neutrón (cuya carga es nula). De estas partículas están formados los átomos y moléculas de todo cuerpo, por lo que las cargas eléctricas entran en la composición de todos los cuerpos. De ordinario las partículas portadoras de cargas distintas están presentes en el cuerpo en cantidades iguales y distribuidas con igual densidad. En este caso la suma algebraica de las cargas en cualquier volumen elemental del cuerpo es igual a cero y cada uno de estos volúmenes (y el cuerpo en conjunto) será neutro. Si por un procedimiento cualquiera se crea en el campo un exceso de partículas de un signo (y, respectivamente, un defecto de partículas del otro signo), el cuerpo resultará cargado. También se puede, sin cambiar el número total de partículas positivas y negativas, provocar una redistribución de ellas tal, que en una parte del cuerpo se produzca un exceso de cargas de un signo y en otra, de otro. Esto puede efectuarse aproximando a un cuerpo metálico no cargado otro cuerpo cargado.

Como toda carga q está formada por un conjunto de cargas elementales, será entera y múltiplo de e:

$$q = \pm Ne. \qquad (1.1)$$

Pero la carga elemental es tan pequeña, que la magnitud de las cargas macroscópicas se puede considerar que varía de un modo continuo.

Si una magnitud física puede tomar solamente determinados valores discretos, se dice que esta magnitud se cuantiza. El hecho expresado por la fórmula (1.1) significa que la carga eléctrica se cuantiza.

La magnitud de la carga, medida en diferentes sistemas inerciales de referencia, resulta ser igual. Por consiguiente, la carga eléctrica es una invariante relativista. De esto se sigue que la magnitud de la carga no depende de su estado de movimiento o reposo.

Las cargas eléctricas pueden desaparecer y aparecer de nuevo. Pero siempre aparecen o desaparecen dos cargas elementales de signos distintos. Por ejemplo, un electrón y un positrón (electrón positivo) se aniquilan al encontrarse, es decir, se transforman en fotones gamma neutros. Al ocurrir esto desaparecen las cargas $-e$ y $+e$. Durante el proceso llamado formación de pares, el fotón gamma, al entrar en el campo de un núcleo atómico se convierte en un par de partículas, o sea, en un electrón y un positrón. En este caso aparecen las cargas $-e$ y $+e$.

Así, pues, *la carga total de un sistema*[1]) *eléctricamente aislado no puede cambiar*. Esta afirmación lleva el nombre de *ley de conservación de la carga eléctrica*.

La ley de conservación de la carga eléctrica está íntimamente ligada a la invariancia relativista de la carga. En efecto, si la magnitud de la carga dependiera de su velocidad, poniendo en movimiento las cargas de un signo cualquiera variamos la carga total del sistema aislado.

§ 2. Ley de Coulomb

La ley a que se suboridina la fuerza de interacción de las cargas puntuales fue establecida experimentalmente en 1785 por Charles-Augustin de Coulomb. Se llama *carga puntual* un cuerpo cargado cuyas dimensiones son despreciables en comparación con la distancia de este cuerpo a otros también portadores de carga eléctrica.

Valiéndose de balanzas de torsión (fig. 2.1) semejantes a las que utilizó Cavendish para determinar la constante de gravitación (véase el t. 1, § 45), midió Coulomb la fuerza de interacción de dos bolas cargadas en dependencia de la magnitud de sus cargas y de la distancia entre ellas. Coulomb partió de que al tocar una bola metálica cargada otra bola exactamente igual no cargada, la carga se distribuye por igual entre ambas bolas.

[1]) Un sistema se llama eléctricamente aislado si a través de la superficie que lo limita no pueden penetrar partículas cargadas.

Como resultado de sus experiencias llegó Coulomb a la conclusión de que *la fuerza con que interaccionan dos cargas puntuales en reposo es proporcional a la magnitud de cada una de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.* La dirección de la fuerza coincide con la de la recta que une las cargas.

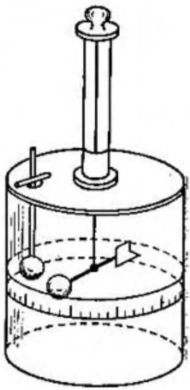


Fig. 2.1.

Advertimos que la dirección de la fuerza de interacción a lo largo de la recta que une las cargas puntuales se deduce de las razones de simetría. El espacio vacío se supone que es homogéneo e isótropo. Por consiguiente, la única dirección que destacan en el espacio las cargas puntuales en reposo introducidas en él es la dirección de una carga a la otra. Supongamos que la fuerza **F** que actúa sobre la carga q_1 (fig. 2.2), formara con la dirección de q_1 a q_2 un ángulo α distinto de 0 ó π. Pero, en virtud de la simetría axil, no hay fundamentos para distinguir la fuerza **F** del conjunto de fuerzas con otras direcciones que forman con el eje $q_1 - q_2$ el mismo ángulo α (las direcciones de estas fuerzas forman un cono cuyo ángulo de abertura es 2α). La dificultad que surge a consecuencia de esto desaparece cuando α es igual a 0 ó π.

La ley de Coulomb se puede expresar con la fórmula

$$\mathbf{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \tag{2.1}$$

Aquí k es un coeficiente de proporcionalidad que se supone positivo; q_1 y q_2 son las magnitudes de las cargas que interaccionan; r es la

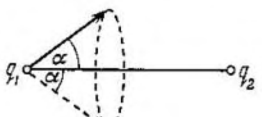


Fig. 2.2.

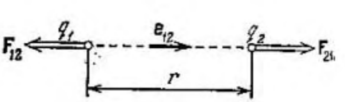


Fig. 2.3.

distancia entre las cargas; $\mathbf{e}_{12}$, el vector unidad que tiene la dirección de la carga q_1 a la carga q_2, y $\mathbf{F}_{12}$, la fuerza que actúa sobre la carga q_1 (fig. 2.3; el dibujo corresponde al caso en que las cargas tienen mismos signos). La fuerza $\mathbf{F}_{21}$ difiere de la $\mathbf{F}_{12}$ en el signo:

$$\mathbf{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \tag{2.2}$$

El módulo, igual para ambas cargas, de la fuerza de interacción, se puede representar de la forma

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{2.3}$$

La experiencia da que la fuerza de interacción de dos cargas no varía si cerca de ellas se colocan otras cargas cualesquiera. Supongamos que hay una carga q_a y, además, N cargas $q_1, q_2, \ldots, q_N$. De lo dicho anteriormente se infiere que la fuerza resultante $\mathbf{F}$ con que actúan sobre q_a las N cargas q_i se determina por la fórmula

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{ai}, \tag{2.4}$$

en la que $\mathbf{F}_{ai}$ es la fuerza con que actúa sobre q_a la carga q_i en ausencia de las demás $N-1$ cargas.

El hecho expresado por la fórmula (2.4) permite, conociendo la ley de interacción entre cargas puntuales, calcular la fuerza de interacción entre las cargas concentradas en los cuerpos de dimensiones finitas. Para esto hay que dividir cada una de las cargas en cargas tan pequeñas dq, que se puedan considerar puntuales, calcular por la fórmula (2.1) la fuerza de interacción entre las cargas dq tomadas de dos en dos, y luego sumar vectorialmente estas fuerzas. Matemáticamente esta operación coincide totalmente con el cálculo de las fuerzas de atracción gravitatoria entre cuerpos de dimensiones finitas (véase el t. 1, § 45).

§ 3. Sistemas de unidades

Eligiendo adecuadamente la unidad de carga (las unidades para F y r fueron ya establecidas en la mecánica) se puede conseguir que el coeficiente de proporcionalidad de la fórmula (2.1) sea igual a la unidad. La unidad de carga correspondiente (se supone que F y r se miden en unidades del sistema CGS) se llama *unidad electrostática absoluta de carga* (abreviadamente: unidad de carga CGSE). Esta unidad es igual a la carga que, en el vacío, interacciona con otra carga igual a ella, situada a 1 cm de distancia, con la fuerza de 1 dina.

Por medio de mediciones escrupulosas (descritas en el § 74) se halló que la carga elemental es

$$e = 4{,}80 \cdot 10^{-10} \text{ unid. de carga-CGSE}. \tag{3.1}$$

Tomando las unidades de longitud, masa, tiempo y carga como base, se puede construir un sistema de unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas. El sistema que tiene por unidades fundamentales el centímetro, gramo, segundo y la unidad de carga CGSE se llama *sistema absoluto de unidades electrostáticas* (sistema CGSE).

Este sistema se basa en la ley de Coulomb, es decir, en la interacción entre cargas en reposo. Más adelante conoceremos el *sistema absoluto de unidades electromagnéticas* (sistema CGSM), que se basa en la ley de interacción entre conductores por los cuales pasa corriente eléctrica. También es absoluto el *sistema de Gauss*, en el cual las unidades del sistema CGSE y las de las magnitudes magnéticas, con las unidades del sistema CGSM.

En el sistema CGSE la fórmula (2.3) tiene la forma

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{3.2}$$

Esta fórmula es válida en el caso en que las cargas están en el vacío. Para las cargas que se encuentran en un medio tiene que ser precisada (véase el § 22).

El 1º de enero de 1963 entró en vigor en la URSS el Estándar estatal GOST 9867—61 que prescribe como preferible el empleo del Sistema Internacional de unidades, designado por el símbolo SI. Las unidades fundamentales de este sistema son el metro, kilogramo, segundo, amperio, kelvin, candela y mol. La unidad de fuerza del SI es el newton (N), igual a 10^5 dinas.

Al establecer las unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas el SI lo mismo que el sistema CGSM parte de la ley de interacción no de las cargas sino de los conductores con corriente. Por eso el coeficiente de proporcionalidad de la fórmula de la ley de Coulomb resulta ser distinto de la unidad de magnitud dimensional.

La unidad de carga en el SI es el *culombio* (C). Experimentalmente se ha establecido que

$$1\ \mathrm{C} = 2\,998 \cdot 10^9 \text{ (aproximadamente } 3 \cdot 10^9\text{) unid. de carga CGSE.} \tag{3.3}$$

Para formarnos una idea de la magnitud de la carga de 1 C calculemos la fuerza con que interaccionarían dos cargas de 1 C cada una distantes entre sí 1 m. De acuerdo con (3.2)

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2}\ \mathrm{CGSE} = 9 \cdot 10^{14}\ \text{dinas} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \approx 10^9\ \mathrm{kgf}. \tag{3.4}$$

La carga elemental expresada en culombios es

$$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}. \tag{3.5}$$

§ 4. Escritura racionalizada de las fórmulas

En muchas fórmulas de electrodinámica si éstas se escriben en los sistemas CGS (y en particular en el de Gauss) figuran los factores 4π y la llamada constante electrodinámica c igual a la velocidad de la luz en el vacío. Para evitarlos en las fórmulas prácticamente más

importantes el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Coulomb se supone igual a $1/4\pi\varepsilon_0$. Entonces la expresión de la ley para las cargas que se encuentran en el vacío toma la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{4.1}$$

Respectivamente varían también otras fórmulas. La escritura de las fórmulas modificada de esta forma se denomina *racionalizada*. Los sistemas de unidades construidos utilizando las fórmulas racionalizadas también se llaman *racionalizados*. A estos sistemas pertenece el SI.

La magnitud ε_0 recibe el nombre de *constante eléctrica*. Su dimensión es la de la capacidad eléctrica dividida por la longitud. Se expresa en unidades denominadas faradio por metro. Para hallar el valor numérico de ε_0 sustituimos en la fórmula (4.1) los valores de las magnitudes correspondientes al caso de dos cargas de 1 C cada una, distantes 1 m entre sí. De acuerdo con (3.4), la fuerza de interacción en este caso es igual a $9 \cdot 10^9$ N. Sustituyendo este valor de la fuerza, así como los de $q_1 = q_2 = 1$ C y $r = 1$ m, en la fórmula (4.1), obtenemos

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

de donde

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0{,}885 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}. \tag{4.2}$$

El sistema de unidades de Gauss se ha utilizado mucho, y todavía se sigue empleando, en la literatura de física. Por eso creemos necesario dar a conocer al lector tanto el sistema de unidades SI como el sistema de Gauss. La exposición se hará en el SI. Al mismo tiempo se indicará la forma que las fórmulas obtenidas tienen en el sistema de Gauss. En el apéndice II, al final del libro, se compara la escritura de las fórmulas fundamentales de la electrodinámica en el SI y en el sistema de Gauss.

§ 5. Campo eléctrico. Intensidad del campo

La interacción de las cargas en reposo se efectúa por medio del *campo eléctrico*[1]. Toda carga hace que varíen las propiedades del espacio que la rodea: crea en él un campo eléctrico. Este campo se manifiesta en que una carga eléctrica, situada en un punto cualquiera de él, se encuentra bajo la acción de una fuerza. Por consiguiente, para saber si en un lugar dado existe campo eléctrico

---

[1]) En el § 40 veremos que en el caso de cargas móviles, además de por el campo eléctrico, la interacción también se efectúa por medio del campo magnético.

hay que colocar en él un cuerpo cargado (en adelante, para simplificar diremos simplemente una carga) y determinar si éste experimenta la acción de una fuerza eléctrica o no. Por la magnitud de la fuerza que actúa sobre la carga dada es posible, evidentemente, inferir la «intensidad» del campo.

Así, para descubrir y estudiar un campo eléctrico hay que valerse de una determinada carga de «ensayo». Para que la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo caracterice el campo «en un punto dado», esta última debe ser puntual. De lo contrario dicha fuerza caracterizará las propiedades del campo promediadas por el volumen que ocupa el cuerpo portador de la carga de ensayo.

Estudiemos con ayuda de una carga puntual de ensayo q_{ens} el campo creado por una carga puntual q en reposo. Situando la carga de ensayo en el punto cuya posición respecto a la carga q está determinada por el radio vector $\mathbf{r}$ (fig. 5.1), descubrimos que sobre la carga de ensayo actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = q_{ens}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r\right) \quad (5.1)$$

(véanse (2.2) y (4.1)). Aquí $\mathbf{e}_r$ es el versor del radio vector $\mathbf{r}$.

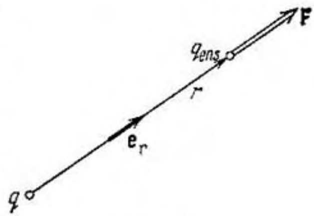


Fig. 5.1.

De la fórmula (5.1) se sigue que la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo depende no sólo de las magnitudes que definen el campo (de q y $\mathbf{r}$), sino también de la magnitud de la carga de ensayo q_{ens}. Si se toman cargas de ensayo de distintas magnitudes q'_{ens}, q''_{ens} y así sucesivamente, las fuerzas $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}''$, . . ., que ellas experimentan en el punto dado del campo serán distintas. Pero en (5.1) se ve que la relación $\mathbf{F}/q_{ens}$ es la misma para todas las cargas de ensayo y sólo depende de las magnitudes q y $\mathbf{r}$ que definen el campo en el punto dado. Por eso es natural tomar esta relación como magnitud característica del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{ens}}. \quad (5.2)$$

Esta magnitud vectorial se llama *intensidad del campo eléctrico* en el punto dado (es decir, en el punto en que la carga de ensayo q_{ens} experimenta la acción de la fuerza $\mathbf{F}$).

De acuerdo con la fórmula (5.2), la intensidad del campo eléctrico es numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre la carga puntual unitaria que se halla en el punto dado del campo. La dirección del vector $\mathbf{E}$ coincide con la dirección de la fuerza que actúa sobre la carga positiva.

Advertimos que la fórmula (5.2) sigue siendo válida si como carga de ensayo se toma una carga negativa ($q_{ens} < 0$). En este caso los vectores **E** y **F** tendrán sentidos opuestos.

Al concepto de intensidad del campo eléctrico hemos llegado investigando el campo de una carga puntual en reposo. No obstante, la definición (5.2) se extiende también al caso del campo creado por cualquier conjunto de cargas en reposo. En este caso es necesario, además, hacer la siguiente aclaración. Puede ocurrir que la posición de las cargas que condicionan el campo que se estudia varíe bajo la influencia de la carga de ensayo. Esto ocurre, por ejemplo, cuando las cargas creadoras del campo se encuentran en un conductor y pueden desplazarse libremente dentro de los límites de éste. Por eso, para no introducir variaciones sensibles en el campo que se investiga, la magnitud de la carga de ensayo debe tomarse suficientemente pequeña.

De las fórmulas (5.2) y (5.1) se deduce que la intensidad del campo de una carga puntual es proporcional a la magnitud de la carga q e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r desde dicha carga hasta el punto dado del campo:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \tag{5.3}$$

El vector **E** está dirigido a lo largo de la recta radial que pasa por la carga y por el punto dado del campo, y su sentido, si es positivo, va de la carga al punto, y si es negativo, del punto a la carga.

En el sistema de Gauss la fórmula de la intensidad del campo de una carga puntual en el vacío tiene la forma

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \tag{5.4}$$

Como unidad de intensidad del campo eléctrico se toma la intensidad en un punto tal, que sobre una carga igual a la unidad (1 C en el SI ó 1 unidad de carga CGSE en el sistema de Gauss) actúe una fuerza cuya magnitud sea también igual a la unidad (1 N en el SI ó 1 dina en el sistema de Gauss). En el sistema de Gauss esta unidad carece de nombre especial. En el SI la unidad de intensidad del campo eléctrico se llama voltio por metro y se designa V/m (véase la fórmula (8.5)).

De cuerdo con la fórmula (5.3.), la carga de 1 C crea en el vacío, a la distancia de 1 m, la intensidad

$$E = \frac{1}{4\pi\,[1/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)]} \frac{1}{1^2} = 9\cdot 10^9 \text{ V/m}.$$

Esta misma intensidad en el sistema de Gauss es

$$E=\frac{q}{r^2}=\frac{3\cdot 10^9}{100^2}=3\cdot 10^5 \text{ unid. CGSE.}$$

Comparando ambos resultados hallamos que

1 unid. CGSE de intensidad de campo = $3\cdot 10^4$ V/m. (5.5)

Según (5.2), la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo es

$$\mathbf{F}=q_{\text{ens}}\mathbf{E}.$$

Es evidente que sobre toda carga puntual q[1]), en un punto del campo de intensidad **E**, actuará la fuerza

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}. \tag{5.6}$$

Si la carga q es positiva, el sentido de la fuerza coincide con el del vector **E**. Cuando q es negativa, los sentidos de los vectores **F** y **E** son opuestos.

En el § 2 se indicó que la fuerza con que un sistema de cargas actúa sobre una carga que no forme parte de él, es igual a la suma vectorial de las fuerzas que, sobre dicha carga, ejercen por separado cada una de las cargas del sistema (véase la fórmula (2.4)). De aquí se infiere que la *intensidad del campo de un sistema de cargas es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos que crearían cada una de las cargas del sistema por separado*:

$$\mathbf{E}=\sum \mathbf{E}_i. \tag{5.7}$$

Esta última afirmación se llama *principio de superposición de los campos eléctricos.*

El principio de superposición permite calcular la intensidad del campo de cualquier sistema de cargas. Dividiendo las cargas extensas en fracciones suficientemente pequeñas dq, cualquier sistema de cargas se puede reducir a un conjunto de cargas puntuales. La aportación de cada una de estas cargas al campo resultante se calcula por la fórmula (5.3).

El campo eléctrico se puede describir conociendo la magnitud y la dirección del vector **E** para cada punto. El conjunto de estos vectores forma el campo del vector intensidad de campo eléctrico (compárese con el campo del vector velocidad, t. 1, § 72). El campo del vector velocidad se puede representar muy intuitivamente por medio de las líneas de intensidad. Análogamente, el campo eléctrico se puede describir valiéndose de las líneas de intensidad (de campo eléctrico), que abreviadamente llamaremos líneas **E** (también se denominan líneas de fuerza). Las líneas de intensidad se trazan de tal modo que la tangente a ellas en cada punto coincida con la direc-

[1]) En la fórmula (5.3), q designa la carga que determina el campo. En la fórmula (5.6) se llama q la carga que experimenta, en el punto de intensidad **E**, la acción de la fuerza **F**.

ción del vector **E**. La densidad de estas líneas se elige de manera que la cantidad de líneas que atraviesan la unidad de área de una superficie perpendicular a ellas sea igual al valor numérico del vector **E**. Entonces, por la figura de las líneas de intensidad se pueden deducir la dirección (sentido) y la magnitud del vector **E** en los distintos puntos del espacio (fig. 5.2).

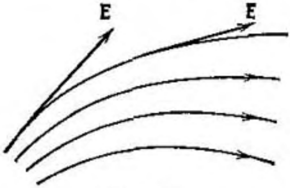


Fig. 5.2.

Las líneas **E** del campo de una carga puntual son un conjunto de rectas radiales que parten de la carga, si ésta es positiva, y que inciden en ella si es negativa (fig. 5.3). Las líneas se apoyan por un extremo en la carga y por el otro se alejan hacia el infinito. En realidad el número total de líneas que atraviesa una superficie esférica de radio arbitrario r, será igual al producto de la densidad de líneas por el área de la esfera $4\pi r^2$. La densidad de líneas, como hemos con-

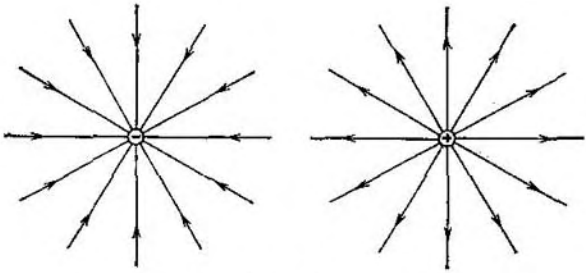


Fig. 5.3.

venido, es numéricamente igual a $E = (1/4\pi\varepsilon_0)\cdot(q/r^2)$. Por consiguiente, la cantidad de líneas será numéricamente igual a $(1/4\pi\varepsilon_0)\cdot(q/r^2)\cdot 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$. Este resultado significa que el número de líneas a cualquier distancia de la carga será el mismo. De aquí se infiere que, excepto en la carga, las líneas ni empiezan ni terminan en ninguna parte; comenzando en la carga parten hacia el infinito (si la carga es positiva), o proviniendo del infinito terminan en la carga (si ésta es negativa). Esta propiedad de las líneas **E** es general para todos los campos eléctricos, o sea, para los campos creados por cualquier sistema de cargas en reposo: las líneas de campo eléctrico pueden empezar o terminar solamente en las cargas o partir hacia el infinito.

§ 6. Potencial

Consideremos el campo creado por una carga puntual en reposo q. En cualquier punto de este campo sobre una carga puntual q' actúa la fuerza

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathbf{e}_r=F(r)\,\mathbf{e}_r. \qquad (6.1)$$

Aquí $F(r)$ es el módulo de la fuerza $\mathbf{F}$, y $\mathbf{e}_r$, el versor del radio vector $\mathbf{r}$, que determina la posición de la carga q', respecto de la carga q.

La fuerza (6.1) es central (véase t. 1, § 21). El campo central de fuerzas es conservativo. Por lo tanto, el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre la carga q' al trasladarla de un punto a otro, no depende del camino recorrido. Este trabajo es

$$A_{12}=\int_1^2 F(r)\,\mathbf{e}_r\,d\mathbf{l}, \qquad (6.2)$$

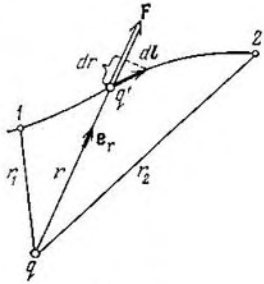


Fig. 6.1.

donde $d\mathbf{l}$ es el desplazamiento elemental de la carga q'. En la fig. 6.1 se ve que el producto escalar $\mathbf{e}_r d\mathbf{l}$ es igual al incremento del módulo del radio vector $\mathbf{r}$, es decir, dr. Por eso la fórmula (6.2) se puede representar de la forma

$$A_{12}=\int_1^2 F(r)\,dr$$

(compárese con la fórmula (21.3) del t. 1). La sustitución de la expresión para $F(r)$ da:

$$A_{12}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq'}{r_1}-\frac{qq'}{r_2}\right). \qquad (6.3)$$

El trabajo de las fuerzas del campo conservativo se puede representar como una pérdida de energía potencial:

$$A_{12}=W_{p1}-W_{p2}. \qquad (6.4)$$

La comparación de las fórmulas (6.3) y (6.4) conduce a la siguiente expresión de la energía potencial de la carga q' en el campo de la carga q:

$$W_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}+\text{const}.$$

El valor de la constante en la expresión de la energía potencial se elige por lo general de tal forma, que cuando la carga se aleje hasta el infinito (o sea, cuando $r=\infty$), la energía potencial se anule. Con esta condición se obtiene que

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r}. \tag{6.5}$$

Vamos a valernos de la carga q' como carga de ensayo para estudiar el campo. De acuerdo con (6.5), la energía potencial que posee la carga de ensayo no sólo depende de su magnitud q', sino también de las magnitudes q y r que determinan el campo. Por consiguiente, esta energía puede utilizarse para definir el campo, análogamente a como se empleó para este fin la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo.

Distintas cargas de ensayo q'_{ens}, q''_{ens}, etc., tendrán en un mismo punto del campo diferentes energías W'_p, W''_p, etc. Pero la relación W_p/q_{ens} será igual para todas las cargas (véase la fórmula (6.5)). La magnitud

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{ens}} \tag{6.6}$$

se llama *potencial del campo* en el punto dado y se utiliza, junto con la intensidad del campo **E**, para definir los campos eléctricos.

De (6.6) se deduce que el potencial es numéricamente igual a la energía potencial que tendría en el punto dado del campo una carga unitaria positiva. Sustituyendo en (6.6) el valor de la energía potencial (6.5), obtenemos para el potencial de la carga puntual la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}. \tag{6.7}$$

En el sistema de Gauss el potencial de una carga puntual en el vacío se determina por la fórmula

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Examinemos el campo creado por un sistema de N cargas puntuales $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Las distancias desde cada una de las cargas hasta un punto dado del campo las designaremos por $r_1, r_2, \ldots, r_N$. El trabajo que realizan las fuerzas de este campo sobre una carga q' será igual a la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas debidas a cada una de las cargas por separado:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_i.$$

Según (6.3), cada uno de los trabajos

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

donde r_{i1} es la distancia desde la carga q_i hasta la posición inicial de la carga q', y r_{i2}, la distancia desde q_i hasta la posición final de la carga q'. Por consiguiente,

$$A_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i1}}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Comparando esta expresión con la relación (6.4), obtenemos para la energía potencial de la carga q' en el campo del sistema de cargas la expresión

$$W_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_i},$$

de la cual se sigue que

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}. \tag{6.8}$$

La comparación de la fórmula obtenida con la expresión (6.7) conduce a la conclusión de que *el potencial del campo creado por un sistema de cargas es igual a la suma algebraica de los potenciales creados por cada una de las cargas por separado.* Mientras las intensidades de los campos, cuando éstos se superponen, se suman vectorialmente, los potenciales se suman algebraicamente. Por esta causa el cálculo de los potenciales resulta generalmente mucho más fácil que el de las intensidades del campo eléctrico.

De la fórmula (6.6) se infiere que la carga q que se encuentra en el punto del campo de potencial φ, posee la energía potencial

$$W_p = q\varphi. \tag{6.9}$$

Por lo tanto, el trabajo de las fuerzas del campo sobre la carga q puede expresarse mediante la diferencia de potencial:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{6.10}$$

De este modo, el trabajo que sobre la carga realizan las fuerzas del campo es igual al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final (o sea, por la disminución del potencial).

Si la carga q del punto con potencial φ se aleja hacia el infinito (donde, según la condición, el potencial es nulo), el trabajo de las fuerzas del campo será

$$A_\infty = q\varphi. \tag{6.11}$$

De aquí se sigue que *el potencial es numéricamente igual al trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre la carga unitaria positiva al alejar ésta desde el punto dado hasta el infinito.* Un trabajo de igual

magnitud hay que realizar contra las fuerzas del campo eléctrico para trasladar una carga unitaria positiva desde el infinito hasta el punto dado del campo.

La fórmula (6.11) se puede utilizar para establecer las unidades de potencial. Como unidad de potencial se toma el potencial de un punto tal del campo, que para trasladar desde el infinito hasta él una carga unitaria positiva hay que realizar un trabajo igual a la unidad. Como en el SI se toma como unidad de potencial, llamada voltio (cuyo símbolo es V), el potencial de un punto tal, que para trasladar hasta él desde el infinito una carga de un culombio hay que realizar un trabajo igual a un julio:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{V},$$

de donde

$$1\ \mathrm{V} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{C}}. \tag{6.12}$$

Como unidad electrostática absoluta de potencial (unidad de potencial CGSE) se toma el potencial de un punto tal, que para trasladar desde el infinito hasta él una carga igual a +1 unidad CGSE hay que realizar el trabajo de 1 erg. Expresando en (6.12) 1 J y 1 C mediante unidades CGSE, hallamos la relación entre el voltio y la unidad de potencial CGSE:

$$1\ \mathrm{V} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{C}} = \frac{10^7\ \mathrm{erg}}{3\cdot 10^9\ \mathrm{unid.\ CGSE}} = \frac{1}{300}\ \text{unid. de potencial CGSE}. \tag{6.13}$$

De este modo, una unidad de potencial CGSE es igual a 300 V.

En física suele emplearse una unidad de energía y trabajo denominada electrón-voltio (eV). Se entiende por electrón-voltio el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre una carga igual a la del electrón (es decir, sobre la carga elemental e), al recorrer ésta una diferencia de potencial de 1 V:

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot 1\ \mathrm{V} = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}60\cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}. \tag{6.14}$$

También se utilizan las unidades múltiplas del electrón-voltio:

$$1\ \mathrm{keV}\ (\text{kiloelectrón-voltio}) = 10^3\ \mathrm{eV},$$

$$1\ \mathrm{MeV}\ (\text{megaelectrón-voltio}) = 10^6\ \mathrm{eV},$$

$$1\ \mathrm{GeV}\ (\text{gigaelectrón-voltio}) = 10^9\ \mathrm{eV}.$$

§ 7. Energía de interacción del sistema de cargas

La expresión (6.5) se puede considerar como la energía potencial mutua de las cargas q y q'. Designando las cargas por q_1 y q_2, obtenemos para sus energías de interacción la fórmula

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \tag{7.1}$$

El símbolo r_{12} representa la distancia entre las cargas.

Analicemos un sistema formado por N cargas puntuales $q_1, q_2, \ldots$
$\ldots, q_N$. En el § 23 del t. 1 se demostró que la energía de interacción de un sistema de este tipo es igual a la suma de las energías de interacción de las cargas tomadas dos a dos:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{pik}(r_{ik}) \tag{7.2}$$

(véase la fórmula (23.20) del t. 1). De acuerdo con (7.1)

$$W_{pik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (7.2) da que

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \tag{7.3}$$

En el sistema de Gauss no figura en esta fórmula el factor $1/4\pi\varepsilon_0$.

La suma que hay en la fórmula (7.3) se efectúa respecto de los índices i y k. Ambos índices recorren, independientemente el uno del otro, todos los valores desde 1 hasta N. Los sumandos en los cuales coinciden los valores del índice i con los del k, no se toman en consideración. Damos a la fórmula (7.3) la forma siguiente:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}. \tag{7.4}$$

La expresión

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \frac{q_k}{r_{ik}}$$

representa de por sí el potencial creado por todas las cargas, excepto q_i, en el punto en que se encuentra esta última. Teniendo esto en cuenta, obtenemos para la energía de interacción la fórmula siguiente:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i. \tag{7.5}$$

§ 8. Relación entre la intensidad del campo eléctrico y el potencial

El campo eléctrico puede definirse valiéndose de la magnitud vectorial **E** o de la magnitud escalar φ. Es evidente que entre estas dos magnitudes debe existir una relación determinada. Si se toma

en consideración que **E** es proporcional a la fuerza que actúa sobre la carga y que φ es la energía potencial de dicha carga, es fácil comprender que esta relación debe ser análoga a la que hay entre la energía potencial y la fuerza.

La fuerza **F** está ligada con la energía potencial por la relación

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \tag{8.1}$$

(véase la fórmula (22.7) del t. 1). Para una partícula cargada que se encuentra en un campo electrostático, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ y $W_p = q\varphi$. Sustituyendo estos valores en la relación (8.1), obtenemos que

$$q\mathbf{E} = -\nabla (q\varphi).$$

La constante q se puede sacar del signo de gradiente. Haciendo esto y simplificando después por q, llegamos a la fórmula

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \tag{8.2}$$

que establece la relación entre la intensidad del campo y el potencial.

Recordando la definición del gradiente (véase la fórmula (22.6) del t. 1), se puede escribir que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{8.3}$$

Por consiguiente, en proyecciones sobre los ejes de coordenadas, la relación (8.2) tiene la forma

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{8.4}$$

Análogamente, la proyección del vector **E** sobre una dirección arbitraria l es igual a la derivada de φ respecto de l tomada con signo contrario, es decir, a la velocidad de disminución del potencial durante la traslación a lo largo de la dirección l:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \tag{8.5}$$

De que la fórmula (8.5) es correcta podemos cerciorarnos fácilmente tomando la dirección l como uno de los ejes de coordenadas y teniendo en cuenta la relación (8.4).

Vamos a explicar la relación (8.2) valiéndonos del ejemplo del campo de una carga puntual. El potencial de este campo se expresa por la fórmula (6.7). Pasando a las coordenadas cartesianas obtenemos la expresión:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

La derivada parcial de esta función respecto de x es igual a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en la fórmula (8.3), llegamos a la expresión

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

que coincide con (5.3).

La fórmula (8.2) permite hallar la intensidad del campo en cada punto por los valores conocidos de φ. También puede resolverse el problema inverso, o sea, dados los valores de $\mathbf{E}$ en cada punto, hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del campo. Para esto nos valemos de que el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre una carga q al trasladarla desde un punto *1* a un punto *2* se puede calcular como

$$A_{12}=\int_1^2 q\mathbf{E}\,d\mathbf{l}.$$

Al mismo tiempo, según (6.10), este mismo trabajo se puede representar de la forma

$$A_{12}=q(\varphi_1-\varphi_2).$$

Igualando entre sí estas dos expresiones y simplificando por q, llegamos a la relación

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{l}. \tag{8.6}$$

Esta integral puede tomarse a lo largo de cualquier línea que una los puntos *1* y *2*, ya que el trabajo de las fuerzas del campo no depende del camino recorrido. Para el recorrido por un contorno cerrado $\varphi_1=\varphi_2$ y la fórmula (8.6) se transforma en la relación

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0 \tag{8.7}$$

(la circunferencia en el signo de integral indica que la integración se efectúa a lo largo de un camino cerrado). Advertimos que esta relación sólo es válida para el campo electrostático. Más adelante explicaremos que el campo de las cargas en movimiento (es decir, el campo variable con el tiempo) no es de potencial y, por lo tanto, no cumple la condición (8.7) para éste.

Una superficie imaginaria cuyos puntos tienen todos el mismo potencial, se llama superficie equipotencial o superficie de nivel.

Su ecuación tiene la forma

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Durante la traslación en un segmento dl por un plano equipotencial, el potencial no varía ($d\varphi = 0$). Por consiguiente, según la fórmula (8.5), el componente del vector **E**, tangente a la superficie es nulo. De esto concluimos que el vector **E** tiene en cada punto la dirección de la normal a la superficie equipotencial que pasa por dicho punto. Teniendo en cuenta que la dirección del vector **E** es tangente a la línea **E**, se comprende fácilmente que las líneas de intensidad son en cada punto ortogonales a las superficies equipotenciales.

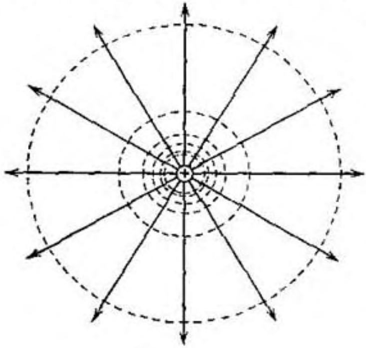


Fig. 8.1.

Una superficie equipotencial se puede hacer pasar por cualquier punto del campo. Por lo tanto, se puede construir una cantidad infinita de estas superficies. Conviene trazarlas de tal modo, que la diferencia de potencial entre dos superficies vecinas sea igual en todas partes. Entonces, por la densidad de superficies equipotenciales se puede deducir la magnitud de la intensidad del campo. Efectivamente, cuanto más densamente se encuentren las superficies equipotenciales, con tanta mayor rapidez variará el potencial al trasladarse a lo largo de una normal a la superficie. Por consiguiente, tanto mayor será en este sitio $\nabla\varphi$, y también **E**.

En la fig. 8.1 se muestran las superficies equipotenciales (o, más exactamente, sus intersecciones con el plano del dibujo) para el campo de una carga puntual. De acuerdo con el carácter de la dependencia de E respecto de r, la densidad de superficies equipotenciales aumenta a medida que se aproximan a la carga.

Para un campo homogéneo, las superficies equipotenciales forman un sistema de planos equidistantes entre sí, perpendiculares a la dirección del campo.

§ 9. Dipolo

Se llama *dipolo eléctrico* un sistema de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, iguales en magnitud, la distancia l entre las cuales es mucho menor que las distancias hasta aquellos puntos en que se determina

el campo del sistema. La recta que pasa por ambas cargas recibe el nombre de *eje del dipolo.*

Primero vamos a calcular el potencial y luego la intensidad del campo del dipolo. Este campo tiene simetría axial. Por eso la figura del campo en cualquier plano que pase por el eje del dipolo será la misma y el vector **E** se encuentra en dicho plano. La posición de un punto respecto del dipolo la caracterizaremos por medio de un radio vector **r** o valiéndonos de las coordenadas polares r y ϑ (fig. 9.1). Introducimos el vector **l**, trazado desde la carga negativa a la positiva. La posición de la carga $+q$ respecto del centro del dipolo se determina por el vector **a**, la de la carga $-q$, por el vector $-\mathbf{a}$. Es evidente que $\mathbf{l} = 2\mathbf{a}$. Las distancias hasta un punto dado desde las cargas $+q$ y $-q$ las designaremos respectivamente por r_+ y r_-. En virtud de la pequeñez de a en comparación con r, se puede suponer aproximadamente que

$$r_+ = r - a\cos\vartheta = r - \mathbf{a}\mathbf{e}_r,$$
$$r_- = r + a\cos\vartheta = r + \mathbf{a}\mathbf{e}_r. \tag{9.1}$$

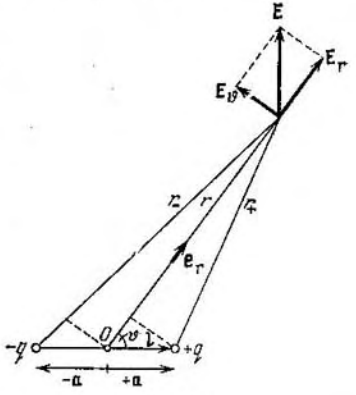


Fig. 9.1.

El potencial en el punto determinado por el radio vector **r**, es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

El producto $r_+ r_-$ se puede sustituir por r^2. La diferencia $r_- - r_+$, de acuerdo con las fórmulas (9.1), es igual a $2\mathbf{a}\mathbf{e}_r = \mathbf{l}\mathbf{e}_r$. Por consiguiente,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\mathbf{l}\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{p}\mathbf{e}_r}{r^2}, \tag{9.2}$$

donde

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \tag{9.3}$$

es la característica del dipolo llamada su *momento eléctrico*. El vector **p** está dirigido a lo largo del eje del dipolo desde la carga negativa a la positiva (fig. 9.2).

De la fórmula (9.2) se infiere que el campo del dipolo está determinado por su momento eléctrico **p**. Más adelante veremos que también el comportamiento del dipolo en un campo eléctrico exterior

está determinado por su momento eléctrico **p**. La comparación con la expresión (6.7) muestra que el potencial del campo del dipolo disminuye con la distancia más rápidamente (como $1/r^2$) que el potencial de una carga puntual (que varía según la ley $1/r$).

En la fig. 9.1 se ve que $\mathbf{p}\mathbf{e}_r = p\cos\vartheta$. Por eso la expresión (9.2) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2}. \qquad (9.4)$$

Para hallar la intensidad del campo del dipolo calculamos por la fórmula (8.5) la proyección del vector **E** sobre dos direcciones mutuamente perpendiculares. Una de ellas se determina por el movimiento del punto debido a la variación de la distancia r (permaneciendo fijo ϑ), y la segunda, por el movimiento del punto condicio-

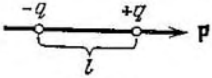


Fig. 9.2.

nado por la variación del ángulo ϑ (permaneciendo fijo r; véase la fig. 9.1). La primera proyección se obtiene derivando la expresión (9.4) respecto de r:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}. \qquad (9.5)$$

La segunda proyección (que designaremos por E_ϑ) la obtenemos tomando la razón del incremento del potencial φ que se obtiene al aumentar el ángulo ϑ en $d\vartheta$, a la distancia $r\,d\vartheta$ a que se desplaza entonces el extremo del segmento r (en este caso el dl que figura en la fórmula (8.5) es igual a $r\,d\vartheta$). De este modo,

$$E_\vartheta = -\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

Sustituyendo el valor de la derivada de la función (9.4) respecto de ϑ, obtenemos:

$$E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{r^3}. \qquad (9.6)$$

La suma de los cuadrados de las expresiones (9.5) y (9.6) da el cuadrado del vector **E** (véase la fig. 9.1):

$$E^2 = E_r^2 + E_\vartheta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2(4\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}^2\,\vartheta)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2(1 + 3\cos^2\vartheta).$$

De aquí

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}. \qquad (9.7)$$

Suponiendo en (9.7) $\vartheta = 0$, obtenemos la intensidad sobre el eje del dipolo:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \qquad (9.8)$$

El vector $\mathbf{E}_{\parallel}$ está dirigido según el eje del dipolo. Esto está de acuerdo con la simetría axial del problema. De la fórmula (9.5) se sigue que $E_r > 0$ cuando $\vartheta = 0$ y $E_r < 0$ cuando $\vartheta = \pi$. Esto significa que en cualquier caso la dirección del vector $\mathbf{E}_{\parallel}$ coincide con la dirección de $-q$ a $+q$ (es decir, con la dirección de $\mathbf{p}$). Por eso la fórmula (9.8) puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \qquad (9.9)$$

Suponiendo en (9.7) $= \pi/2$, obtenemos la intensidad en la recta que pasa por el centro del dipolo y es perpendicular a su eje:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3}. \qquad (9.10)$$

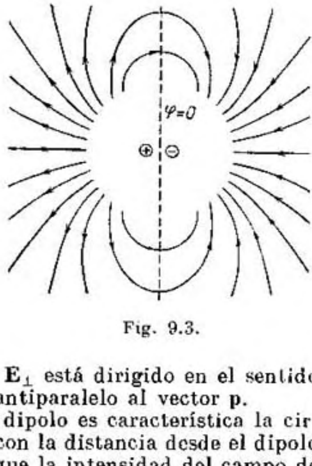


Fig. 9.3.

De acuerdo con la fórmula (9.5), cuando $\vartheta = \pi/2$ la proyección E_r es nula. Por consiguiente, el vector $\mathbf{E}_{\perp}$ es paralelo al eje del dipolo. De la fórmula (9.6) se deduce que si $\vartheta = \pi/2$ la proyección E_ϑ es positiva. Esto significa que el vector $\mathbf{E}_{\perp}$ está dirigido en el sentido del crecimiento del ángulo ϑ, o sea, antiparalelo al vector $\mathbf{p}$.

Para la intensidad del campo del dipolo es característica la circunstancia de que aquélla disminuye con la distancia desde el dipolo como $1/r^3$, es decir, con más rapidez que la intensidad del campo de una carga puntual (que disminuye como $1/r^2$).

En la fig. 9.3 se muestran las líneas $\mathbf{E}$ del campo de un dipolo. Según la fórmula (9.4), cuando $\vartheta = \pi/2$ el potencial se anula para todos los r. De este modo, todos los puntos del plano perpendicular al eje del dipolo que pasa por su punto medio tienen potencial nulo. Esto era previsible, puesto que las distancias desde las cargas $+q$ y $-q$ hasta cualquier punto de este plano son iguales.

Estudiemos ahora el comportamiento del dipolo en un campo eléctrico exterior. Si el dipolo se sitúa en un campo eléctrico homogéneo, las cargas $+q$ y $-q$ que forman el dipolo se encuentran bajo

la acción de las fuerzas, iguales en magnitud pero de sentidos opuestos, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (fig. 9.4.). Estas fuerzas forman un par cuyo brazo es igual a l sen α, o sea, depende de la orientación del dipolo respecto del campo. El módulo de cada una de las fuerzas es igual a qE. Multiplicándolo por el brazo, obtenemos la magnitud del momento del par de fuerzas que actúa sobre el dipolo:

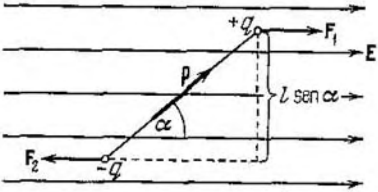


Fig. 9.4.

$$N = qEl \operatorname{sen} \alpha = pE \operatorname{sen} \alpha \tag{9.11}$$

(p es el momento eléctrico dipolar). Se comprende fácilmente que la fórmula (9.11) puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{pE}]. \tag{9.12}$$

El momento de fuerzas (9.12) tiende a hacer girar el dipolo de tal forma que su momento eléctrico $\mathbf{p}$ tome la dirección del campo.

Hallemos la energía potencial que posee el dipolo en el campo eléctrico exterior. De acuerdo con la fórmula (6.9) esta energía es

$$W_p = q\varphi_+ - q\varphi_- = q\,(\varphi_+ - \varphi_-). \tag{9.13}$$

Aquí φ_+ y φ_- son los valores del potencial del campo exterior en los puntos en que se sitúan las cargas $+q$ y $-q$.

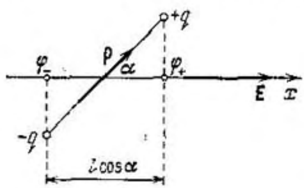


Fig. 9.5.

El potencial del campo homogéneo disminuye linealmente en el sentido del vector $\mathbf{E}$. Tomando esta dirección como eje x (fig. 9.5), se puede escribir que $E = E_x = -d\varphi/dx$. En la fig. 9.5 se ve que la diferencia $\varphi_+ - \varphi_-$ es igual al incremento del potencial en el segmento $\Delta x = l \cos \alpha$:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx}\, l \cos \alpha = -El \cos \alpha.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (9.13), obtenemos que

$$W_p = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha. \tag{9.14}$$

En esta fórmula α es el ángulo entre los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{E}$, por lo que aquélla puede ser escrita en la forma

$$W_p = -\mathbf{pE} \tag{9,15}$$

Advertimos que esta expresión no tiene en cuenta la energía de interacción de las cargas $+q$ y $-q$ que forman el dipolo.

La fórmula (9.15) la hemos obtenido suponiendo, para simplificar, que el campo era homogéneo. No obstante, esta fórmula es válida también para un campo no homogéneo.

Consideremos un dipolo que se encuentra en un campo no homogéneo que posea simetría respecto del eje x[1]). Supongamos que el centro del dipolo se encuentra en dicho eje y que el momento eléctrico del dipolo forma con este último un ángulo α, distinto de $\pi/2$

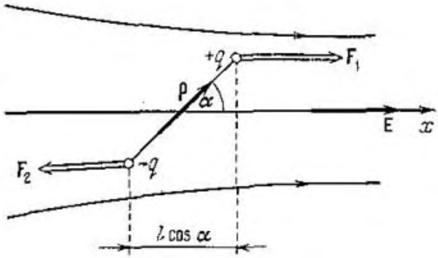


Fig. 9.6.

(fig. 9.6). En este caso las fuerzas que actúan sobre las cargas del dipolo no son iguales en magnitud. Por eso, además del momento de rotación, sobre el dipolo actuará una fuerza tendente a desplazarlo en el sentido del eje x. Para obtener el valor de esta fuerza aplicamos la fórmula (8.1), según la cual

$$F_x = -\partial W_p/\partial x, \quad F_y = -\partial W_p/\partial y, \quad F_z = -\partial W_p/\partial z.$$

De acuerdo con (9.14)

$$W_p(x, y, z) = -pE(x, y, z)\cos\alpha$$

(la orientación del dipolo con respecto al vector **E** la consideramos invariable: $\alpha = \text{const}$).

Para los puntos del eje x las derivadas de E respecto de y y z son nulas. Respectivamente $\partial W_p/\partial y = \partial W_p/\partial z = 0$. Por lo tanto sólo es distinta de cero la componente F_x de la fuerza. Esta componente

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha. \qquad (9.16)$$

Este resultado puede obtenerse tomando en consideración que la intensidad del campo en los puntos en que se encuentran las cargas

[1]) Un caso particular del campo de este tipo es el campo de una carga puntual, si como eje x se toma una recta que pase por la carga.

$+q$ y $-q$ (véase la fig. 9.6) difiere en la magnitud $(\partial E/\partial x)\, l \cos\alpha$. Respectivamente, la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre las cargas es igual a $q\,(\partial E/\partial x)\cdot l\cos\alpha$, lo que coincide con (9.16).

Cuando $\alpha < \pi/2$, la magnitud F_x determinada por la fórmula (9.16) es positiva. Esto significa que por la acción de la fuerza el dipolo es atraído hacia la región en que el campo es más intenso (véase la fig. 9.6). Si $\alpha > \pi/2$, el dipolo es empujado hacia fuera del campo.

En el caso representado en la fig. 9.7, para los puntos que hay sobre el eje y sólo es distinta de cero la derivada $\partial E/\partial y$. Por eso la fuerza que actúa sobre el dipolo viene determinada por la componente

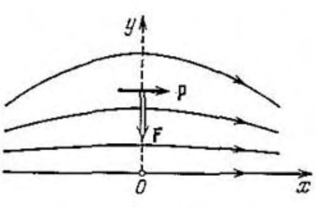


Fig. 9.7.

$$F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y} = p\,\frac{\partial E}{\partial y}\ (\cos\alpha = 1).$$

La derivada $\partial E/\partial y$ es negativa. Por consiguiente, la fuerza tiene la dirección indicada en la figura. En este caso el dipolo es atraído hacia el campo.

Advertimos que de un modo semejante a como $-\partial W_p/\partial x$ da la proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre el sistema, la derivada de la expresión (9.14) respecto de α, tomada con signo contrario, da la proyección del momento de rotación sobre el «eje» α: $N_\alpha = -pE$ sen α. El signo menos se obtiene porque el «eje» α y el momento N tienen sentidos opuestos (véase la fig. 9.4).

§ 10. Campo de un sistema de cargas a grandes distancias

Tomemos un sistema de N cargas $q_1, q_2, \ldots, q_N$, situadas en un volumen de dimensiones lineales del orden l, y estudiemos el campo creado por este sistema a distancias r grandes en comparación con l $(r \gg l)$. Elegimos el origen de coordenadas O dentro del volumen ocupado por el sistema y determinamos la posición de las cargas por medio de los radios vectores $\mathbf{r}_i$ (fig. 10.1; para no recargar la figura sólo se muestra el radio vector de la i-ésima carga).

El potencial en el punto determinado por el radio vector $\mathbf{r}$ es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\,. \tag{10.1}$$

En virtud de la pequeñez de r_i comparado con r, se puede suponer que

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| = r - \mathbf{r}_i\mathbf{e}_r = r\,(1 - \mathbf{r}_i\mathbf{e}_r/r)$$

(compárese con (9.1)). La sustitución de esta expresión en la fórmula (10.1) da

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\,\frac{1}{1-\mathbf{r}_i\mathbf{e}_r/r}. \tag{10.2}$$

Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x,$$

válida cuando $x\ll 1$, transformamos la expresión (10.2) del modo siguiente:

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}_i\mathbf{e}_r}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sum q_i}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\sum q_i\mathbf{r}_i\right)\mathbf{e}_r}{r^2}. \tag{10.3}$$

El primer término de la expresión obtenida es el potencial del campo de una carga puntual de magnitud $q=\sum q_i$ (compárese con (6.7)). El segundo término tiene la misma forma que la expresión que determina el potencial del campo de un dipolo, desempeñando el papel del momento eléctrico dipolar la magnitud

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{N} q_i\mathbf{r}_i. \tag{10.4}$$

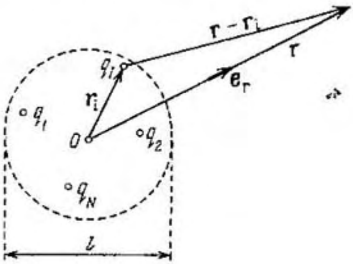


Fig. 10.1.

Esta magnitud recibe el nombre de *momento eléctrico dipolar* del sistema de cargas. Es fácil comprobar que en el caso de un dipolo la fórmula (10.4) se transforma en la conocida expresión $\mathbf{p}=q\mathbf{l}$.

Si la carga sumaria del sistema es nula ($\sum q_i=0$), el valor del momento dipolar no depende del origen de coordenas que se elija. Para cerciorarnos de esto tomemos dos orígenes de coordenadas arbitrarios O y O' (fig. 10.2). Entre los radios vectores de la i-ésima carga trazados desde estos puntos existe la relación

$$\mathbf{r}_i'=\mathbf{b}+\mathbf{r}_i \tag{10.5}$$

(lo que es el vector $\mathbf{b}$ se ve claramente en la figura). Teniendo en cuenta (10.5), el momento dipolar en el sistema de origen O' es

$$\mathbf{p}'=\sum q_i\mathbf{r}_i'=\sum q_i\,(\mathbf{b}+\mathbf{r}_i)=\mathbf{b}\sum q_i+\sum q_i\mathbf{r}_i.$$

El primer sumando es igual a cero (puesto que $\sum q_i = 0$), y el segundo es igual a **p**, momento dipolar en el sistema de coordenadas de origen en el punto O. De este modo obtenemos que $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$.

La expresión (10.3) representa esencialmente los primeros términos del desarrollo de la función (10.1) en serie de potencias de las magnitudes r_i/r. Si $\sum q_i \neq 0$, la aportación fundamental al potencial la hace el primer término de la fórmula (10.3) (el segundo término decrece como $1/r^2$ y por eso es mucho menor que el primero). Para un sistema eléctricamente neutro ($\sum q_i = 0$) el primer término es

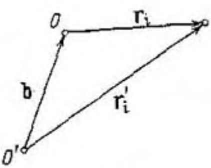


Fig. 10.2.

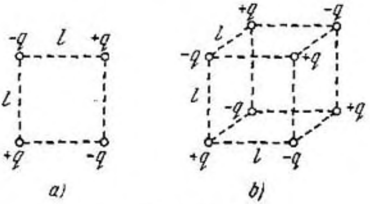


Fig. 10.3.

nulo y el potencial está determinado principalmente por el segundo término de la fórmula (10.3). Así, en particular, ocurre en el caso del campo de un dipolo.

Para el sistema de cargas representado en la fig. 10.3, *a*, llamado *cuadripolo*, tanto $\sum q_i$ como **p** son nulos, de modo que la fórmula (10.3) da un valor nulo del potencial. En realidad el campo de un cuadripolo, aunque mucho más débil que el del dipolo (con las mismas q y l), es distinto de cero. El potencial del campo creado por un cuadripolo se determina principalmente por el tercer término del desarrollo, el cual es proporcional a $1/r^3$. Para obtener este término hay que tener en cuenta las magnitudes del orden $(r_i/r)^2$, que despreciamos al deducir la fórmula (10.3). Para el sistema de cargas que representa la fig. 10.3, *b*, llamado *octopolo*, también es nulo el tercer término del desarrollo. El potencial del campo de tal sistema se determina por el cuarto término del desarrollo, que es proporcional a $1/r_e$.

Advertimos que la magnitud, igual a $\sum q_i$, que figura en el numerador del primer término de la fórmula (10.3), se llama *monopolo* o *multipolo de orden nulo*; el dipolo se denomina *multipolo de primer orden*; el cuadripolo, *multipolo de segundo orden* y así sucesivamente.

De esta forma, en el caso general, el campo de un sistema de cargas a grandes distancias podemos figurárnoslo como la superposición de los campos creados por los multipolos de los distintos órdenes, o sea, del monopolo, dipolo, cuadripolo, octopolo, etc.

§ 11. Descripción de las propiedades de los campos vectoriales

Para poder proseguir el estudio del campo eléctrico es necesario conocer el formalismo matemático que se utiliza para describir las propiedades de los campos vectoriales. Este formalismo se llama *análisis vectorial*. En este párrafo vamos a estudiar los conceptos fundamentales y algunas fórmulas del análisis vectorial, así como la demostración de los principales teoremas de dicho análisis: el de Ostrogradski—Gauss y el de Stokes.

Las magnitudes que se emplean en el análisis vectorial son más comprensibles en el caso del campo del vector velocidad de una corriente de líquido. Por eso vamos a introducir estas magnitudes considerando una corriente de líquido ideal incompresible y luego extenderemos los resultados obtenidos a los campos vectoriales de cualquier naturaleza.

Uno de los conceptos del análisis vectorial ya lo conocemos. Este es el de *gradiente*, que se utiliza para caracterizar los campos escalares. Si a cada punto P de coordenadas x, y, z, se equipara el valor de una magnitud escalar $\varphi = \varphi(x, y, z)$, se dice que está dado el campo escalar φ. Se llama gradiente de la magnitud φ el vector

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{11.1}$$

El incremento de la función φ para un desplazamiento en el segmento $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x\,dx + \mathbf{e}_y\,dy + \mathbf{e}_z\,dz$ es

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

que se puede representar en la forma

$$d\varphi = \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l}. \tag{11.2}$$

Ahora pasamos a establecer las características de los campos vectoriales.

Flujo de un vector. Supongamos que una corriente de líquido se caracteriza por el campo del vector velocidad. El volumen del líquido que pasa en la unidad de tiempo a través de cierta superficie imaginaria S, se llama flujo del líquido a través de dicha superficie. Para hallar el flujo dividimos la superficie en elementos de superficie de magnitud ΔS. En la fig. 11.1 se ve que durante el tiempo Δt a través de un elemento ΔS pasa un volumen de líquido

$$\Delta V = \Delta S\cdot\cos\alpha\cdot v\,\Delta t.$$

Dividiendo este volumen por el intervalo de tiempo Δt, hallamos el flujo a través de la superficie ΔS:

$$\Delta\Phi = \Delta V/\Delta t = \Delta S\,v\cos\alpha.$$

Pasando a las diferenciales obtenemos que

$$d\Phi = v \cos \alpha \cdot dS. \qquad (11.3)$$

La fórmula (11.3) se puede escribir también por otros dos procedimientos. Primero, si se tiene en cuenta que $v \cos \alpha$ da la proyección del vector velocidad sobre la normal **n** a la superficie dS, puede representarse (11.3) en la forma

$$d\Phi = v_n \, dS. \qquad (11.4)$$

Segundo, se puede introducir el vector $d\mathbf{S}$, cuyo módulo es igual a la magnitud de la superficie dS y su dirección coincide con la de la normal **n** a dicha superficie:

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}.$$

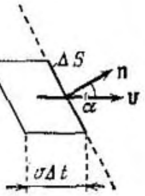


Fig. 11.1.

Como quiera que la elección del sentido del vector **n** es convencional (puede dirigirse tanto hacia un lado de la superficie como hacia el otro), $d\mathbf{S}$ no es un vector verdadero, sino un pseudovector. El ángulo α en la fórmula (11.3) es el formado por los vectores **v** y $d\mathbf{S}$. Por consiguiente, esta fórmula se puede escribir en la forma

$$d\Phi = \mathbf{v} \, d\mathbf{S}. \qquad (11.5)$$

Sumando los flujos a través de todos los elementos de superficie en que dividimos la superficie S, obtenemos el flujo del líquido a través de S:

$$\Phi_v = \int_S \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = \int_S v_n \, dS. \qquad (11.6)$$

La expresión análoga, escrita para un campo vectorial arbitrario **a**, es decir, la magnitud

$$\Phi_a = \int_S \mathbf{a} \, d\mathbf{S} = \int_S a_n \, dS, \qquad (11.7)$$

se llama *flujo del vector* **a** *a través de la superficie S* De acuerdo con esta definición, el flujo del líquido puede denominarse flujo del vector **v** a través de la correspondiente superficie (véase (11.6)).

El flujo de un vector es una magnitud algebraica y su signo depende de cómo se elija el sentido de las normales a los elementos de superficie en que se divide la superficie S al calcular el flujo. La inversión de los sentidos de las normales hace que varíe el signo de a_n y, por lo tanto, el de la magnitud (11.7). En el caso de superficies cerradas se acostumbra calcular el flujo que «sale» hacia fuera de la región abarcada por la superficie. Respectivamente, en calidad

de **n** supondremos siempre en lo sucesivo una normal dirigida hacia fuera (es decir, exterior).

Al flujo de un vector se le puede dar una interpretación geométrica clara. Para esto se representa el campo vectorial por un sistema de líneas **a** construidas de tal modo que la densidad de líneas en cada lugar sea numéricamente igual al módulo del vector **a** en este punto del campo (compárese con la regla para la construcción de las líneas del vector **E**, expuesta al final del § 5). Se halla el número ΔN de intersecciones de las líneas del campo con la superficie imaginaria ΔS En la fig. 11.2 se ve que este número es igual a la densidad de líneas (o sea, a) multiplicada por $\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos\alpha$,

$$\Delta N\ (=)\ a\Delta S\cos\alpha = a_n \Delta S.$$

Se trata únicamente de la igualdad numérica entre ΔN y $a_n\Delta S$. Por eso el signo igual se pone entre paréntesis. De acuerdo con (11.7), la expresión $a_n\Delta S$ representa de por sí $\Delta\Phi_a$, es decir, el flujo del vector **a** a través de la superficie ΔS. De este modo,

$$\Delta N\ (=)\ \Delta\Phi_a. \qquad (11.8)$$

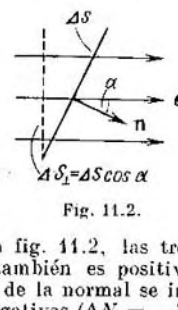


Fig. 11.2.

Para que el signo de ΔN coincida con el de $\Delta\Phi_a$ hay que considerar positivas las intersecciones en las cuales el ángulo α entre el sentido positivo de las líneas del campo y la normal a la superficie es agudo. Si el ángulo α es obtuso la intersección debe considerarse negativa. Para la superficie representada en la fig. 11.2, las tres intersecciones son positivas: $\Delta N = +3$ ($\Delta\Phi_a$ también es positivo en este caso, puesto que $a_n > 0$). Si el sentido de la normal se invierte en la fig. 11.2, las intersecciones serán negativas ($\Delta N = -3$) y el flujo $\Delta\Phi_a$ también será negativo.

Efectuando la suma de la expresión (11.8) sobre la superficie imaginaria finita S, obtenemos la relación

$$\Phi_a\ (=) \sum \Delta N = N_+ - N_-, \qquad (11.9)$$

donde se entiende por N_+ el número total de intersecciones positivas de las líneas del campo con la superficie S, y por N_-, el número total de intersecciones negativas.

Puede causar confusión la circunstancia de que como el flujo, por lo general, se expresa por un número no entero, el número de intersecciones de las líneas del campo con la superficie, que se equipara al campo, tampoco será entero. Pero esto no debe desconcertar. Las líneas del campo son una imagen puramente convencional y no tiene ningún sentido físico.

Tomemos una superficie imaginaria en forma de tira de papel, cuya parte inferior esté torcida respecto de la superior un ángulo π

(fig. 11.3). El sentido de las normales debe elegirse del mismo modo para toda la superficie. Por eso si en la parte superior de la tira la normal positiva se dirige hacia la derecha, en la parte inferior estará dirigida la normal hacia la izquierda. Respectivamente, las intersecciones representadas en la fig. 11.3 de las líneas del campo con la mitad superior de la superficie deberán considerarse positivas, y con la mitad inferior, negativas.

Para una superficie cerrada (fig. 11.4) se considera positiva la normal exterior. Por eso las intersecciones correspondientes a la

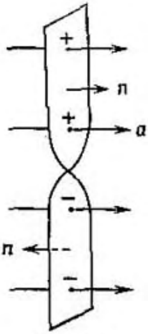


Fig. 11.3.

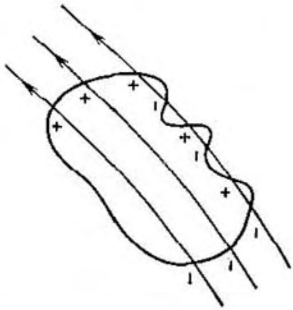


Fig. 11.4.

salida hacia fuera de las líneas (en este caso el ángulo α es agudo), deben tomarse con signo más, y las intersecciones que se producen cuando las líneas entran dentro (en este caso el ángulo α es obtuso), hay que tomarlas con signo menos.

Por la fig. 11.4 se ve que en el caso en que las líneas pasan de un modo continuo por dentro de una superficie cerrada, cada línea, atravesando la superficie, entra dentro y sale fuera del recinto abarcado por ella un número de veces igual. Como resultado, el flujo del vector correspondiente a través de la superficie es nulo. Se comprende fácilmente que en el caso en que las líneas del campo se interrumpen dentro del recinto limitado por la superficie, el flujo del vector a través de la superficie cerrada será numéricamente igual a la diferencia entre el número de líneas que se inician dentro de dicho recinto (N_{inic}) y el número de líneas que finalizan dentro de él (N_{fin}):

$$\Phi_a \,(=)\, N_{\text{inic}} - N_{\text{fin}}. \tag{11.10}$$

El signo del flujo depende de cuál de estos números es mayor. Si $N_{\text{inic}} = N_{\text{fin}}$ el flujo es nulo.

Divergencia. Supongamos dado el campo del vector velocidad de un líquido continuo incompresible. Tomemos en el entorno del punto P una superficie cerrada imaginaria S (fig. 11.5). Si en el volumen V limitado por esta superficie no mana ni desaparece líquido, el flujo que sale fuera a través de la superficie será, evidentemente, nulo. Si el flujo de líquido Φ_v no es nulo, esto significará que dentro del volumen limitado por la superficie hay *manantiales* o *sumideros* de líquido, es decir, puntos por los cuales el líquido entra en el volumen (manantiales) o sale de él (sumideros). La magnitud del flujo determina la potencia algebraica total de los manantiales y sumideros[1]). Si los manantiales predominan sobre los sumideros, el flujo será positivo, y si el predominio es de los sumideros, negativo.

La razón del flujo Φ_v al volumen V del cual sale,

$$\Phi_v/V, \qquad (11.11)$$

da la potencia específica media de los manantiales comprendidos en el volumen V. En el límite, cuando V tiende a cero, o sea, cuando el volumen V se contrae hacia el punto P, la expresión (11.11) da la potencia específica de los manantiales que hay en el punto P, la cual se llama *divergencia* del vector $\mathbf{v}$ (y se designa por div $\mathbf{v}$). Así,

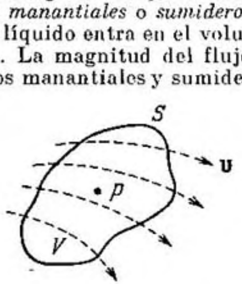


Fig. 11.5

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_v}{V}.$$

De un modo análogo se determina la divergencia de cualquier vector $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{a}\, d\mathbf{S}. \qquad (11.12)$$

La integral se toma sobre la superficie cerrada S que rodea el punto P[2]); V es el volumen limitado por esta superficie. Como se efectúa el paso $V \to P$, en el cual S tiende a cero, es de suponer que la expresión (11.12) no pueda depender de la forma de la superficie. Esta suposición se confirma por medio del cálculo riguroso.

Rodeemos el punto P de una superficie esférica de radio r extremadamente pequeño (fig. 11.6). En virtud de la pequeñez de r, el volumen V limitado por la superficie esférica también será muy pequeño. Por eso, con alto grado de exactitud se puede considerar

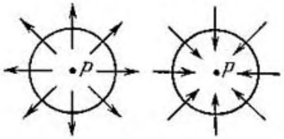
[1]) Se entiende por potencia de un manantial (sumidero) el volumen de líquido que mana (es absorbido) en la unidad de tiempo. El sumidero se puede considerar como un manantial de potencia negativa.

[2]) La circunferencia que lleva el signo integral indica que la integración se efectúa sobre una superficie cerrada.

que el valor de div **a** dentro de los límites del volumen V es constante[1]). En este caso, de acuerdo con (11.12), se puede escribir que

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \approx \frac{\Phi_a}{V},$$

donde Φ_a es el flujo del vector **a** a través de la superficie que limita el volumen V. Según (11.10), Φ_a es igual a N_{inic}, es decir, al número de líneas del vector **a** que se inician dentro de V, si div **a** en el punto P es positiva, o a N_{fin}, número de líneas **a** que finalizan dentro de V, tomado con signo menos, si la div **a** en el punto P es negativa.



a) *b)*

Fig. 11.6.

Teniendo esto en cuenta puede escribirse que

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \approx \frac{N_{\text{inic}}}{V} \quad \text{o} \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{-N_{\text{fin}}}{V}.$$

La relación N_{inic}/V (o $-N_{\text{fin}}/V$) da el número de puntos por unidad de volumen en los cuales comienzan (o finalizan) las líneas del vector **a**.

De este modo, div **a** es numéricamente igual a la densidad de puntos en que se inician las líneas del vector **a** (si div $\mathbf{a} > 0$) o a la densidad de puntos, tomada con signo menos, en que finalizan las líneas **a** (si div $\mathbf{a} < 0$).

De lo dicho se infiere que en el entorno más próximo de un punto de divergencia positiva comienzan las líneas del vector **a**. Desde este punto «divergen» las líneas del campo; este punto es un «manantial» de campo (fig. 11.6, *a*). En el entorno de un punto de divergencia negativa finalizan las líneas del vector **a**. Hacia este punto «convergen» las líneas del campo; este punto es un «sumidero» de campo (fig. 11.6, *b*). Cuanto mayor sea el valor de div **a**, tanto mayor será el número de líneas que se inicien o finalicen en el entorno del punto dado.

De la definición (11.12) se sigue que la divergencia es una función escalar de las coordenadas que determinan las posiciones de los puntos en el espacio (concretamente, una función del punto). La definición (11.12) es la más general, independiente del tipo del sistema de coordenadas.

Hallemos la expresión de la divergencia en un sistema de coordenadas cartesianas. Consideremos en el entorno del punto P (x, y, z) un pequeño volumen en forma de paralelepípedo con las aristas perpendiculares a los ejes de coordenadas (fig. 11.7). El flujo del vector **a** través de la superficie del paralelepípedo está formado por los que fluyen a través de cada una de sus caras por separado.

---

[1]) Se supone que el valor de div **a** varía, al pasar de un punto a otro, de un modo continuo, sin saltos.

Calculemos el flujo a través del par de caras perpendiculares al eje x (en la fig. 11.7 estas caras se indican con rayado oblicuo y se señalan con las cifras *1* y *2*). La normal exterior $\mathbf{n}_2$ a la cara *2* tiene el mismo sentido que el eje x. Por consiguiente, para los puntos de esta cara $a_{n_2} = a_x$. La normal exterior $\mathbf{n}_1$ a la cara *1* tiene sentido contrario al del eje x. Por eso, para los puntos de esta cara $a_{n_1} = -a_x$. El flujo a través de la cara *2* se puede escribir en la forma

$$a_{x2}\Delta y\Delta z,$$

donde a_{x2} es el valor de a_x promediado por la superficie *2*. El flujo a través de la cara *1* será igual a

$$-a_{x1}\Delta y\Delta z,$$

siendo a_{x1} el valor medio de a_x para la cara *1*. El flujo total a través de las caras *1* y *2* se determina por la expresión

$$(a_{x2} - a_{x1})\,\Delta y\,\Delta z. \quad (11.13)$$

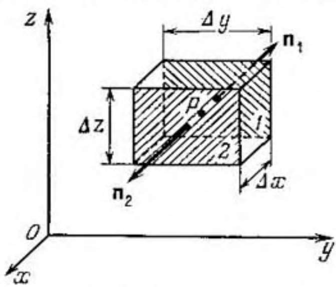


Fig. 11.7.

La diferencia $a_{x2} - a_{x1}$ es el incremento del valor medio (por cara) de a_x al desplazarse a lo largo del eje x en Δx. En virtud de la pequeñez del paralelepípedo (recordemos que vamos a hacer que sus dimensiones tiendan a cero), este incremento podemos representarlo en la forma $(\partial a_x/\partial x)\,\Delta x$, donde el valor de $\partial a_x/\partial x$ se toma en el punto P[1]). Entonces (11.13) se transforma en

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\,\Delta V.$$

Mediante razonamientos análogos pueden obtenerse para los flujos a través de los pares de caras perpendiculares a los ejes y y z las expresiones

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}\,\Delta V \quad \text{y} \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}\,\Delta V.$$

De este modo el flujo total a través de toda la superficie cerrada se determina por la expresión

$$\Phi_a = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Delta V.$$

[1]) La inexactitud que admitimos aquí desaparece al contraer el volumen hacia el punto P como se hace al pasar al límite.

Dividiendo esta expresión por ΔV, hallamos la divergencia del vector **a** en el punto $P(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{11.14}$$

Teorema de Ostrogradski—Gauss. Conociendo la divergencia de un vector **a** en cada punto del espacio se puede calcular el flujo de este vector a través de cualquier superficie cerrada de dimensiones finitas. Primeramente vamos a hacer esto para el flujo del vector **v** (flujo de líquido). El producto de div **v** por dV da la potencia de los manantiales de líquido comprendidos en el volumen dV. La suma de estos productos, o sea, $\int \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dV$ de la potencia algebraica total de los manantiales comprendidos en el volumen V sobre el cual se efectúa la integración. Como consecuencia de la incompresibilidad del líquido, la potencia total de los manantiales debe ser igual al flujo de líquido que sale fuera a través de la superficie S que limita el volumen V. Así, llegamos a la relación

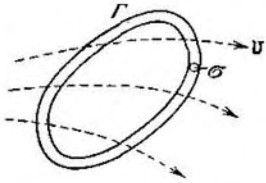


Fig. 11.8.

$$\oint_S \mathbf{v}\, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV$$

Una relación análoga se cumple para un campo vectorial de cualquier naturaleza:

$$\oint_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV. \tag{11.15}$$

Esta relación lleva el nombre de *teorema de Ostrogradski—Gauss*. La integral de la parte izquierda de la relación se calcula sobre una superficie cerrada S arbitraria, y la integral de la parte derecha se extiende al volumen V limitado por dicha superficie.

Circulación. Recurramos otra vez a la corriente de un líquido incompresible ideal. Imaginémonos una línea cerrada o contorno Γ. Supongamos que por un procedimiento cualquiera congelamos instantáneamente el líquido en todo el volumen a excepción de un canal cerrado muy fino, de sección constante, que contiene el contorno Γ (fig. 11.8). En dependencia del carácter del campo del vector velocidad, el líquido que hay en el canal así formado estará en reposo o se moverá a lo largo del contorno (circulará) en uno de los dos sentidos posibles. Como medida de este movimiento tomamos una magnitud igual al producto de la velocidad del líquido en el canal por la longi-

tud del contorno l. Esta magnitud recibió el nombre de *circulación* del vector **v** por el contorno Γ. Así,

$$\text{circulación } \mathbf{v} \text{ por } \Gamma = vl$$

(como el canal, por suposición, tiene sección constante, el módulo de la velocidad $v = \text{const}$).

En el instante de la solidificación de las paredes, en cada una de las partículas de líquido que hay en el canal se anulará la componente de la velocidad perpendicular a la pared y quedará únicamente la componente de la velocidad tangencial al contorno, es decir, v_l. Con esta componente está ligado el impulso $d\mathbf{p}_l$ cuyo módulo, para una partícula del líquido contenido en un trozo de canal de longitud dl, tiene la magnitud $\rho\sigma v_l\,dl$ (ρ es la densidad del líquido, y σ, el área de la sección transversal del canal). Como el líquido es ideal, la acción de las paredes sólo puede hacer que varíe la dirección del vector $d\mathbf{p}_l$, pero no su magnitud. La interacción entre las partículas del líquido origina una redistribución del impulso entre ellas tal, que iguala las velocidades de todas las partículas. Con esto la suma algebraica de las componentes tangenciales de los impulsos no puede variar: el impulso adquirido por una de las partículas que interaccionan es igual al impulso que pierde otra. Esto significa que

$$\rho\sigma vl = \int_{\Gamma} \rho\sigma v_l\,dl,$$

donde v es la velocidad de la circulación, y v_l, la componente tangencial de la velocidad del líquido en el volumen $\sigma\,dl$ en el instante anterior a la solidificación de las paredes del canal[1]). Simplificando por $\rho\sigma$, obtenemos que

$$\text{circulación } \mathbf{v} \text{ por } \Gamma = vl = \oint_{\Gamma} v_l\,dl.$$

De un modo análogo se determina la circulación de cualquier vector **a** por un contorno cerrado Γ arbitrario:

$$\text{circulación } \mathbf{a} \text{ por } \Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} a_l\,dl. \qquad (11.16)$$

Puede parecer que, para que la circulación sea distinta de cero, las líneas vectoriales deben ser cerradas o por lo menos curvadas en la dirección del rodeo del contorno. De lo erróneo de esta suposición es fácil convencerse. Consideremos una corriente laminar del líquido de un río. La velocidad del líquido es nula junto al fondo y va aumen-

[1]) Recordaremos que la circunferencia que lleva el signo integral indica que la integración se efectúa a lo largo del contorno cerrado.

tando a medida que se aproxima a la superficie del agua (fig. 11.9). Las líneas de corriente (líneas del vector **v**) son rectas. A pesar de esto, la circulación del vector **v** por el contorno representado con línea de trazos es, evidentemente, distinta de cero. Al mismo tiempo, en un campo con las líneas curvadas la circulación puede ser nula.

La circulación tiene la propiedad de la aditividad. Esto quiere decir que la suma de las circulaciones por los contornos Γ_1 y Γ_2, que limitan las superficies contiguas S_1 y S_2 (fig. 11.10) es igual a la circulación por el contorno Γ que limita la superficie S, que es

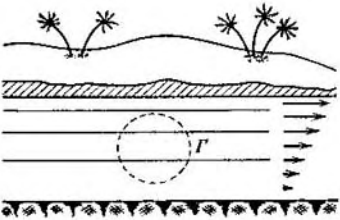


Fig. 11.9.

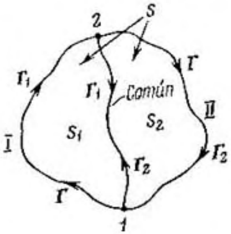


Fig. 11.10.

la suma de las superficies S_1 y S_2. En efecto, la circulación C_1 por el contorno que limita la superficie S_1 se puede representar como una suma de integrales:

$$C_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\substack{1\\(\mathrm{I})}}^{2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\substack{2\\(\mathrm{Común})}}^{1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (11.17)$$

La primera integral se toma siguiendo la parte I del contorno exterior, y la segunda, siguiendo el límite entre las superficies S_1 y S_2 en el sentido 2—1.

Análogamente, la circulación C_2 por el contorno que limita la superficie S_2 es

$$C_2 = \oint\limits_{\Gamma_2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\substack{2\\(\mathrm{II})}}^{1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\substack{1\\(\mathrm{Común})}}^{2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (11.18)$$

La primera igualdad se toma siguiendo la parte II del contorno exterior, y la segunda, siguiendo el límite entre las superficies S_1 y S_2 en el sentido 1—2.

La circulación por el contorno que limita la superficie sumaria S puede representarse en la forma

$$C=\oint_{\Gamma}\mathbf{a}\,d\mathbf{l}=\int_{1\,(I)}^{2}\mathbf{a}\,d\mathbf{l}+\int_{2\,(II)}^{1}\mathbf{a}\,d\mathbf{l}. \tag{11.19}$$

Los segundos sumandos de las expresiones (11.17) y (11.18) difieren únicamente en el signo. Por eso la suma de estas expresiones resulta ser igual a la (11.19). De este modo

$$C=C_1+C_2. \tag{11.20}$$

La relación demostrada no depende de la forma de las superficies y es válida para cualquier número de sumandos. Por consiguiente, si una superficie no cerrada arbitraria S se divide en un gran número de superficies elementales ΔS[1]) (fig. 11.11), la circulación por el contorno que limita S puede representarse como la suma de las circulaciones elementales ΔC por los contornos que limitan los ΔS:

$$C=\sum\Delta C_i. \tag{11.21}$$

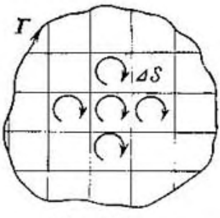


Fig. 11.11.

Rotor. La aditividad de la circulación permite introducir el concepto de circulación específica, es decir, considerar la razón de la circulación C a la magnitud de la superficie S «contorneada» por la circulación. Siendo finitas las dimensiones de la superficie S, la relación C/S da el valor medio de la circulación específica. Este valor caracteriza las propiedades del campo promediadas por la superficie S. Para obtener la característica del campo en un punto P hay que disminuir las dimensiones de la superficie contrayéndola hacia el punto P. Con esto la relación C/S tiende a cierto límite que caracteriza las propiedades del campo en el punto P.

Así, tomemos un contorno imaginario Γ que se encuentre en un plano que pase por el punto P y estudiemos la expresión

$$\lim_{S\to 0}\frac{C_a}{S}, \tag{11.22}$$

en la que C_a es la circulación del vector $\mathbf{a}$ por el contorno Γ; y S es el área abarcada por el contorno. El cálculo del límite para un plano orientado arbitrariamente (11.22) no puede servir de característica

[1]) Para la simpleza las superficies elementales se muestran en la figura en la forma de rectángulos. En realidad su forma puede ser absolutamente arbitraria.

completa del campo en el punto P, ya que la magnitud de este límite depende no sólo de las propiedades del campo en el punto P, sino también de la orientación del contorno en el espacio. Esta orientación puede ser dada por el sentido positivo de la normal $\mathbf{n}$ al plano del contorno (se considera positiva la normal relacionada con el sentido del recorrido del contorno al efectuar la integración siguiendo la regla del sacacorchos). Determinando el límite (11.22) en un mismo punto P para distintas direcciones de $\mathbf{n}$ obtenemos valores diferentes, los cuales sólo diferirán en el signo cuando los sentidos sean opuestos (la inversión del sentido de $\mathbf{n}$ equivale al cambio del sentido en que

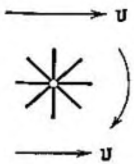


Fig. 11.12.

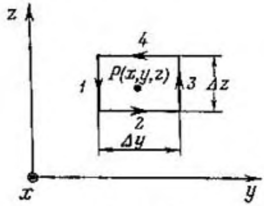


Fig. 11.13.

se recorre el contorno al efectuar la integración, lo que sólo hace que varíe el signo de la circulación). Para cierta dirección de la normal, la magnitud (11.22) en el punto dado resulta ser máxima.

De este modo, la magnitud (11.22) se comporta como la proyección de cierto vector sobre la dirección de la normal al plano del contorno a lo largo del cual se toma la circulación. El valor máximo de la magnitud (11.22) determina el módulo de este vector y la dirección de la normal positiva $\mathbf{n}$, con la cual se alcanza el máximo, da la dirección del vector. Este vector se llama *rotor* (o *rotación*) del vector $\mathbf{a}$. Se designa con el símbolo rot $\mathbf{a}$. Utilizando esta notación se puede escribir la expresión (11.22) en la forma

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_n = \lim_{S\to 0} \frac{C_a}{S} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_\Gamma \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (11.23)$$

Una idea clara del rotor de un vector $\mathbf{v}$ se puede obtener figurándose una pequeña y ligera rueda de paletas situada en un punto dado de un líquido que corre (fig. 11.12). En equellos sitios en que el rotor no es nulo, la rueda de paletas girará con tanta más velocidad cuanto mayor sea la magnitud de la proyección del rotor sobre el eje de dicha rueda.

La expresión (11.23) determina el vector rot $\mathbf{a}$. Esta definición es la más general y no depende del tipo de sistema de coordenadas. Para hallar la expresión de la proyección del vector rot $\mathbf{a}$ sobre los

ejes de un sistema de coordenadas cartesianas hay que determinar los valores de la magnitud (11.23) para las orientaciones de la superficie S en que la normal **n** a ella coincide con uno de los ejes x, y, z. Si, por ejemplo, **n** se dirige a lo largo del eje x, entonces (11.23) se transforma en $(\text{rot } \mathbf{a})_x$. El contorno Γ se encuentra en este caso en un plano paralelo al plano coordenado yz. Tomemos este contorno en forma de rectángulo de lados Δy y Δz (fig. 11.13); en esta figura el eje x está dirigido hacia nosotros; el sentido del recorrido que se indica en la figura está ligado con el sentido del eje x por medio de la regla del sacacorchos). El trozo *1* del contorno tiene sentido contrario al del eje z. Por eso a_l coincide en esta parte con $-a_z$. Razonando análogamente hallamos que a_l en los trozos *2*, *3* y *4* es igual respectivamente a a_y, a_z y $-a_y$. Por lo tanto, la circulación se puede representar en la forma

$$(a_{z3} - a_{z1})\,\Delta z - (a_{y4} - a_{y2})\,\Delta y, \tag{11.24}$$

donde a_{z3} y a_{z1} son los valores medios de a_z en los trozos *3* y *1* respectivamente, a_{y4} y a_{y2}, los valores medios de a_y en los trozos *4* y *2*.

La diferencia $a_{z3} - a_{z1}$ es el incremento del valor medio de a_z en el trozo Δz, al desplazarse este trozo en el sentido del eje y en Δy. En virtud de la pequeñez de Δy y Δz, este incremento se puede representar en la forma $(\partial a_z/\partial y)\,\Delta y$, en la que el valor de $\partial a_z/\partial y$ se toma en el punto P[1]). Análogamente, la diferencia $a_{y4} - a_{y2}$ se puede representar en la forma $(\partial a_y/\partial z)\,\Delta z$. Sustituyendo estas expresiones en (11.24) y sacando fuera de paréntesis el factor común, obtenemos la expresión de la circulación

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\Delta S,$$

en la que ΔS es el área del contorno. Dividiendo la circulación por ΔS hallamos la expresión de la proyección de rot **a** sobre el eje x:

$$(\text{rot } \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}. \tag{11.25}$$

Mediante razonamientos análogos se puede hallar que

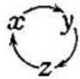
$$(\text{rot } \mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \tag{11.26}$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \tag{11.27}$$

Es fácil comprobar que cualquiera de las expresiones (11.25)—(11.27) se puede obtener de la anterior (para la (11.25) debe considerarse anterior la (11.27)) por medio de la llamada permutación

[1]) La inexactitud que admitimos aquí desaparece durante la contracción del contorno hacia el punto P que se realiza al pasar al límite.

cíclica de las coordenadas, es decir, de la sustitución de las coordenadas efectuada según el esquema



Así, el rotor del vector **a** se determina en el sistema de coordenadas cartesianas por la expresión siguiente:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \tag{11.28}$$

Luego indicaremos un procedimiento más elegante de escritura de esta expresión.

Teorema de Stokes. Conociendo el rotor del vector **a** en cada punto de cierta superficie S (que no es necesario que sea plana), se puede calcular la circulación de este vector a lo largo del contorno Γ que limita S (el contorno también puede no ser plano). Para esto se divide la superficie en elementos muy pequeños ΔS. En virtud de su pequeñez, estos elementos se pueden considerar planos. Por eso, de acuerdo con (11.23), la circulación del vector **a** a lo largo del contorno que limita ΔS se puede representar en la forma

$$\Delta C \approx (\operatorname{rot} \mathbf{a})_n \, \Delta S = \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{S}, \tag{11.29}$$

donde **n** es la normal positiva al elemento de superficie ΔS.

De acuerdo con la fórmula (11.21), efectuando la suma de la expresión (11.29) extendida a todos los elementos ΔS, obtenemos la circulación del vector **a** a lo largo del contorno Γ que limita S:

$$C = \sum \Delta C \approx \sum \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \Delta \underline{S}.$$

Realizando el paso al límite, con el cual todos los elementos ΔS tienden a cero (y su número aumenta indefinidamente), llegamos a la fórmula

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} \, d\mathbf{l} = \oint_{S} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\underline{S}. \tag{11.30}$$

La relación (11.30) se conoce con el nombre de *teorema de Stokes*. Su sentido consiste en que *la circulación del vector* **a** *a lo largo de un contorno arbitrario* Γ, *es igual al flujo del vector* rot **a** *a través de la superficie arbitraria* S *limitada por dicho contorno*.

Operador nabla. La escritura de las fórmulas del análisis vectorial se simplifica y facilita mucho introduciendo el operador vectorial diferencial que se representa con el símbolo ∇ (nabla) y se llama

operador nabla u *operador de Hamilton*. Se entiende por este operador un vector cuyos componentes son $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$. Por consiguiente,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{11.31}$$

Este vector no tiene sentido de por sí. Lo adquiere en combinación con una función escalar o vectorial a la cual multiplica simbólicamente. Así, si el vector ∇ se multiplica por un escalar φ, se obtiene el vector

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{11.32}$$

que es el gradiente de la función φ (véase (11.1)).

Del producto escalar del vector ∇ por un vector **a**, resulta el escalar

$$\nabla\mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{11.33}$$

que no es más que la divergencia del vector **a** (véase (11.14)).

Finalmente, si se efectúa el producto vectorial de ∇ por **a**, se obtiene un vector cuyos componentes: $[\nabla\mathbf{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \partial a_z/\partial y - \partial a_y/\partial z$, etc., coinciden con los componentes del rot **a** (véase (11.25)—(11.27)). Por lo tanto, con ayuda del determinante, el producto vectorial se puede escribir así

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{11.34}$$

De este modo existen dos procedimientos para representar el gradiente, la divergencia y el rotor:

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla\mathbf{a} \equiv \operatorname{div}\mathbf{a}, \quad [\nabla\mathbf{a}] \equiv \operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Las representaciones por medio de ∇ tienen una serie de ventajas, por eso las utilizaremos en adelante. Conviene acostumbrarse a identificar el símbolo $\nabla\varphi$ con las palabras «gradiente fi» (es decir, no «nabla fi», sino «gradiente fi»), el símbolo $\nabla\mathbf{a}$ con «divergencia a», y, finalmente, el símbolo $[\nabla\mathbf{a}]$ con «rotor a».

Cuando se utiliza el vector ∇ hay que recordar que es un operador diferencial que actúa sobre todas las funciones que están a su derecha. Por esto, al transformar las expresiones en que figura ∇ deben tenerse en cuenta tanto las reglas del álgebra vectorial como las reglas del cálculo diferencial. Por ejemplo, la derivada del producto de las funciones φ y ψ es

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'.$$

De acuerdo con esto

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi. \tag{11.35}$$

Análogamente,

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a} = \mathbf{a} \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{11.36}$$

El gradiente de cierta función φ es una función vectorial. Por lo tanto, se le pueden aplicar las operaciones de divergencia y rotor:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2)\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \tag{11.37}$$

(Δ es el operador de Laplace);

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0 \tag{11.38}$$

(se recordará que el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo).

Apliquemos las operaciones divergencia y rotor a la función $\operatorname{rot}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla[\nabla\mathbf{a}] = 0 \tag{11.39}$$

(el producto mixto de vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores que se multiplican[1]); si dos de estos vectores coinciden, el volumen del paralelepípedo es nulo):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla, [\nabla\mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a} \tag{11.40}$$

(hemos utilizado la fórmula $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$).

La relación (11.39) significa que el campo del rotor no tiene manantiales. Por consiguiente, las líneas del vector $[\nabla\mathbf{a}]$ no tienen principio ni fin. Precisamente por esta causa el flujo del vector a través de cualquier superficie S que se apoye en un contorno dado Γ resulta ser el mismo (véase la fórmula (11.30)).

En conclusión señalaremos que utilizando el operador ∇, a las fórmulas (11.15) y (11.30) se les puede dar la forma

$$\oint_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\mathbf{a}\cdot dV \text{ (teorema de Ostrogradski — Gauss)}, \tag{11.41}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla\mathbf{a}]\cdot d\mathbf{S} \text{ (teorema de Stokes)}. \tag{11.42}$$

---

[1]) Véase el § 2 del tomo 1.

§ 12. Circulación y rotor de un campo electrostático

En el § 6 explicamos que las fuerzas que actúan sobre una carga q en un campo electrostático son conservativas. Por consiguiente, el trabajo de estas fuerzas en cualquier camino cerrado Γ es nulo:

$$A = \oint_{\Gamma} q\mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Simplificando por q, obtenemos la relación

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0 \tag{12.1}$$

(compárese con (8.7)).

La integral de la parte izquierda de la fórmula (12.1) representa la circulación del vector $\mathbf{E}$ a lo largo del contorno Γ (véase (11.16)). De este modo, es característica del campo electrostático la circuns-



Fig. 12.1.

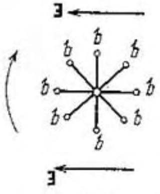


Fig. 12.2.

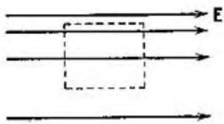


Fig. 12.3.

tancia de que la circulación del vector intensidad de este campo a lo largo de cualquier contorno cerrado sea nula.

Tomemos una superficie arbitraria S que se apoye en el contorno Γ, para el cual se calcula la circulación (fig. 12.1). De acuerdo con el teorema de Stokes (véase (11.42)), la integral del rotor $\mathbf{E}$ tomada sobre esta superficie es igual a la circulación del vector $\mathbf{E}$ a lo largo del contorno Γ:

$$\oint_{S} [\nabla\mathbf{E}]\, d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{12.2}$$

Como la circulación es igual a cero, llegamos a la conclusión de que

$$\oint_{S} [\nabla\mathbf{E}]\, d\mathbf{S} = 0.$$

La condición obtenida debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S que se apoye en el contorno arbitrario Γ. Esto sólo es posible si el rotor del vector $\mathbf{E}$ es nulo en cada punto del campo:

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0. \tag{12.3}$$

Por analogía con la rueda de paletas representada en la fig. 11.12, imaginémonos una «rueda de paletas» eléctrica formada por un casquillo ligero con rayos en cuyos extremos se encuentren cargas positivas q de igual magnitud (fig. 12.2; todo el aparato debe tener dimensiones pequeñas). En aquellos lugares del campo eléctrico en que el rotor **E** sea distinto de cero, esta rueda de paletas girará con tanta más aceleración, cuanto mayor sea la proyección del rotor sobre el eje de la misma. En el caso de un campo electrostático, este dispositivo imaginario no giraría cualquiera que fuese la orientación de su eje.

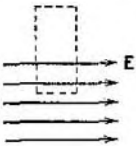


Fig. 12.4.

Así, la peculiaridad característica del campo electrostático es la de ser irrotacional. En el párrafo anterior explicamos que el rotor del gradiente de una función escalar es nulo (véase la fórmula (11.38)). Por eso la igualdad a cero del rotor **E** en cada punto, hace posible representar **E** en forma de gradiente de la función escalar φ llamada potencial. Esta representación se estudió ya en el § 8 (véase la fórmula (8.2); en esta fórmula el signo menos se tomó por razones físicas).

De la necesidad de observar la condición (12.1) se puede concluir de inmediato que la existencia de un campo electrostático de la forma representada en la fig. 12.3, es imposible. En efecto, para este campo la circulación a lo largo del contorno representado con línea de trazos sería distinta de cero, lo que contradice la condición (12.1). Tampoco es posible que un campo distinto de cero en un volumen limitado sea homogéneo en todo este volumen (fig. 12.4). En este caso la circulación a lo largo del contorno que se indica con línea de trazos sería distinta de cero.

§ 13. Teorema de Gauss

En el párrafo precedente se explicó a qué es igual el rotor de un campo electrostático. Ahora vamos a hallar la divergencia del campo. Con este fin consideraremos el campo de una carga puntual q y calcularemos el flujo del vector **E** a través de la superficie cerrada S que contiene dicha carga (fig. 13.1). En el § 5 demostramos que la cantidad de líneas del vector **E** que comienzan en una carga puntual $+q$ o que terminan en una carga $-q$ es numéricamente igual a q/ε_0.

De acuerdo con la fórmula (11.10), el flujo del vector **E** a través de cualquier superficie cerrada es igual al número de líneas que salen al exterior, es decir, que empiezan en la carga si ésta es positiva, y al número de líneas que penetran en el interior, o sea, que terminan en la carga, si ésta es negativa. Teniendo en cuenta que la cantidad de líneas que comienzan o terminan en una carga puntual

es numéricamente igual a q/ε_0, se puede escribir que

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{13.1}$$

El signo del flujo coincide con el de la carga q. La dimensión de los dos miembros de la igualdad (13.1) es la misma.

Supongamos ahora que dentro del recinto limitado por la superficie cerrada se encuentran N cargas puntuales $q_1, q_2, \ldots, q_N$. En virtud del principio de superposición, la intensidad $\mathbf{E}$ del campo creado por todas las cargas será igual a la suma de las intensidades $\mathbf{E}_i$ creadas por cada carga por separado: $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$. Por eso

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i\, d\mathbf{S}.$$

Cada una de las integrales que se encuentran bajo el signo de sumación es igual a q_i/ε_0. Por lo tanto,

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i. \tag{13.2}$$

La afirmación que acabamos de demostrar se llama *teorema de Gauss*. Este teorema dice que *el flujo del vector intensidad de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas encerradas por esta superficie, dividida por* ε_0.

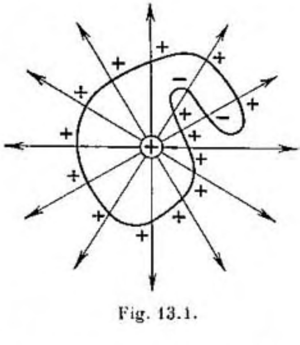


Fig. 13.1.

Cuando se estudian los campos creados por cargas macroscópicas (o sea, por cargas formadas por un número enorme de cargas elementales) se prescinde de la estructura discreta (discontinua) de estas cargas y se supone que están distribuidas en el espacio de un modo continuo, con densidad finita en todas partes. *La densidad volumétrica* ρ de la carga se determina, por analogía con la densidad de la masa, como la razón de la carga dq al volumen físicamente infinitesimal dV en que se encuentra confinada dicha carga:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \tag{13.3}$$

En este caso, por volumen físicamente infinitesimal se debe entender un volumen tal que, por una parte, sea suficientemente pequeño para que a densidad dentro de sus límites se pueda considerar igual, y por otra, sea suficientemente grande para que no pueda manifestarse el carácter discreto de la carga.

Conociendo la densidad de la carga en cada punto del espacio se puede hallar la carga total comprendida dentro de la superficie cerrada S. Para esto hay que calcular la integral de ρ extendida al volumen limitado por la superficie:

$$\sum q_i = \int_V \rho \, dV.$$

De esta forma, a la fórmula (13.2) puede dársele la forma

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV. \tag{13.4}$$

Sustituyendo, de acuerdo con (11.41), la integral de superficie por la de volumen, obtenemos

$$\int_V \nabla \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

La relación a que hemos llegado debe cumplirse para cualquier volumen V elegido arbitrariamente. Esto sólo es posible si los valores de las funciones subintegrales son iguales en cada punto del espacio. Por consiguiente, la divergencia del vector **E** está relacionada con la densidad de carga en el mismo punto por la igualdad

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \tag{13.5}$$

Esta igualdad expresa el teorema de Gauss en forma diferencial.

En el caso de un líquido en movimiento $\nabla \mathbf{v}$ da la potencia específica de los manantiales de líquido en el punto dado. Por analogía, se dice que las cargas son manantiales del campo eléctrico.

§ 14. Cálculo de los campos valiéndose del teorema de Gauss

El teorema de Gauss permite en una serie de casos hallar la intensidad del campo por medios mucho más simples que aplicando la fórmula (5.3) para la intensidad del campo de una carga puntual y el principio de superposición de los campos. Vamos a demostrar las posibilidades del teorema de Gauss basándonos en varios ejemplos útiles en el futuro. Antes de empezar el análisis de estos ejemplos introduciremos los conceptos de densidad superficial y lineal de carga.

Si la carga está concentrada en una delgada capa superficial portadora de la carga del cuerpo, la distribución de la carga en el espacio se puede caracterizar por medio de la *densidad superficial* σ,

que se determina por la expresión

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \qquad (14.1)$$

Aquí dq es la carga comprendida en una capa de área dS. Se entiende por dS un trozo de superficie físicamente infinitesimal.

Si la carga está distribuida por el volumen o la superficie de un cuerpo cilíndrico (uniformemente en cada sección), se utiliza la *densidad lineal de carga*

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad (14.2)$$

(dl es la longitud de un trozo de cilindro físicamente infinitesimal, y dq, la carga concentrada en dicho trozo).

Campo de un plano infinito cargado homogéneamente. Supongamos que la densidad superficial de carga es equivalente en todos los puntos del plano e igual a σ; para concretar, consideraremos que

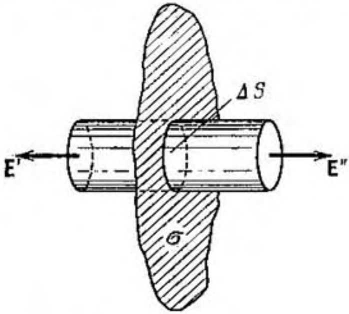


Fig. 13.2.

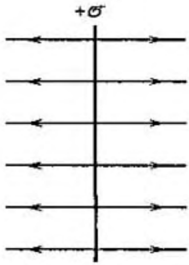


Fig. 14.2.

la carga es positiva. De las razones de simetría se infiere que la intensidad del campo en cualquier punto tiene dirección perpendicular al plano. En efecto, como el plano es infinito y está cargado homogéneamente, no hay motivo para que el vector **E** se desvíe a cualquier lado de la normal al plano. Es evidente también que en los puntos simétricos respecto al plano, la intensidad del campo será igual en magnitud y de sentido opuesto.

Figurémonos una superficie cilíndrica, con las generatrices perpendiculares y las bases, de magnitud ΔS, dispuestas simétricamente con respecto a dicho plano (fig. 14.1). En virtud de la simetría $E' = E'' = E$. Apliquemos a esta superficie el teorema de Gauss. El flujo a través de la parte lateral de la superficie estará ausente,

puesto que E_n es nula en cada uno de sus puntos. Para las bases E_n coincide con E. Por consiguiente, el flujo total a través de la superficie será $2E\,\Delta S$. Dentro del recinto limitado por la superficie se encuentra la carga $\sigma\,\Delta S$. De acuerdo con el teorema de Gauss debe cumplirse la condición

$$2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0},$$

de la cual

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{14.3}$$

El resultado que hemos obtenido no depende de la longitud del cilindro. Esto significa que a cualquier distancia del plano, la intensidad del campo es igual en magnitud. La forma de las líneas

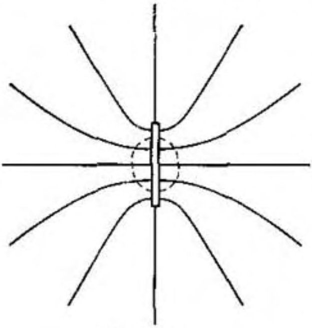


Fig. 14.3.

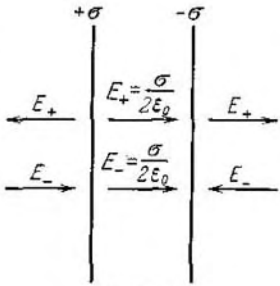


Fig. 14.4.

de intensidad se muestra en la fig. 14.2. Para un plano cargado negativamente el resultado es el mismo, con una sola diferencia de que el sentido del vector **E** y de las líneas de intensidad se invierte.

Si se toma un plano de dimensiones finitas, por ejemplo, una placa delgada con carga[1]), el resultado antes obtenido será válido para los puntos, cuya distancia a los bordes de la placa sea mucho mayor que la distancia a ella misma (en la fig. 14.3 la región de estos puntos está cercada por la curva de trazos). A medida que se aleja del plano o que se aproxima a sus bordes, este campo diferirá

[1]) En el caso de una placa, en la fórmula (14.3) debe entenderse por σ la carga concentrada en 1 m² de la misma en todo su espesor. En los cuerpos metálicos la carga se distribuye por la superficie externa. Por eso debe entenderse por σ la magnitud específica de la densidad de carga de las superficies que limitan la placa metálica.

cada vez más del campo del plano infinito cargado. El carácter del campo a grandes distancias es fácil figurárselo si se tiene en cuenta que a distancias que superen considerablemente las dimensiones de la placa, el campo creado por ella se puede considerar como el de una carga puntual.

Campo de dos planos con cargas de signos contrarios. El campo de dos planos infinitos, paralelos, con cargas de signos contrarios, de densidad superficial σ constante e igual en magnitud, se puede hallar como la superposición de los campos creados por cada uno de los planos por separado (fig. 14.4). En la región que hay entre los planos, los campos que se suman tienen el mismo sentido, de modo que la intensidad resultante es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (14.4)$$

Fuera del volumen limitado por los planos, los campos que se suman tienen sentidos opuestos, por lo que la intensidad resultante es nula.

De esta manera, resulta que el campo está concentrado entre los planos. La intensidad del campo en todos los puntos de esta región es igual en magnitud y sentido; por lo tanto, el campo es homogéneo. Las líneas de intensidad son un conjunto de rectas paralelas equidistantes.

Este resultado es también válido aproximadamente para planos de dimensiones finitas, si la distancia entre ellos es mucho menor que sus dimensiones lineales (condensador plano). En este caso sólo se observan desviaciones apreciables de la homogeneidad del campo en las proximidades de los bordes de las placas (fig. 14.5).



Fig. 14.5.

Campo de un cilindro de longitud infinita cargado. Supongamos que el campo lo crea una superficie cilíndrica infinita de radio R, cargada con la densidad superficial constante σ. De las razones de simetría se sigue que la intensidad del campo en cualquier punto debe estar dirigida a lo largo de una recta radial, perpendicular al eje del cilindro, y su magnitud puede depender únicamente de la distancia r a dicho eje. Figurémonos una superficie cilíndrica cerrada, de radio r y altura h (fig. 14.6), coaxial a la superficie cerrada. Para las bases del cilindro $E_n = 0$ y para la superficie lateral $E_n = E\ (r)$ (la carga se supone positiva). Por consiguiente, el flujo del vector $\mathbf{E}$ a través de la superficie considerada será igual a $E\ (r) \times \times 2\pi rh$. Si $r > R$, dentro de la superficie se encontrará la carga $q = \lambda h$ (λ es la densidad lineal de carga). Aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$E\ (r) \cdot 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}.$$

De donde

$$E(r)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad (r \geqslant R). \tag{14.5}$$

Si $r < R$, la superficie cerrada que se considera no contiene cargas, por lo que $E(r) = 0$.

De este modo, dentro de una superficie cilíndrica de longitud infinita cargada no existe campo. La intensidad del campo fuera de la superficie se determina por la densidad lineal de carga λ y la distancia r al eje del cilindro.

El campo de un cilindro cargado negativamente sólo se diferencia del campo del cilindro cargado positivamente en el sentido del vector $\mathbf{E}$.

De la fórmula (14.5) se deduce que, disminuyendo el radio R del cilindro (si permanece invariable la densidad lineal de carga λ),

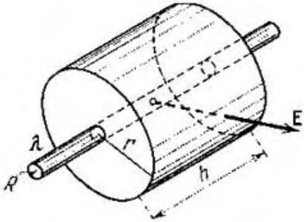


Fig. 14.6.

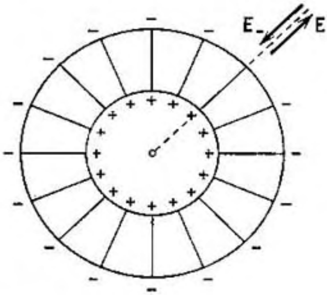


Fig. 14.7.

se puede obtener cerca de la superficie del cilindro un campo de intensidad muy grande.

Sustituyendo en (14.5) $\lambda = 2\pi R\sigma$ y suponiendo $r = R$, se obtiene para la intensidad del campo en la inmediación de la superficie del cilindro el valor

$$E(R)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{14.6}$$

Valiéndose del principio de superposición es fácil hallar el campo de dos superficies cilíndricas coaxiales con cargas de igual magnitud, pero de signos distintos, de densidad lineal λ (fig. 14.7). Dentro del cilindro menor y fuera del mayor, el campo está ausente. En el hueco entre los dos cilindros la magnitud de la intensidad del campo se determina por la fórmula (14.5). Esto es también válido para las superficies cilíndricas de longitud finita, si el hueco entre ellas es mucho menor que su longitud (condensador cilíndrico).

Sólo se observarán desviaciones sensibles respecto del campo de las superficies de longitud infinita en las proximidades de los extremos de los cilindros.

Campo de una superficie esférica cargada. El campo creado por una superficie esférica de radio R, cargada, con densidad superficial constante σ, será, evidentemente, central simétrico. Esto significa que la dirección del vector $\mathbf{E}$ en cualquier punto pasa por el centro de la esfera y la magnitud de la intensidad es función de la distancia r del centro de la esfera. Imaginemos una superficie de radio r concéntrica con la esfera cargada. Para todos los puntos de esta esfera $E_n = E(r)$. Si $r > R$, dentro de esta superficie se encuentra toda la carga q distribuida por la esfera. Por consiguiente,

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

de donde
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \geqslant R). \tag{14.7}$$

Una superficie esférica de radio r menor que R no contendrá cargas, por lo que para $r < R$ se obtiene $E(r) = 0$.

De este modo, dentro de una superficie esférica cargada, con densidad superficial constante σ, no existe campo. Fuera de esta superficie el campo es idéntico al de una carga puntual de la misma magnitud, situada en el centro de la esfera.

Aplicando el principio de superposición es fácil demostrar que el campo de dos superficies esféricas concéntricas (condensador esférico), que porten cargas de igual magnitud y de signos contrarios $+q$ y $-q$, está concentrado en el hueco entre ambas superficies y la magnitud de su intensidad se determina por la fórmula (14.7).

Campo de una esfera cargada volumétricamente. Sea una esfera de radio R cargada con la densidad volumétrica constante ρ. El campo, en este caso, tiene simetría central. Es fácil comprender que para el campo fuera de la esfera se obtiene el mismo resultado (véase la fórmula (14.7)) que en el caso de la esfera cargada superficialmente. Sin embargo, para los puntos que están dentro de la esfera el resultado será otro. Una superficie esférica de radio r ($r < R$) contendrá una carga igual a $\rho\cdot{}^4/_3\pi r^3$. Por eso el teorema de Gauss para dicha superficie se escribe como sigue:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,\frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

De aquí, sustituyendo ρ por $q/({}^4/_3\pi R^3)$, obtenemos

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\,r \quad (r \leqslant R). \tag{14.8}$$

Por lo tanto, dentro de la esfera la intensidad del campo crece linealmente con la distancia r del centro de la esfera. Fuera de la esfera la intensidad decrece según la misma ley que en el campo de una carga puntual.

CAPÍTULO II

CAMPO ELÉCTRICO EN LOS DIELÉCTRICOS

§ 15. Moléculas polares y no polares

Se llaman *dieléctricos* (o aisladores) los cuerpos incapaces de conducir la corriente eléctrica. En la naturaleza no existen aisladores perfectos. Todos los cuerpos, aunque sea en grado insignificante, conducen dicha corriente. Pero los cuerpos llamados dieléctricos la conducen $10^{15}-10^{20}$ veces peor que los denominados conductores.

Si un dieléctrico se introduce en un campo eléctrico, tanto el campo como el dieléctrico sufren variaciones importantes. Para comprender por qué ocurre esto debe tenerse en cuenta que en la composición de los átomos y moléculas entran núcleos con carga positiva y electrones con carga negativa.

Toda molécula es un sistema, cuya carga total es nula. Las dimensiones lineales de este sistema son muy pequeñas (del orden de varios angström[1])). En el § 10 establecimos que el campo creado por un sistema se determina por la magnitud y la orientación del momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{p}=\sum q_i\mathbf{r}_i \tag{16.1}$$

(la suma se extiende tanto a los electrones como a los núcleos). Es verdad que en la molécula los electrones se mueven, de manera que este momento varía durante todo el tiempo. Pero las velocidades de los electrones son tan grandes, que prácticamente se manifiesta el valor medio del momento (15.1). Por eso, en adelante entenderemos por momento dipolar de una molécula la magnitud

$$\mathbf{p}=\sum q_i\langle\mathbf{r}_i\rangle \tag{16.2}$$

(para los núcleos, en esta suma se toma, en vez de $\langle\mathbf{r}_i\rangle$, simplemente $\mathbf{r}_i$). En otras palabras, consideraremos que los electrones se encuentran, con relación a los núcleos, en reposo en ciertos puntos obtenidos tomando el valor medio de las posiciones de los electrones respecto del tiempo.

El comportamiento de una molécula en un campo eléctrico exterior también se determina por su momento dipolar. De esto podemos cerciorarnos calculando la energía potencial de la molécula en el campo exterior. Eligiendo el origen de coordenadas dentro de la molécula y aprovechando la pequeñez de $\langle\mathbf{r}_i\rangle$, representamos el

---

[1]) El angström (Å) es una unidad de longitud, muy conveniente en la física atómica, igual a 10^{-10} m.

potencial en el punto en que se halla la carga i-ésima en la forma

$$\varphi_i = \varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle,$$

donde φ es el potencial en el origen de coordenadas (véase la fórmula (11.2)). Entonces

$$W_p = \sum q_i\varphi_i = \sum q_i (\varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle) = \varphi \sum q_i + \nabla\varphi \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle.$$

Teniendo en cuenta que $\sum q_i = 0$, y sustituyendo $\nabla\varphi$ por $-\mathbf{E}$, obtenemos

$$W_p = -\mathbf{E} \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle = -\mathbf{pE} = -pE \cos\alpha.$$

Tomando la diferencial de esta expresión respecto de α, obtenemos para el momento de rotación la expresión (9.11), y derivando respecto de x llegamos a la fuerza (9.16).

De este modo, la molécula, tanto en relación con el campo creado por ella como con respecto a las fuerzas que experimenta en el campo exterior, es equivalente a un dipolo. La carga positiva de este dipolo es igual a la carga total de los núcleos y se encuentra en el «centro de gravedad» de las cargas positivas; la carga negativa es igual a la carga total de los electrones y se halla en el «centro de gravedad» de las cargas negativas.

En las moléculas simétricas (tales como H_2, O_2, N_2) en ausencia de campo eléctrico exterior, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden. Estas moléculas no tienen momento dipolar intrínseco y se denominan *no polares*. En las moléculas no simétricas (como, por ejemplo, CO, NH, HCl, etc.) los centros de gravedad de las cargas de signos distintos están separados entre sí. En este caso las moléculas poseen momento dipolar intrínseco y se llaman *polares*.

Bajo la acción de un campo eléctrico exterior las cargas de la molécula no polar se desplazan unas con relación a otras: las positivas en el sentido del campo y las negativas en el opuesto a éste. Como resultado la molécula adquiere un momento dipolar cuya magnitud, como demuestra la experiencia, es proporcional a la intensidad del campo. En el sistema racionalizado, el coeficiente de proporcionalidad se escribe en la forma $\varepsilon_0\beta$, donde ε_0 es la constante eléctrica y una magnitud llamada *polarizabilidad molecular*. Tomando en consideración que los sentidos de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{E}$ coinciden, se puede escribir

$$\mathbf{p} = \beta\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (15.3)$$

El momento dipolar tiene la dimensión $[q]$ L. Según la fórmula (5.3) la dimensión de ε_0E es $[q]\ L^{-2}$. Por lo tanto, la dimensión de la polarizabilidad molecular β tiene la dimensión L^3.

El proceso de polarización de la molécula no polar transcurre como si sus cargas positivas y negativas estuvieran ligadas entre sí por fuerzas elásticas. Por eso se dice que la molécula no polar se comporta en un campo exterior como un dipolo elástico.

La acción de un campo exterior sobre una molécula polar se reduce principalmente a la tendencia a volverla de tal modo que su momento dipolar se establezca según la dirección del campo. El campo exterior no influye prácticamente en la magnitud del momento dipolar. Por consiguiente, la molécula polar se comporta en el campo exterior como un dipolo rígido.

§ 16. Polarización de los dieléctricos

Por lo general, en ausencia del campo eléctrico exterior, los momentos dipolares de las moléculas de un dieléctrico son nulos (moléculas polares) o están distribuidos direccionalmente en el espacio de un modo caótico (moléculas polares). En ambos casos el momento dipolar total del dieléctrico es nulo[1]).

Bajo la acción del campo exterior, el dieléctrico se polariza. Esto significa que el momento dipolar resultante del dieléctrico se hace distinto de cero. Como magnitud característica del grado de polarización del dieléctrico es natural que se tome el momento dipolar de la unidad de volumen. Si el campo o el dieléctrico (o ambos) no son homogéneos, el grado de polarización en distintos puntos del dieléctrico será diferente. Para caracterizar la polarización en un punto dado hay que separar un volumen físicamente infinitesimal ΔV que contenga dicho punto, hallar la suma $\sum_{\Delta V} \mathbf{p}$ de los momentos de las moléculas comprendidas en este volumen y tomar la relación

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}. \qquad (16.1)$$

La magnitud vectorial **P**, determinada por la fórmula (16.1), se llama *polarización del dieléctrico*.

El momento dipolar **p** tiene la dimensión $[q]$ L. Por consiguiente, la dimensión de **P** será $[q]\,\mathrm{L}^{-2}$, es decir, coincide con la dimensión de $\varepsilon_0\mathbf{E}$ (véase la fórmula (5.3)).

En los dieléctricos isótropos de cualquier tipo la polarización está ligada con la intensidad del campo en el mismo punto por la simple relación:

$$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad (16.2)$$

---

1) En el § 23 conoceremos cuerpos que pueden poseer momento dipolar en ausencia del campo exterior.

en la que $\varkappa$ es una magnitud independiente de **E** llamada *susceptibilidad dieléctrica del dieléctrico*[1]). Ya se ha dicho antes que **P** y ε_0**P** tienen la misma dimensión. Por consiguiente, $\varkappa$ es una magnitud adimensional.

En el sistema de Gauss la fórmula (16.2) tiene la forma

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}. \qquad (16.3)$$

Para los dieléctricos constituidos por moléculas no polares la fórmula (16.2) se deduce de los simples razonamientos siguientes. Dentro de los límites del volumen ΔV se encuentra una cantidad de moléculas igual a $n\,\Delta V$, donde n es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen. Cada uno de los momentos **p** se determina en este caso por la fórmula (15.3). Por lo tanto,

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p} = n\Delta V \beta \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Dividiendo esta expresión por ΔV, obtenemos la polarización $\mathbf{P} = n\beta\varepsilon_0\mathbf{E}$. Finalmente, introduciendo la designación $\varkappa = n\beta$, llegamos a la fórmula (16.2).

En el caso de los dieléctricos construidos con moléculas polares, a la acción orientadora del campo exterior se opone el movimiento térmico de las moléculas, que tiende a dispersar sus momentos dipolares en todas las direcciones. Como resultado se establece cierta orientación predominante de los momentos dipolares de las moléculas en la dirección del campo. El cálculo estadístico correspondiente demuestra, de acuerdo con la experiencia, que la polarización es proporcional a la intensidad del campo, es decir, conduce a la fórmula (16.2). La susceptibilidad dieléctrica de estos dieléctricos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta.

En los cristales iónicos las moléculas aisladas pierden su aislamiento. El cristal es como una molécula gigante. La red de un cristal iónico se puede considerar como dos redes insertas entre sí, una de las cuales está formada por los iones positivos y la otra por los negativos. Cuando sobre los iones del cristal actúa un campo exterior, ambas redes se desplazan la una respecto de la otra, lo que hace que se polarice el dieléctrico. En este caso la polarización

---

[1]) En los dieléctricos anisótropos los sentidos de **P** y **E** no coinciden en general. En este caso la relación entre **P** y **E** se define por las fórmulas

$$P_x = \varepsilon_0 (\varkappa_{xx}E_x + \varkappa_{xy}E_y + \varkappa_{xz}E_z),$$
$$P_y = \varepsilon_0 (\varkappa_{yx}E_x + \varkappa_{yy}E_y + \varkappa_{yz}E_z),$$
$$P_z = \varepsilon_0 (\varkappa_{zx}E_x + \varkappa_{zy}E_y + \varkappa_{zz}E_z).$$

El conjunto de las nueve magnitudes $\varkappa_{ik}$ forma un tensor simétrico de 2º rango llamado *tensor de susceptibilidad dieléctrica* (compárese con la fórmula (40.3) del tomo 1º). Este tensor caracteriza las propiedades eléctricas del dieléctrico anisótropo.

está ligada con la intensidad del campo por medio de la relación (16.2). Hay que advertir que la dependencia lineal entre **E** y **P** que describe la fórmula (16.2) sólo tiene lugar en los campos no demasiado intensos (una observación análoga se refiere a la fórmula (15.3).

§ 17. Campo dentro de un dieléctrico

Las cargas que entran en la composición de las moléculas de un dieléctrico se llaman *ligadas*. Bajo la acción de un campo, las cargas ligadas sólo pueden desplazarse un poco de sus posiciones de equilibrio: estas cargas no pueden abandonar los límites de la molécula de cuya composición forman parte.

A las cargas que, aunque se encuentran dentro de los límites del dieléctrico, no entran en la composición de sus moléculas, así como las cargas situadas fuera de aquellos límites, las llamaremos, siguiendo a los razonamientos de los físicos soviéticos L. D. Landáu y E. M. Lifshits[1]), *extrañas*[2]).

El campo que hay dentro del dieléctrico es la superposición del campo $\mathbf{E}_{ext}$ creado por las cargas extrañas, y el campo $\mathbf{E}_{lig}$ de las cargas ligadas. El campo resultante se llama *microscópico* (o *verdadero*):

$$\mathbf{E}_{micro} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{lig}. \tag{17.1}$$

El campo microscópico varía mucho dentro de los límites de las distancias intermoleculares. A causa del movimiento de las cargas ligadas el campo $\mathbf{E}_{micro}$ también varía con el tiempo. En el estudio macroscópico no se descubren estas variaciones. Por eso, como característica del campo se utiliza el valor de la magnitud (17.1) promediado por un volumen físicamente infinitesimal:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{micro} \rangle = \langle \mathbf{E}_{ext} \rangle + \langle \mathbf{E}_{lig} \rangle.$$

En adelante el campo promediado de las cargas extrañas lo designaremos por $\mathbf{E}_0$, y el campo promediado de las cargas ligadas, por $\mathbf{E}'$. Respectivamente, llamaremos *campo macroscópico* la magnitud

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \tag{17.2}$$

La polarización **P** es una magnitud macroscópica. Por consiguiente, en la relación (16.2) debe entenderse por **E** la intensidad determinada por la fórmula (17.2)

[1]) Véase *L. D. Landáu, E. M. Lifshits*, «Electrodinámica de los medios continuos», Editorial «Gostejizdat», 1957, pág. 57, (en ruso).

[2]) Estas cargas se suelen llamar libres. Pero esta denominación es extremadamente desafortunada, ya que en una serie de casos las cargas extrañas no son, ni mucho menos, libres.

En ausencia de dieléctricos (es decir, en el «vacío») el campo macroscópico es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E}_{ext} \rangle.$$

Precisamente esta magnitud es la que debe entenderse por **E** en la fórmula (13.5).

Si las cargas extrañas están en reposo, el campo definido por la expresión (17.2) tiene las mismas propiedades que el campo electrostático en el vacío. En particular, este campo se puede caracterizar por medio del potencial φ, ligado con la intensidad (17.2) por las relaciones (8.2) y (8.6).

§ 18. Cargas volumétricas y superficiales ligadas

Cuando un dieléctrico no está polarizado, las densidades volumétrica ρ' y superficial σ' de cargas ligadas son nulas. Como resultado de la polarización la densidad superficial, y en algunos casos también la volumétrica, de cargas ligadas se hace distinta de cero.

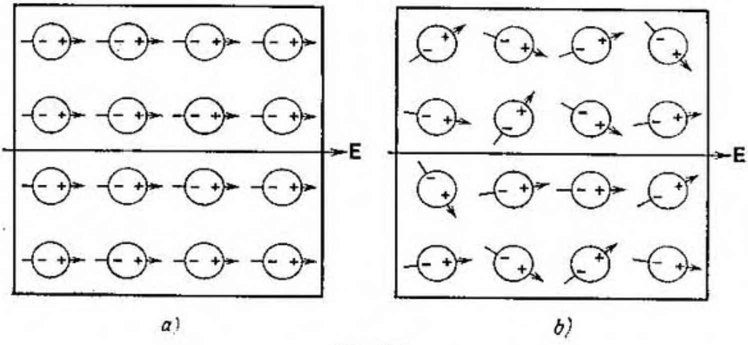


Fig. 18.1.

La fig. 18.1 representa esquemáticamente un dieléctrico polarizado de moléculas no polares (a) y polares (b). Por la figura se ve, que la polarización va acompañada de la aparición en una delgada capa superficial del dieléctrico de un exceso de cargas ligadas de un signo. Si la componente normal de la intensidad del campo **E** para una porción dada de superficie es distinta de cero, bajo la acción del campo, las cargas de un signo se alejan hacia dentro y las de otro signo salen afuera.

Entre la polarización **P** y la densidad superficial de cargas ligadas σ' existe una relación simple. Para hallarla consideremos una

lámina planoparalela infinita, de dieléctrico homogéneo, situada en un campo eléctrico uniforme (fig. 18.2). Separemos mentalmente en la lámina un elemento de volumen en forma de cilindro muy delgado con las generatrices paralelas a **E** en el dieléctrico y con las bases, de área ΔS, coincidentes con las superficies de la lámina.

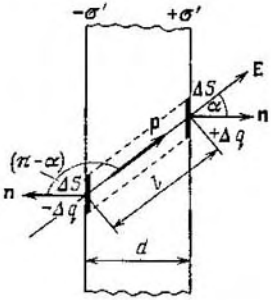


Fig. 18.2.

La magnitud de este volumen será

$$\Delta V = l\,\Delta S\cos\alpha,$$

donde l es la distancia entre las bases del cilindro, y α, el ángulo entre el vector **E** y la normal exterior a la superficie del dieléctrico cargada positivamente. El volumen ΔV tiene un momento dipolar eléctrico cuya magnitud es

$$P\,\Delta V = Pl\,\Delta S\cos\alpha$$

(P es el módulo de polarización).

Desde el punto de vista macroscópico, el volumen que examinamos es equivalente a un dipolo formado por las cargas $+\sigma'\,\Delta S$ y $-\sigma'\,\Delta S$ que se encuentran a la distancia l una de otra. Por eso su momento eléctrico se puede representar en la forma $\sigma'\,\Delta Sl$. Igualando entre sí las dos expresiones del momento eléctrico, obtenemos

$$Pl\,\Delta S\cos\alpha = \sigma'\,\Delta Sl.$$

De aquí se deduce la relación buscada entre σ' y **P**:

$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n, \qquad (18.1)$$

en la que P_n es la proyección de la polarización sobre la normal exterior a la superficie correspondiente. Para la superficie derecha, en la fig. 18.2, $P_n > 0$ y, respectivamente, σ' es positiva para ella; en el caso de la superficie izquierda, $P_n < 0$ y, respectivamente, σ' es negativa para ella.

Expresando, de acuerdo con (16.2), **P** por medio de $\varkappa$ y **E**, llegamos a la fórmula

$$\sigma' = \varkappa\varepsilon_0 E_n, \qquad (18.2)$$

en la que E_n es la componente normal de la intensidad del campo dentro del dieléctrico. Según (18.2), en aquellos sitios donde las líneas de intensidad salen del dieléctrico ($E_n > 0$), en la superficie aparecen cargas ligadas positivas, y allí donde las líneas de intensidad entran en el dieléctrico ($E_n < 0$), se manifiestan cargas superficiales negativas.

Las fórmulas (18.1) y (18.2) son también válidas en el caso más

general de un dieléctrico no homogéneo de forma arbitraria que se encuentra en un campo eléctrico no uniforme. Por P_n y E_n debe entenderse en este caso la componente normal del vector correspondiente tomada en una inmediata proximidad al elemento de superficie para el cual se determina σ'.

Pasemos ahora a hallar la densidad de las cargas ligadas que surgen en el interior de un dieléctrico no homogéneo. Consideremos en un dieléctrico isótropo no homogéneo, de moléculas no polares, una pequeña superficie imaginaria ΔS (fig. 18.3). Supongamos que en la unidad de volumen del dieléctrico hay n partículas iguales de carga $+e$ y n partículas iguales de carga $-e$. En el pequeño entorno de la superficie ΔS el campo eléctrico y el dieléctrico se pueden considerar homogéneos. Por eso todas las cargas positivas que se encuentran cerca de ΔS, al conectar el campo se desplazarán, en el sentido de **E**, una distancia igual a l_1, y todas las cargas negativas se desplazarán, en el sentido contrario, una distancia igual a l_2 (véase la fig. 18.3). Con esto, a través de la superficie ΔS pasa, en el sentido de la normal a ella, cierta cantidad de cargas de un signo (positivas si $\alpha < \pi/2$ o negativas si $\alpha > \pi/2$) y, en el sentido opuesto a **n**, cierta cantidad de cargas del otro signo (negativas si $\alpha < \pi/2$ o positivas si $\alpha > \pi/2$). La superficie ΔS la cruzan todas las cargas $+e$ que antes de conectar el campo se encontraban de ella a una distancia no mayor que $l_1 \cos\alpha$, es decir, todas las cargas $+e$ contenidas en un cilindro oblicuo de volumen $l_1\,\Delta S \cos\alpha$. El número de estas cargas es igual a $nl_1\,\Delta S\cos\alpha$, y la carga transportada por ellas en el sentido de la normal a la superficie es igual a $enl_1\,\Delta S\cos\alpha$ (si $\alpha > \pi/2$, la carga transportada en el sentido de la normal a expensas del desplazamiento de las cargas $+e$, será negativa). Análogamente, la superficie ΔS la atravesarán todas las cargas $-e$ comprendidas en el volumen $l_2\,\Delta S\cos\alpha$. Estas cargas transportan en el sentido de la normal a la superficie una carga igual a $enl_2\,\Delta S\cos\alpha$ (por la fig. 18.3 se ve que si $\alpha < \pi/2$, las cargas $-e$ transportarán a través de ΔS, en el sentido opuesto a **n**, una carga $-enl_2\,\Delta S\cos\alpha$, equivalente al transporte de carga $enl_2\,\Delta S\cos\alpha$ en el sentido de **n**).

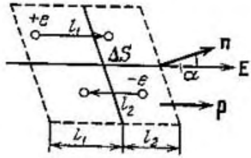


Fig. 18.3.

Así, al conectar el campo, a través de la superficie ΔS es transportada en el sentido de la normal a ella la carga

$$\Delta q' = enl_1\,\Delta S\cos\alpha + enl_2\,\Delta S\cos\alpha = en\,(l_1 + l_2)\,\Delta S\cos\alpha.$$

La suma $l_1 + l_2$ es la distancia l en la cual se desplazan una respecto de otra las cargas ligadas positivas y negativas que hay en el die-

léctrico. Como resultado de este desplazamiento cada par de cargas adquiere el momento dipolar $p = el = e(l_1 + l_2)$. El número de estos pares en la unidad de volumen es igual a n. Por consiguiente, el producto $e(l_1 + l_2)\,n = eln = pn$ da el módulo de polarización P. De este modo, la carga que, cuando se conecta el campo, pasa a través de la superficie ΔS en el sentido de la normal a elle es

$$\Delta q' = P\,\Delta S \cos\alpha.$$

Como el dieléctrico es isótropo, los sentidos de los vectores **E** y **P** coinciden (véase la fig. 18.3). Por lo tanto, α es el ángulo entre los vectores **P** y **n**, en virtud de lo cual se puede escribir que

$$\Delta q' = \mathbf{Pn}\,\Delta S.$$

Pasando de las deltas a las diferenciales, obtenemos

$$dq' = \mathbf{Pn}\,dS = \mathbf{P}\,d\mathbf{S}.$$

Hemos hallado la carga ligada dq' que, al conectar el campo, pasa a través del elemento de superficie dS en el sentido de la normal a ella; **P** es la polarización que se produce bajo la acción del campo en el sitio en que se encuentra la superficie dS.

Imaginemos dentro del dieléctrico una superficie cerrada S. Al conectar el campo esta superficie será atravesada por la carga ligada q' que sale al exterior,

$$q'_{\text{sal}} = \oint_S dq' = \oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{S}$$

(en el caso de superficies cerradas convinimos tomar la normal exterior a las superficies dS). Como resultado, en el volumen limitado por la superficie S se produce una carga ligada excesiva

$$q'_{\text{exc}} = -q'_{\text{sal}} = -\oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{S} = -\Phi_P \qquad (18.3)$$

(Φ_P es el flujo del vector **P** a través de la superficie S).

Introduciendo la densidad volumétrica de cargas ligadas ρ', se puede escribir

$$q'_{\text{exc}} = \int_V \rho'\,dV$$

(la integral se toma sobre el volumen limitado por la superficie S). De este modo llegamos a la fórmula

$$\int_V \rho'\,dV = -\oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{S}.$$

Transformamos la integral de superficie según el teorema de Ostrogradski—Gauss (véase (11.41)). Como resultado se obtiene la relación

$$\int_V \rho' \, dV = -\int_V \nabla \mathbf{P} \, dV.$$

Esta relación debe cumplirse para cualquiera que sea el volumen V que se elija arbitrariamente, lo que sólo es posible si en cada punto dieléctrico se cumple la igualdad

$$\rho' = -\nabla \mathbf{P}. \qquad (18.4)$$

Por consiguiente, la densidad de cargas ligadas es igual a la divergencia de la polarización **P** tomada con signo contrario.

Hemos obtenido (18.4) considerando un dieléctrico de moléculas no polares. Pero esta fórmula es también válida para los dieléctricos de moléculas polares.

A la fórmula (18.4) se le puede dar una interpretación gráfica. Los puntos con $\nabla\mathbf{P}$ positiva sirven de manantiales de campo del

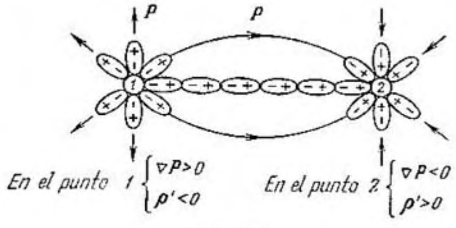


Fig. 18.4.

vector **P**; las líneas **P** divergen desde estos puntos (fig. 18.4). Los puntos con $\nabla\mathbf{P}$ negativa sirven de sumideros de campo del vector **P** y las líneas **P** convergen hacia estos puntos. Al polarizarse el dieléctrico las cargas positivas ligadas se desplazan en el sentido del vector **P**, es decir, en el de las líneas **P**, y las cargas negativas ligadas se desplazan en el sentido contrario (en la figura, las cargas ligadas pertenecientes a moléculas aisladas están rodeadas por óvalos). Como resultado, en los sitios con $\nabla\mathbf{P}$ positiva se origina un exceso de cargas negativas ligadas, y en los lugares con $\nabla\mathbf{P}$ negativa, un exceso de cargas positivas ligadas.

Las cargas ligadas se diferencian de las extrañas únicamente en que no pueden abandonar los límites de las moléculas, en cuya composición entran. En lo demás sus propiedades son las mismas que tienen todas las cargas restantes. En particular, hacen las

veces de manantiales de campo eléctrico. Por eso, en el caso en que la densidad de cargas ligadas ρ' es distinta de cero, la fórmula (13.5) se puede escribir en la forma

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho'). \tag{18.5}$$

Aquí ρ es la densidad de cargas extrañas.

Sustituyendo en (18.4) la expresión (16.2) para **P** y aplicando la fórmula (11.36), obtenemos el resultado

$$\rho' = -\nabla(\varkappa\varepsilon_0 \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \nabla(\varkappa \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 (\mathbf{E}\nabla\varkappa + \varkappa\nabla \mathbf{E}).$$

Sustituyendo $\nabla \mathbf{E}$ de acuerdo con (18.5), llegamos a la ecuación

$$\rho' = -\varepsilon_0 \mathbf{E} \nabla\varkappa - \varkappa\rho - \varkappa\rho'.$$

De aquí

$$\rho' = -\frac{1}{1+\varkappa} (\varepsilon_0 \mathbf{E}\nabla\varkappa + \varkappa\rho). \tag{18.6}$$

De la fórmula (18.6) se infiere que la densidad volumétrica de cargas ligadas puede ser distinta de cero en dos casos: 1) si el dieléctrico no es homogéneo ($\nabla\varkappa \neq 0$), 2) si en el sitio dado del dieléctrico la densidad de cargas extrañas es distinta de cero ($\rho \neq 0$).

En caso de que dentro del dieléctrico no haya cargas extrañas, la densidad volumétrica de cargas ligadas será

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{1+\varkappa} \mathbf{E}\nabla\varkappa. \tag{18.7}$$

§ 19. Vector de desplazamiento eléctrico

En el párrafo anterior hemos indicado que de manantiales de campo sirven no sólo las cargas extrañas, sino también las ligadas. De acuerdo con esto

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho'). \tag{19.1}$$

(véase (18.5)). La fórmula (19.1) es poco apta para hallar el vector **E**, ya que expresa las propiedades de la incógnita **E** por medio de las cargas ligadas, las cuales, a su vez, vienen determinadas por la incógnita **E** (véanse (18.2) y (18.6)).

El cálculo de los campos se simplifica en muchos casos si se introduce una magnitud auxiliar, cuyos manantiales sólo son cargas extrañas ρ. Para establecer la forma de esta magnitud se sustituye en (19.1) la expresión de ρ' (18.4):

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \mathbf{P}).$$

De aquí se sigue que

$$\nabla (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \tag{19.2}$$

(hemos introducido ε_0 bajo el signo ∇). La expresión que en (19.2) figura entre paréntesis es la magnitud buscada. Esta magnitud se designa por **D** y recibe el nombre de desplazamiento eléctrico (o inducción eléctrica).

Así, pues, se llama *desplazamiento eléctrico* (o *inducción eléctrica*) la magnitud determinada por la relación

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{19.3}$$

Sustituyendo aquí la expresión de **P** (16.2), obtenemos

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varkappa \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \mathbf{E}. \tag{19.4}$$

La magnitud adimensional

$$\varepsilon = 1 + \varkappa \tag{9.5}$$

se denomina *permitividad relativa* o simplemente *permitividad del medio*[1]). De este modo, la relación (19.4) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \tag{19.6}$$

Según (19.6) el vector **D** es proporcional al **E**. Recordaremos que estamos estudiando dieléctricos isótropos. En los dieléctricos anisótropos los vectores **E** y **D**, en general, no son colineales.

De acuerdo con las fórmulas (5.3) y (19.6) el desplazamiento eléctrico del campo de una carga puntual en el vacío es

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \tag{19.7}$$

De unidad de desplazamiento eléctrico sirve el culombio por metro cuadrado (C/m²).

Según (19.2)

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \tag{19.8}$$

Integrando esta relación respecto del volumen arbitrario V obtenemos:

$$\int_V \nabla \mathbf{D}\, dV = \int_V \rho\, dV.$$

Transformamos el primer miembro según el teorema de Ostrogradski—Gauss (véase (11.4)):

$$\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV. \tag{19.9}$$

A la izquierda figura Φ_D, o sea, el flujo del vector **D** a través de la superficie cerrada S, y a la derecha, la suma de las cargas extrañas $\sum q_i$ confinadas dentro de esta superficie. Por eso la igualdad (19.9)

[1]) En electrotecnia se introduce la llamada permitividad absoluta $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$. Pero esta magnitud carece de sentido físico y nosotros no la utilizaremos.

se puede representar en la forma

$$\Phi_D = \sum q_i. \tag{18.10}$$

Las fórmulas (19.9) y (19.10) expresan el teorema de Gauss para el vector **D**: *el flujo de desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas extrañas comprendidas dentro de dicha superficie.*

En el vacío $\mathbf{P} = 0$, de manera que la magnitud **D** determinada por la expresión (19.3) se convierte en $\varepsilon_0\mathbf{E}$ y las fórmulas (19.9) y (19.10) se transforman en las (13.4) y (13.2).

La unidad de flujo del vector de desplazamiento eléctrico es el culombio. Según (19.10), una carga de 1 C crea a través de la superficie que la abarca un flujo de desplazamiento de 1 C.

El campo del vector **D** se puede representar valiéndose de las líneas de desplazamiento eléctrico (que para abreviar llamaremos líneas de desplazamiento), cuyo sentido y densidad se determinan exactamente lo mismo que los de las líneas del vector **E** (véase el § 5). Las líneas del vector **E** pueden empezar y terminar tanto en las cargas extrañas como en las ligadas. De manantial de campo del vector **D** sólo sirven las cargas extrañas. Por eso, las líneas de desplazamiento pueden empezar o terminar únicamente en las cargas extrañas. Por los puntos en que se encuentran las cargas ligadas, las líneas de desplazamiento pasan sin interrumpirse.

La inducción eléctrica [1]) se determina en el sistema de Gauss por la relación

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{19.11}$$

La sustitución en ella del valor de **P** (16.3), da

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathbf{E}. \tag{19.12}$$

La magnitud

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa \tag{19.13}$$

se denomina *permitividad*. Introduciendo esta magnitud en la fórmula (19.12), se obtiene

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{19.14}$$

En el sistema de Gauss la inducción eléctrica en el vacío coincide con la intensidad del campo **E**. Por consiguiente, la inducción eléctrica del campo de una carga puntual en el vacío se determina por la fórmula (5.4).

De acuerdo con la fórmula (19.7), el desplazamiento eléctrico originado por una carga de 1 C a la distancia de 1 m es $D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 1^2} = \frac{1}{4\pi}$ C/m².

En el sistema de Gauss la inducción eléctrica en este caso es

$$D = \frac{q}{r^2} = \frac{3\cdot 10^9}{10^4} = 3\cdot 10^5 \text{ unid. CGSE}.$$

Por lo tanto, 1 C/m² corresponde a $4\pi\cdot 3\cdot 10^5$ unid. CGSE de inducción eléctrica.

---

[1]) El término «desplazamiento eléctrico» no se aplcia a la magnitud (19.12).

En este mismo sistema las expresiones del teorema de Gauss tienen la forma

$$\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho\, dV, \qquad (19.15)$$

$$\Phi_D = 4\pi \sum q_i. \qquad (19.16)$$

Según (19.16) la carga de 1 C crea un flujo del vector de inducción eléctrica igual a $4\pi\ q = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE. Por consiguiente, entre las unidades de flujo del vector **D** existe la relación

$$1\ \text{C} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{unid. CGSE de flujo}.$$

§ 20. Ejemplos de cálculo del campo en los dieléctricos

Para aclarar el sentido de las magnitudes **D** y ε, vamos a examinar varios ejemplos de campos en los dieléctricos.

Campo dentro de una placa plana. Consideremos dos planos paralelos infinitos con cargas de signos contrarios. Supongamos que el campo que estos planos crean en el vacío se caracteriza por la intensidad $\mathbf{E}_0$ y el desplazamiento $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$. En este campo se introduce una placa de material dieléctrico homogéneo e isótropo y se coloca como muestra la fig. 20.1. Bajo la acción del campo se polariza el dieléctrico y en sus superficies aparecen cargas ligadas, cuya densidad es σ'. Dichas cargas crean dentro de la placa un campo homogéneo de intensidad, según la fórmula (14.4), $E' = \sigma'/\varepsilon_0$. Fuera del dieléctrico, en este caso, $E' = 0$. La intensidad del campo E_0 es igual a σ/ε_0. Estos dos campos tienen sentidos contrapuestos entre sí, por consiguiente, dentro del dieléctrico

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma'). \qquad (20.1)$$

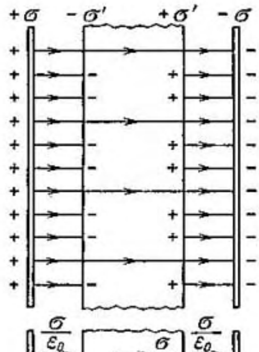


Fig. 20.1.

Fuera del dieléctrico $E = E_0$.

La polarización del dieléctrico está condicionada por el campo (20.1). Este campo es perpendicular a las superficies de la placa. Por eso, $E_n = E$ y, de acuerdo con (18.2), $\sigma' = \varkappa \varepsilon_0 E$. Sustituyendo este valor en la fórmula (20.1), obtenemos

$$E = E_0 - \varkappa E,$$

de donde

$$E=\frac{E_0}{1+\varkappa}=\frac{E_0}{\varepsilon}. \tag{20.2}$$

Así, en el caso considerado, la permitividad ε indica en cuántas veces se debilita el campo dentro del dieléctrico.

Multiplicando (20.2) por $\varepsilon_0\varepsilon$ se obtiene el desplazamiento eléctrico dentro de la placa

$$D=\varepsilon_0\varepsilon E=\varepsilon_0 E_0=D_0. \tag{20.3}$$

De este modo, el desplazamiento eléctrico dentro de la placa coincide con el desplazamiento eléctrico del campo exterior D_0. Sustituyendo en (20.3) E_0 por σ/ε_0, obtenemos que

$$D=\sigma. \tag{20.4}$$

Para hallar σ' expresamos en (20.2) E y E_0 por medio de las densidades de cargas

$$\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma-\sigma')=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

De aquí

$$\sigma'=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma. \tag{20.5}$$

La fig. 20.1 se ha dibujado suponiendo que $\varepsilon=3$. De acuerdo con esto, la densidad de líneas **E** dentro del dieléctrico es tres veces menor que fuera de la placa. Las líneas están trazadas a iguales distancias una de otra, puesto que el campo es homogéneo. En este caso σ' se puede hallar sin recurrir a la fórmula (20.5). En efecto, como la intensidad del campo dentro de la placa es tres veces menor que fuera de ella, de las tres líneas de intensidad que empiezan (o terminan) en cargas extrañas, dos deben terminar (o, respectivamente, empezar) en cargas ligadas. De aquí se infiere que la densidad de cargas ligadas debe ser igual a 2/3 de la densidad de cargas extrañas.

En el sistema de Gauss la intensidad E' que crean las cargas ligadas σ', es igual a $4\pi\sigma'$. Por eso la relación (20.1) tiene la forma

$$E=E_0-E'=E_0-4\pi\sigma'.$$

La densidad superficial σ' está ligada con la intensidad E por medio de la relación $\sigma'=\varkappa E_n$. Por lo tanto, se puede escribir que

$$E=E_0-4\pi\varkappa E.$$

De aquí

$$E=\frac{E_0}{1+4\pi\varkappa}=\frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto, la permitividad ε, lo mismo que la ε en el SI, indica en cuántas veces se debilita el campo dentro del dieléctrico. Por consiguiente, los valores

de ε en el SI y en el sistema de Gauss coinciden. De aquí, tomando en consideración (19.5) y (19.13), concluimos que la susceptibilidad dieléctrica en el sistema de Gauss ($\varkappa_{SG}$) y en el SI ($\varkappa_{SI}$) se diferencian entre sí por el factor 4π:

$$\varkappa_{SI} = 4\pi\varkappa_{SG}. \tag{20.6}$$

Campo dentro de una capa esférica. Rodeemos una esfera cargada, de radio R, con una capa esférica concéntrica de material dieléctrico homogéneo e isótropo (fig. 20.2). En la superficie interna de la capa aparecerá la carga ligada q_1' distribuida con la densidad σ_1' ($q_1' = 4\pi R_1^2\sigma_1'$), y en la exterior, la carga q_2' distribuida con la densidad σ_2' ($q_2' = 4\pi R_2^2\sigma_2'$). El signo de la carga q_2' coincidirá con el de la carga q de la esfera y el signo de q_1' será el contrario a aquél. Las cargas q_1' y q_2' crean a la distancia r, mayor respectivamente que

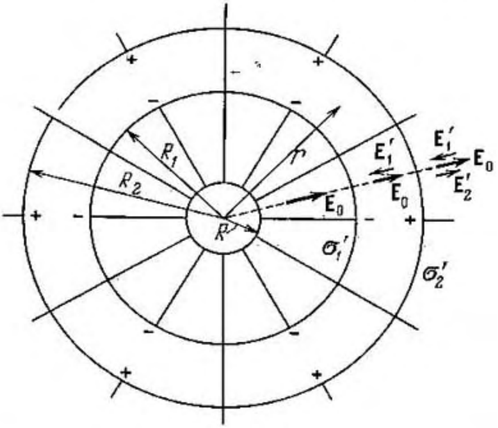


Fig. 20.2.

R_1 y R_2, un campo que coincide con el de una carga puntual de la misma magnitud (véase la fórmula (14.7)). Dentro de las superficies por las cuales se hallan distribuidas, las cargas q_1' y q_2' no crean campo. Por consiguiente, la intensidad del campo E' dentro del dieléctrico es

$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2\sigma_1'}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma_1'}{r^2}$$

y su sentido es opuesto al de la intensidad del campo E_0. El campo resultante dentro del dieléctrico

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma_1'}{r^2} \tag{20.7}$$

decrece según la ley $1/r^2$. Por eso se puede afirmar que

$$\frac{E(R_1)}{E(r)}=\frac{r^2}{R_1^2}, \text{ es decir, } E(R_1)=E(r)\frac{r^2}{R_1^2},$$

donde $E(R_1)$ es la intensidad del campo, dentro del dieléctrico, en la inmediación de la superficie interior de la capa. Precisamente esta intensidad determina la magnitud σ_1':

$$\sigma_1'=\varkappa\varepsilon_0 E(R_1)=\varkappa\varepsilon_0 E(r)\frac{r^2}{R_1^2} \tag{20.8}$$

(en cada punto de la superficie $|E_n|=E$).

Sustituyendo la expresión (20.8) en la fórmula (20.7), obtenemos

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\varkappa\varepsilon_0 E(r)\,r^2}{r^2R_1^2}=E_0(r)-\varkappa E(r).$$

De aquí hallamos que dentro del dieléctrico $E=E_0/\varepsilon$ y, por consiguiente, $D=\varepsilon_0 E_0$ (compárese con las fórmulas (20.2) y (20.3)).

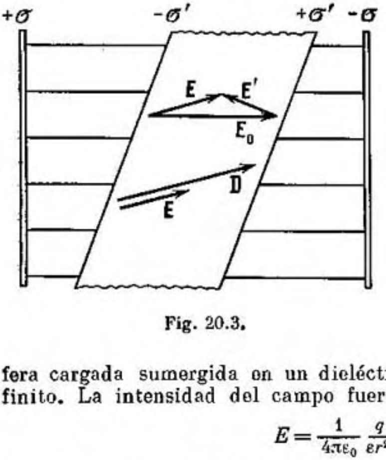


Fig. 20.3.

El campo dentro del dieléctrico varía según la ley $1/r^2$. Por eso tiene lugar la relación $\sigma_1' : \sigma_2' = R_2^2 : R_1^2$. De aquí se deduce que $q_1' = q_2'$. Por lo tanto, los campos que crean estas cargas a distancias mayores que R_2 se destruyen mutuamente, ya que fuera de la capa esférica $E'=0$ y $E=E_0$.

Suponiendo R_1 igual a R, mientras que $R_2=\infty$, llegamos al caso de una esfera cargada sumergida en un dieléctrico homogéneo isótropo infinito. La intensidad del campo fuera de esta esfera será

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2} \tag{20.9}$$

Así será también la intensidad del campo creado en un dieléctrico infinito por una carga puntual.

Los dos ejemplos analizados se caracterizan porque el dieléctrico es homogéneo e isótropo y las superficies que lo limitan coinciden con las superficies equipotenciales del campo de las cargas extrañas. El resultado que hemos obtenido en estas condiciones es general. *Si el dieléctrico homogéneo e isótropo llena totalmente el volumen limitado por las superficies equipotenciales del campo de las cargas extrañas, el vector de desplazamiento eléctrico coincide con el vector*

intensidad del campo de las cargas extrañas multiplicado por ε_0, y, por consiguiente, *la intensidad del campo dentro del dieléctrico es* ε *veces menor que la intensidad del campo de las cargas extrañas.*

Si las condiciones citadas no se cumplen, los vectores **D** y ε_0**E** no coinciden. En la fig. 20.3 se muestra el campo de una placa de material dieléctrico inclinada respecto de los planos portadores de cargas extrañas. El vector **E′** es perpendicular a las caras de la placa, por eso **E** y $\mathbf{E}_0$ no son colineales. El vector **D** tiene la misma direc-

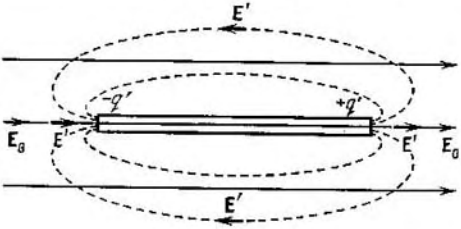


Fig. 20.4.

ción que el E, por lo tanto, **D** y $\varepsilon_0\mathbf{E}_0$ no coinciden en dirección. Se puede demostrar que tampoco coinciden en magnitud.

En los ejemplos antes citados, debido a la forma especialmente elegida del dieléctrico, el campo **E′** sólo era distinto de cero dentro del dieléctrico. En el caso general **E′** puede ser distinto de cero y más allá de los límites del dieléctrico. Coloquemos en el campo homogéneo inicial una barra de material dieléctrico (fig. 20.4). A causa de la polarización, en los extremos de la barra se forman cargas ligadas de signos opuestos. Su campo fuera de la barra es equivalente al campo de un dipolo (las líneas **E′** se indican en la figura con línea de trazos). Es fácil comprender que el campor resultante **E** en las proximidades de los extremos de la barra es mayor que el campo $\mathbf{E}_0$.

§ 21. Condiciones en el límite entre dos dieléctricos

En las proximidades de la superficie de separación de dos dieléctricos los vectores **E** y **D** deben satisfacer determinadas condiciones de frontera que se desprenden de las relaciones

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0, \quad \nabla\mathbf{D} = \rho \tag{21.1}$$

(véanse (12.3) y (19.8)).

Consideremos el límite entre dos dieléctricos de permitividades ε_1 y ε_2 (fig. 21.1). En esta superficie elegimos un eje x dirigido

arbitrariamente. Tomamos un pequeño circuito rectangular de longitud a y anchura b que pase parcialmente por el primer dieléctrico y parcialmente por el segundo. El eje x pasa por el centro de los lados b.

Supongamos que en los dieléctricos se ha creado un campo, cuya intensidad en el primer dieléctrico es $\mathbf{E}_1$ y en el segundo, $\mathbf{E}_2$. Debido a que $[\nabla\mathbf{E}] = 0$, la circulación del (vector $\mathbf{E}$ por el circuito que hemos elegido debe ser nula (véase la fórmula (12.1)). Si las

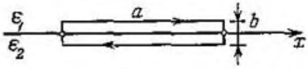


Fig. 21.1.

dimensiones del circuito son pequeñas y el sentido del rodeo es el que indica la fig. 21.1, la circulación del vector $\mathbf{E}$ se puede representar en la forma

$$\oint E_l\,dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b\rangle\,2b, \tag{21.2}$$

donde $\langle E_b\rangle$ es el valor medio de E_l en los tramos del circuito perpendiculares al límite de separación. Igualando esta expresión a cero, llegamos a la relación

$$(E_{2x} - E_{1x})\,a = \langle E_b\rangle\,2b.$$

En el límite, cuando la anchura b del circuito tiende a cero, se obtiene la igualdad

$$E_{1x} = E_{2x}. \tag{21.3}$$

Los valores de las proyecciones de los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ sobre el eje x se toman en la inmediación del límite entre los dieléctricos.

La relación (21.3) se cumple si el eje x se elige arbitrariamente, pero hace falta que dicho eje se encuentre en el plano de separación de los dieléctricos. De (21.3) se sigue que cuando el eje x se elige de tal modo que $E_{1x} = 0$, la proyección E_{2x} también será igual a cero. Esto significa que los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en dos puntos próximos, tomados por lados distintos del límite de separación, se encuentran en un plano con la normal a la superficie de separación. Representemos cada uno de los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en forma de suma de los componentes normal y tangencial:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{1\tau}; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2n} + \mathbf{E}_{2\tau}.$$

De acuerdo con (21.3)

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{21.4}$$

Aquí $E_{i\tau}$ es la proyección del vector $\mathbf{E}_i$ sobre el versor $\boldsymbol{\tau}$ dirigido a lo largo de la línea de intersección del plano de separación de los dieléctricos con el plano en que se encuentran los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$.

Sustituyendo, de acuerdo con (19.6), las proyecciones del vector **E** por las proyecciones del vector **D** divididas por $\varepsilon_0\varepsilon$, obtenemos la relación

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_1}=\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_2},$$

de la cual se sigue que

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (21.5)$$

Tomemos ahora en el límite entre los dieléctricos una superficie cilíndrica imaginaria de altura h (fig. 21.2). Su base S_1 se encuentra en el primer dieléctrico y su base S_2, en el segundo. Ambas bases tienen la misma magnitud ($S_1 = S_2 = S$) y son tan pequeñas que,

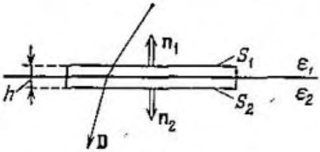


Fig. 21.2.

dentro de los límites de cada una de ellas, el campo se puede considerar uniforme. A esta superficie le aplicamos el teorema de Gauss (véase (19.10)). Si en el límite entre los dieléctricos no hay cargas extrañas, el segundo miembro de (19.10) es nulo. Por consiguiente, $\Phi_D = 0$.

El flujo a través de la base S_1 es igual a $D_{1n}S$, donde D_{1n} es la proyección del vector **D** en el primer dieléctrico sobre la normal $\mathbf{n}_1$. Análogamente, el flujo a través de la base S_2 es igual a $D_{2n}S$, siendo D_{2n} la proyección del vector **D** en el segundo dieléctrico sobre la normal $\mathbf{n}_2$. El flujo a través de la superficie lateral se puede representar en la forma $\langle D_n\rangle\, S_{lat}$, donde $\langle D_n\rangle$ es el valor de D_n promediado por toda la superficie lateral, y S_{lat}, la magnitud de dicha superficie. De este modo, se puede escribir

$$\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n\rangle\, S_{lat} = 0. \qquad (21.6)$$

Si se hace que la altura h del cilindro tienda a cero, S_{lat} también tenderá a cero. Por eso, en el límite se obtiene la relación

$$D_{1n} = -D_{2n}.$$

Aquí D_{in} son las proyecciones sobre $\mathbf{n}_i$ del vector **D** en el i-ésimo dieléctrico en la inmediación de su límite con otro dieléctrico. Los signos de las proyecciones resultaron ser distintos debido a que las normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ a las bases del cilindro tienen sentidos opuestos.

Si $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ se proyectan sobre una misma normal, se obtiene la condición

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{21.7}$$

Sustituyendo, de acuerdo con (19.6), las proyecciones de $\mathbf{D}$ por las correspondientes proyecciones del vector $\mathbf{E}$ multiplicadas por $\varepsilon_0\varepsilon$, obtenemos la relación

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2n},$$

de la cual se deduce que

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{21.8}$$

Los resultados que hemos obtenido significan que, al pasar a través del límite de separación entre los dieléctricos, la componente normal del vector $\mathbf{D}$ y la componente tangencial del vector $\mathbf{E}$ varían de un modo continuo. En cambio, la componente tangencial del vector $\mathbf{D}$ y la componente normal del vector $\mathbf{E}$, al pasar a través del límite de separación sufren una discontinuidad.

Las relaciones (21.4), (21.5), (21.7) y (21.8) determinan las condiciones que deben satisfacer los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en el límite entre dos dieléctricos (si en dicho límite no hay cargas extrañas). Hemos obtenido estas relaciones para un campo electrostático. No obstante, son también válidas para los campos que varían con el tiempo (véase el § 112).

Las condiciones halladas son correctas también para el límite entre un dieléctrico y el vacío. En este caso una de las permitividades debe suponerse igual a la unidad.

Advertimos que la condición (21.7) se puede obtener partiendo del hecho de que las líneas de desplazamiento pasan a través del límite de separación entre los dos dieléctricos sin interrumpirse (fig. 21.3). De acuerdo con la regla para trazar las líneas, el número de éstas que llegan a la superficie ΔS del primer dieléctrico es igual a $D_1\,\Delta S_1 = D_1\,\Delta S\cos\alpha_1$. Análogamente, el número de líneas que salen de la superficie ΔS al segundo dieléctrico es igual a $D_2\,\Delta S_2 = D_2\,\Delta S\cos\alpha_2$. Si las líneas no sufren discontinuidades en el límite de separación, estos dos números deben ser iguales:

$$D_1\,\Delta S\cos\alpha_1 = D_2\,\Delta S\cos\alpha_2.$$

Simplificando por ΔS y teniendo en cuenta que el producto $D\cos\alpha$ da la magnitud del componente normal del vector $\mathbf{D}$, llegamos a la condición (21.7).

En el límite de separación de los dieléctricos las líneas de desplazamiento sufren una desviación (se quiebran), a consecuencia de lo cual el ángulo α entre la normal a dicha superficie y las líneas $\mathbf{D}$

varía. De la fig. 21.4 se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} : \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}},$$

de donde, tomando en consideración las fórmulas (21.5) y (21.7), se obtiene la ley de la refracción de las líneas de desplazamiento eléctrico:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (21.9)$$

Al pasar al dieléctrico de menor ε el ángulo que forman las líneas de desplazamiento con la normal, disminuye y, por consiguiente,

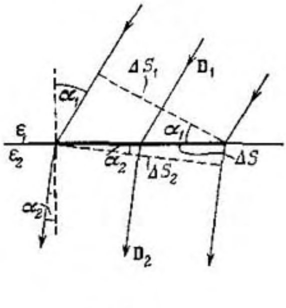


Fig. 21.3.

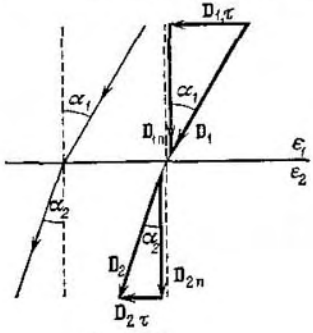


Fig. 21.4.

la disposición de dichas líneas se hace más espaciada; cuando pasan al dieléctrico de mayor ε, las líneas de desplazamiento, al contrario, se aproximan entre sí.

§ 22. Fuerzas que actúan sobre una carga en un dieléctrico

Si en un campo eléctrico en el vacío se introduce un cuerpo cargado, de dimensiones tan pequeñas que dentro de sus límites se puede considerar uniforme el campo exterior, sobre dicho cuerpo actuará la fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (22.1)$$

Para colocar un cuerpo cargado en el campo creado en un dieléctrico hay que hacer en este último un hueco. Si el dieléctrico es líquido o gaseoso, el hueco lo hace el mismo cuerpo desplazando el dieléctrico del volumen que él ocupa. El campo dentro de esta cavidad $\mathbf{E}_{cav}$ será diferente del campo $\mathbf{E}$ en el dieléctrico continuo. Por lo tanto,

la fuerza que actúa sobre el cuerpo cargado que ocupa el hueco no se puede calcular como el producto de la carga q por la intensidad del campo **E** que existía en el dieléctrico antes de introducir el cuerpo en él.

Al calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado que se encuentra en un dieléctrico líquido o gaseoso hay que tener en cuenta también otra circunstancia. En el límite con el cuerpo se producen en el dieléctrico tensiones mecánicas que conducen a la aparición de una fuerza mecánica adicional $\mathbf{F}_{tens}$ que actúa sobre el cuerpo.

Así, pues, la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado que se encuentra en un dieléctrico, en general, no se puede determinar por la fórmula (22.1) y el problema de su cálculo suele ser bastante complicado. Para un dieléctrico líquido o gaseoso los cálculos dan un resultado curioso. La resultante de la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}_{cav}$ y de la fuerza mecánica $\mathbf{F}_{tens}$ es igual exactamente a $q\mathbf{E}$, donde **E** es la intensidad del campo en el dieléctrico continuo:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{cav} + \mathbf{F}_{tens} = q\mathbf{E}. \tag{22.2}$$

La intensidad del campo creado en un dieléctrico homogéneo infinito por una carga puntual, se determina por la fórmula (20.9). Por consiguiente, para la fuerza de interacción de dos cargas puntuales sumergidas en un dieléctrico homogéneo infinito, se obtiene la expresión

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2}. \tag{22.3}$$

Esta fórmula expresa la ley de Coulomb para las cargas que se encuentran en un dieléctrico. Su validez se limita a los dieléctricos líquidos y gaseosos.

En algunos libros la fórmula (22.3) se da como «la expresión más general de la ley de Coulomb». En relación con esto nos remitimos a las siguientes palabras de R. Feynman: «En muchos libros anticuados de electricidad se comienza la exposición por la ley «fundamental», según la cual la fuerza que actúa entre las cargas es ... (se da la fórmula (22.3))..., pero esto punto de vista es absolutamente inaceptable. En primer lugar, esto no es siempre exacto; esto sólo es justo en un mundo lleno de líquido; en segundo lugar, así resulta únicamente cuando el valor de ε es constante, lo que para la mayoría de los materiales reales sólo se cumple aproximadamente» («Conferencias de física de Feynman», fascículo 5, Editorial «Mir», 1966, pág. 208 (en ruso)).

De los problemas concernientes a las fuerzas que actúan sobre una carga que se encuentra dentro de una cavidad practicada en un dieléctrico sólido, no nos ocuparemos.

§ 23. Ferroeléctricos

Existe un grupo de cuerpos, llamados *ferroeléctricos*, que pueden tener polarización espontánea en ausencia del campo exterior. Este fenómeno se observó por primera vez en la sal de Seignette o de Rochelle. La primera investigación detallada de las propiedades de esta sal fue realizada por los físicos soviéticos I. V. Kurchátov y P. P. Kobeko.

Los ferroeléctricos se diferencian de los demás dieléctricos en una serie de particularidades características:

1. Mientras que en los dieléctricos ordinarios ε constituye varias unidades, alcanzando en casos excepcionales varias decenas (en el agua, por ejemplo, $\varepsilon = 81$), la permitividad de los ferroeléctricos suele ser del orden de varios millares.

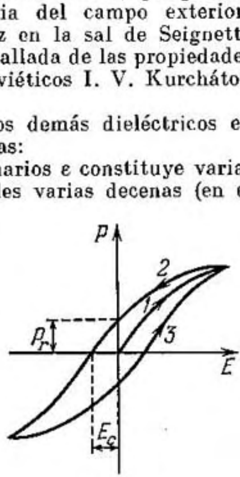


Fig. 23.1.

2. P no depende de E linealmente (véase la rama *1* de la curva representada en la fig. 23.1). Por lo tanto, la permitividad resulta ser función de la intensidad del campo.

3. En las variaciones del campo, los valores de la polarización P (y, por consiguiente, del desplazamiento D) se retrazan respecto de la intensidad del campo E y, como resultado de esto, P y D se determinan no sólo por la magnitud de E en el instante dado, sino también por los valores anteriores de E, es decir, dependen de la «prehistoria» del dieléctrico. Este fenómeno se llama ***histéresis*** (del griego «hysteresis», retraso). En las variaciones cíclicas del campo la dependencia de P respecto de E sigue la curva, representada en la fig. 23.1, denominada *lazo* o *ciclo de histéresis.* Cuando el campo se conecta por primera vez, la polarización crece con E de acuerdo con la rama *1* de la curva. La disminución de P se efectúa por la rama *2*. Cuando E se reduce a cero, el cuerpo conserva el valor de la polarización P_r, llamado *polarización remanente.* Sólo bajo la acción de un campo de sentido contrario e intensidad E_c, la polarización se anula. Este valor de la intensidad se denomina *fuerza coercitiva.* Si E sigue variando, se obtiene la rama *3* del lazo de histéresis y así sucesivamente.

El comportamiento de la polarización de los ferroeléctricos es análogo al de la imanación de los ferromagnéticos (véase el § 59). Por eso precisamente se les dio el nombre de *ferroeléctricos.*

Los ferroeléctricos sólo pueden ser cuerpos cirstalinos sin centro de simetría. Así, por ejemplo, los cristales de sal de Seignette pertenecen al sistema rómbico (véase el § 111 del tomo 1°). La interacción

de las partículas en el cristal del ferroeléctrico hace que sus momentos dipolares se sitúen espontáneamente paralelos unos a otros. En casos excepcionales la igual orientación de los momentos dipolares se extiendo a todo el cristal. De ordinario surgen en el cristal regiones dentro de los límites de cada una de las cuales los momentos dipolares son paralelos entre sí, pero la dirección de polarización en las distintas regiones suele ser diferente, de manera que el momento resultante de todo el cristal puede ser nulo. Las regiones de polarización espontánea se llaman también *dominios*. Bajo la acción de un campo exterior, los momentos de los dominios giran como un conjunto y se orientan en el sentido del campo.

Para cada ferroeléctrico existe una temperatura, a la cual el cuerpo pierde sus propiedades extraordinarias y se convierte en dieléctrico normal. Esta temperatura se llama *punto de Curie*. La sal de Seignette tiene dos puntos de Curie: —15 °C y +22,5 °C, con la particularidad de que esta sal se comporta como ferroeléctrico únicamente en el intervalo de temperaturas limitado por dichos valores. A temperatura inferior a —15 °C y superior a +22,5 °C, las propiedades eléctricas de la sal de Seignette son las ordinarias.

CAPÍTULO III

CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO

§ 24. Equilibrio de cargas en un conductor

Los conductores de carga que hay en un conductor son capaces de trasladarse bajo la acción de una fuerza tan pequeña como se quiera. Por eso, para el equilibrio de las cargas en un conductor es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

1. La intensidad del campo en todas partes dentro del conductor debe ser nula,

$$\mathbf{E} = 0. \tag{24.1}$$

De acuerdo con (8.2), esto significa que el potencial dentro del conductor debe ser constante ($\varphi = \text{const}$).

2. La intensidad del campo en la superficie del conductor debe estar en cada punto dirigida según la normal a la superficie:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n. \tag{24.2}$$

Por consiguiente, en el caso del equilibrio de las cargas, la superficie del conductor será equipotencial.

Si a un cuerpo conductor se le comunica cierta carga q, ésta se distribuye de modo que las condiciones de equilibrio se conserven. Figurémonos una superficie cerrada arbitraria comprendida totalmente dentro de los límites del cuerpo. Si las cargas están en equilibrio, el campo está ausente en cada punto dentro del conductor, por lo que el flujo del vector de desplazamiento eléctrico a través de la superficie será nulo. De acuerdo con el teorema de Gauss, la suma de las cargas que hay dentro del recinto abarcado por la superficie también será nula. Esto es justo para un superficie de cualesquiera dimensiones extendida dentro del conductor arbitrariamente. Por consiguiente, en equilibrio, en ningún sitio dentro del conductor puede haber cargas excesivas; todas ellas se qistribuyen por la superficie del conductor con cierta densidad σ.

Como en estado de equilibrio no hay cargas excesivas dentro del conductor, la extracción de substancia de cierto espacio dentro de éste no se reflejará en la disposición de equilibrio de las cargas. Por lo tanto, la carga excesiva se distribuye en un conductor hueco lo mismo que en otro macizo, es decir, por su superficie externa. En la superficie del hueco, en estado de equilibrio, no pueden situarse las cargas elementales del mismo signo que forman la carga q se repelen entre sí y, por lo tanto, tienden a situarse a las mayores distancias unas de otras.

Imaginemos una superficie cilíndrica pequeña formada por normales a la superficie del conductor, cuyas bases, de magnitud dS, se encuentren una dentro del conductor y otra fuera de él (fig. 24.1.)

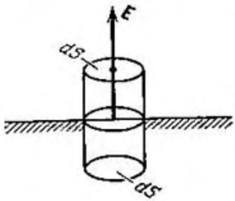


Fig. 24.1.

El flujo del vector de desplazamiento eléctrico a través de la parte interna de la superficie es nulo, ya que dentro del conductor es nulo **E**, y, por lo tanto, también **D**. Fuera del conductor, en la inmediación a él, la intensidad del campo **E** está dirigida según la normal a la superficie. Por eso, para la superficie lateral del cilindro que sobresale del conductor, $D_n = 0$, y para la base exterior $D_n = D$ (esta base se supone situada muy cerca de la superficie del conductor). Por consiguiente, el flujo de desplazamiento a través de la superficie considerada es igual a $D\ dS$, donde D es la magnitud del desplazamiento en la inmediación de la superficie del conductor. Dentro del cilindro hay una carga extraña $\sigma\ dS$

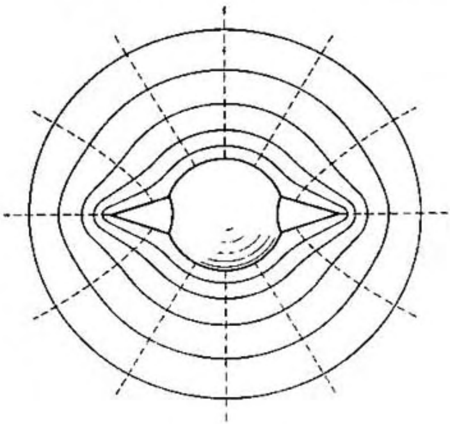


Fig. 24.2.

(σ es la densidad de carga en el sitio dado de la superficie del conductor). Aplicando el teorema de Gauss, obtenemos: $D\ dS = \sigma\ dS$, es decir, $D = \sigma$. De aquí se sigue que la intensidad del campo en

las proximidades de la superficie del conductor es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \tag{24.3}$$

donde ε es la permitividad del medio que rodea al conductor (compárese con la fórmula (14.6) obtenida para el caso en que $\varepsilon = 1$).

Estudiemos el campo que crea el conductor cargado que representa la fig. 24.2. A distancias grandes del conductor, las superficies equipotenciales tienen la forma de esfera característica de una carga puntual (en la figura, por falta de espacio, la superficie esférica se representa a una distancia pequeña del conductor; con línea de trazos se indican las líneas de intensidad del campo). A medida que se aproximan al conductor, las superficies equipotenciales se hacen más semejantes a la superficie de éste, que es equipotencial. Cerca de los salientes las superficies equipotenciales se sitúan más densamente, lo que significa que la intensidad del campo aquí es mayor. De esto se deduce que la densidad de cargas en los salientes es particularmente grande (véase 24.3). A esta misma conclusión se puede llegar teniendo en cuenta que, a causa de la repulsión mutua, las cargas tienden a situarse lo más lejos posible unas de otras.

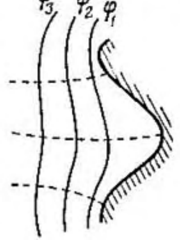


Fig. 24.3.

En las proximidades de los entrantes del conductor, las superficies equipotenciales se encuentran más separadas entre sí (véase la fig. 24.3). Respectivamente, la intensidad del campo y la densidad de cargas en estos sitios será menor. En general, la densidad de cargas para un potencial dado del conductor se determina por la curvatura de las superficies; aquélla aumenta cuando crece la curvatura positiva (convexidad) y disminuye cuando crece la curvatura negativa (concavidad). Especialmente grande suele ser la densidad de cargas en las puntas. Por eso la intensidad del campo en las proximidades de éstas puede ser tan grande que produce la ionización de las moléculas del gas que rodea el conductor. Los iones de signo contrario a q son atraídos por el conductor y neutralizan su carga. Los iones del mismo signo que q empiezan a moverse, alejándose del conductor, y arrastran consigo las moléculas neutras del gas. Como resultado se produce un movimiento apreciable del gas, llamado viento eléctrico. La carga del conductor disminuye como si se escapara por la punta y fuera arrastrada por el viento. Por eso este fenómeno se denomina escape de la carga por la punta.

§ 25. Conductor en un campo eléctrico externo

Cuando un conductor sin carga se introduce en un campo eléctrico, los portadores de carga se ponen en movimiento: los positivos en el sentido del vector **E** y los negativos en el sentido contrario. Como resultado, en los extremos del conductor surgen cargas de signos contrarios llamadas *cargas inducidas* (fig. 25.1; las líneas de intensidad del campo exterior se representan por medio de líneas de trazos). El campo de estas cargas tiene sentido contrario al del campo exterior. Por consiguiente, la acumulación de cargas en los

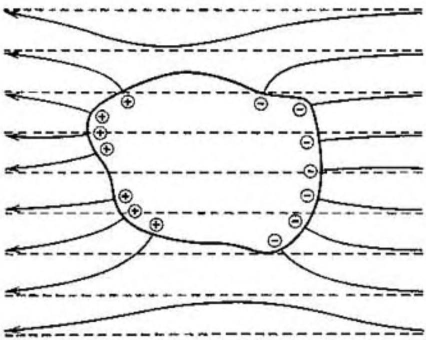


Fig. 25.1.

extremos del conductor hace que el campo se debilite en él. La redistribución de los portadores de carga continúa mientras no se cumplen las condiciones (24.1) y (24.2), es decir, hasta que la intensidad del campo dentro del conductor se anula y las líneas de intensidad fuera de este último son perpendiculares a su superficie (véase la fig. 25.1). De este modo, un conductor neutro introducido en un campo eléctrico interrumpe parte de las líneas de intensidad, las cuales terminan en las cargas inducidas negativas y empiezan de nuevo en las positivas.

Las cargas inducidas se distribuyen por la superficie externa del conductor. Si dentro del conductor existe una cavidad, con la distribución de equilibrio de las cargas inducidas el campo dentro de ella es nulo. En esto se basa la protección electrostática. Cuando un aparato cualquiera se quiere proteger de la acción de los campos exteriores se rodea de una pantalla conductora. El campo exterior

se compensa dentro de la pantalla con las cargas inducidas que surgen en su superficie. La acción de la pantalla también es buena si no se hace continua, sino en forma de red densa.

§ 26. Capacidad eléctrica

La carga q que se le comunica a un conductor se distribuye por su superficie de tal modo que la intensidad del campo dentro de él sea nula. Esta distribución es única. Por eso, si a un conductor, que tenga ya una carga q, se le comunica otra carga de la misma magnitud, esta segunda carga debe distribuirse por el conductor exactamente de la misma forma que la primera, de lo contrario crearía en el conductor un campo distinto de cero. Conviene advertir que esto es justo solamente para un conductor que esté lejos de otros cuerpos (aislado). Si cerca del conductor dado hay otros cuerpos, la comunicación al conductor de una nueva porción de carga hace que varíe la polarización de dichos cuerpos o que varíen las cargas inducidas en ellos. Como resultado se altera la semejanza en la distribución de las distintas porciones de carga.

Así, las cargas de magnitud distinta se distribuyen análogamente en un conductor aislado (la relación de las densidades de carga en dos puntos arbitrarios de la superficie del conductor, cualquiera que sea la magnitud de la carga, será la misma). De aquí se infiere que el potencial de un conductor aislado es proporcional a la carga que hay en él. En efecto, el aumento en cierto número de veces de la carga conduce al crecimiento en el mismo número de veces de la intensidad del campo en cada punto del espacio que rodea el conductor. Respectivamente, el mismo número de veces aumenta el trabajo de traslación de una carga unitaria desde el infinito hasta la superficie del conductor, es decir, el potencial del conductor. Por lo tanto, para un conductor aislado

$$q = C\varphi. \qquad (26.1)$$

El coeficiente de proporcionalidad C entre el potencial y la carga se llama *capacidad eléctrica* (o abreviado, simplemente *capacidad*) del conductor. De (26.1) se sigue que

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (26.2)$$

De acuerdo con (26.2), la capacidad es numéricamente igual a la carga que comunicada al conductor eleva su potencial en una unidad.

Calculemos el potencial de una esfera de radio R cargada. Entre la diferencia de potencial y la intensidad del campo existe la relación (8.6). Por eso el potencial de la esfera se puede hallar integrando la expresión (20.9) respecto de r desde R hasta ∞ (el potencial en el

infinito se supone igual a cero):

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2}\,dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\varepsilon R}. \qquad (26.3)$$

Comparando (26.3) con (26.2) hallamos que la capacidad de una esfera aislada de radio R, sumergida en un dieléctrico homogéneo infinito de permitividad ε es

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (26.4)$$

Como unidad de capacidad se toma la de un conductor, cuyo potencial varía en 1 V cuando se le comunica la carga de 1 C. Esta unidad de capacidad se llama *faradio* (F).

En el sistema de Gauss la fórmula de la capacidad de una esfera aislada tiene la forma $C=\varepsilon R$. Como ε es una magnitud adimensional, la capacidad tiene dimensión de longitud. Por unidad de capacidad se toma la de una esfera aislada de 1 cm de radio que se encuentra en el vacío. Esta unidad de capacidad se denomina *centímetro*. De acuerdo con (26.2)

$$1\,\mathrm{F}=\frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}}=\frac{3\cdot 10^9}{1/300}\ \text{unid. CGSE de capacidad}=9\cdot 10^{11}\ \text{cm}.$$

La capacidad de 1 F la tendría una esfera aislada de $9\cdot 10^9$ m de radio, o sea, 1500 veces mayor que el radio de la Tierra. Por consiguiente, el faradio es una magnitud muy grande. Por eso en la práctica se utilizan las unidades fraccionarias del faradio: milifaradio (mF), microfaradio (μF), nanofaradio (nF) y picofaradio (pF) (véase el § 20, tabla 20.1 del tomo 1°).

§ 27. Condensadores

Los conductores aislados tienen poca capacidad. Incluso una esfera de las dimensiones de la Tierra tiene solamente 700 μF de capacidad. Sin embargo, en la práctica se suelen necesitar dispositivos que, con un potencial pequeño respecto de los cuerpos circundantes, acumulen («condensen») cargas de magnitud apreciable. Sirve de base a estos dispositivos, denominados *condensadores*, el hecho de que la capacidad eléctrica de un conductor aumenta al aproximar a él otros cuerpos. Esto se debe a que, bajo la acción del campo creado por el conductor cargado, en el cuerpo que se le acerca surgen cargas inducidas (si es conductor) o ligadas (si es dieléctrico). Las cargas de signo contrario a la q del conductor se sitúan más cerca de éste que las del mismo signo que q y, por lo tanto, ejercen más influencia en su potencial. Por eso, cuando se acerca al conductor cargado un cuerpo cualquiera, el potencial del conductor disminuye en magnitud absoluta. Según la fórmula (26.2), esto significa un aumento de la capacidad del conductor.

Los condensadores se hacen en forma de dos conductores situados cerca el uno del otro. Los conductores que forman un condensador se llaman armaduras. Para que los cuerpos exteriores no ejerzan influencia sobre la capacidad del condensador, a las armaduras se les da tal forma y se disponen de tal modo una con respecto de la otra, que el campo que crean las cargas que en ellas se acumulan se concentre dentro del condensador. Esta condición la cumplen (véase el § 14) dos láminas próximas entre sí, dos cilindros coaxiales y dos esferas concéntricas. Respectivamente existen condensadores planos, cilíndricos y esféricos. Como el campo está encerrado dentro del condensador, las líneas de desplazamiento eléctrico comienzan en una armadura y terminan en la otra. Por consiguiente, las cargas extrañas que surgen en las armaduras tienen la misma magnitud y signos distintos.

La principal característica de un condensador es su capacidad, entendiéndose por ella la magnitud proporcional a la carga q e inversamente proporcional a la diferencia de potencial entre las armaduras:

$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}. \qquad (27.1)$$

La diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ llámase tensión entre los puntos correspondientes[1]). Nosotros designaremos la tensión por la letra U.

Valiéndonos de esta designación, a la fórmula (27.1) se le puede dar la forma

$$C=\frac{q}{U}. \qquad (27.2)$$

Aquí U es la tensión entre las armaduras.

La capacidad de los condensadores se mide en las mismas unidades que la de los conductores aislados (véase el párrafo precedente).

La magnitud de la capacidad se determina por la geometría del condensador (forma y dimensiones de las armaduras y magnitud del espacio entre ellas) y por las propiedades dieléctricas del medio que llena el espacio entre las armaduras. Hallemos la fórmula de la capacidad de un condensador plano. Si el área de la armadura es S y la carga que hay en ella es q, la intensidad del campo entre las armaduras será

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

(véanse las fórmulas (14.4) y (20.2); ε es la permitividad del medio que llena el espacio entre las armaduras.

[1]) Una definición más general de la magnitud llamada tensión se dará en el § 33 (véase la fórmula (33.6)).

De acuerdo con (8.6), la diferencia de potencial entre las armaduras es

$$\varphi_1-\varphi_2=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

De aquí se obtiene la fórmula de la capacidad del condensador plano

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \tag{27.3}$$

en la que S es el área de la armadura; d, la magnitud del espacio entre las armaduras, y ε, la permitividad de substancia que llena dicho espacio.

Advertimos que la capacidad de un conductor plano real se determina por la fórmula (27.3) con tanta mayor exactitud cuanto menor sea el espacio d en comparación con las dimensiones lineales de las armaduras.

De la fórmula (27.3) se deduce que la dimensión de la constante eléctrica ε_0 es igual a la dimensión de la capacidad dividida por la dimensión de una longitud. De acuerdo con esto, ε_0 se mide en faradios por metro (véase (4.2)).

Si se desprecia la dispersión del campo en las proximidades de los bordes de las armaduras, no es difícil obtener la fórmula de la capacidad del condensador cilíndrico

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}, \tag{27.4}$$

en la que l es la longitud del condensador y R_1 y R_2 son los radios de las armaduras interna y externa. Esta fórmula determina la capacidad de un condensador real con tanta mayor exactitud cuanto menor sea el espacio entre las armaduras $d=R_2-R_1$ en comparación con l y R_1.

La capacidad del condensador esférico es

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} \tag{27.5}$$

donde R_1 y R_2 son los radios de las armaduras interna y externa.

Además de por su capacidad, cada condensador se caracteriza por la tensión máxima $U_{máx}$ que se puede aplicar a las armaduras sin temer su perforación. Si esta tensión se supera, entre las armaduras salta una chispa, con lo que se destruye el dieléctrico y el condensador se inutiliza.

CAPÍTULO IV

ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

§ 28. Energía de un conductor cargado

La carga q que hay en un conductor se puede considerar como un sistema de cargas puntuales Δq. En el § 7 obtuvimos para la energía de interacción de un sistema de cargas la expresión (véase la fórmula (7.5))

$$W_p=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i. \quad (28.1)$$

Aquí φ_i es el potencial que crean todas las cargas, excepto q_i, en el punto en que se encuentra la carga q_i.

La superficie del conductor es equipotencial. Por eso, los potenciales de los puntos, en los cuales se hallan las cargas puntuales Δq, son iguales entre sí y al potencial φ del conductor. Aplicando la fórmula (28.1) obtenemos la expresión de la energía del conductor cargado

$$W_p=\frac{1}{2}\sum\varphi\Delta q=\frac{1}{2}\varphi\sum\Delta q=\frac{1}{2}\varphi q. \quad (28.2)$$

Tomando en consideración la relación (26.2) se puede escribir

$$W_p=\frac{\varphi q}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{C\varphi^2}{2}. \quad (28.3)$$

Cualquiera de estas expresiones da la energía del conductor cargado.

§ 29. Energía de un condensador cargado

Sea el potencial de la armadura del condensador en que se encuentra la carga $+q$, igual a φ_1, y el potencial de la armadura en que se halla la carga $-q$, igual a φ_2. Entonces cada una de las cargas elementales Δq en que puede dividirse la carga $+q$ se encuentra en un punto de potencial φ_1, y cada una de las cargas en que se puede dividir la carga $-q$, en un punto de potencial φ_2. De acuerdo con la fórmula (28.1), la energía de este sistema de cargas será

$$W_p=\frac{1}{2}[(+q)\varphi_1+(-q)\varphi_2]=\frac{1}{2}q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}qU. \quad (29.1)$$

Utilizando la relación (27.2) se pueden escribir las tres expresiones de la energía del condensador cargado:

$$W_p=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}. \quad (29.2)$$

7—01245

Las fórmulas (29.2) sólo se diferencian de las (28.3) en que φ ha sido sustituida por U.

Valiéndose de la expresión de la energía potencial se puede hallar la fuerza con que las placas de un condensador plano se atraen entre sí. Supongamos que la distancia entre las placas puede variarse. Liguemos el origen del eje x con la placa izquierda (fig. 29.1). Entonces la coordenada x de la segunda placa determinará el espacio d entre las armaduras. De acuerdo con las fórmulas (27.3) y (29.2)

$$W_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} x.$$

Tomamos la diferencial de esta expresión respecto de x, suponiendo que la carga es invariable en las armaduras (el condensador está desconectado de la fuente de tensión). Como resultado obtenemos la proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre la placa derecha:

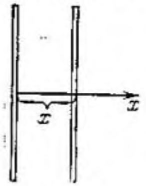


Fig. 29.1.

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

El módulo de esta expresión da la magnitud de la fuerza con que las armaduras se atraen entre sí:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}. \qquad (29.3)$$

Ahora intentaremos calcular la fuerza de atracción entre las armaduras de un condensador plano como el producto de la intensidad del campo que crea una de ellas por la carga concentrada en la otra. Según la fórmula (14.3), la intensidad del campo creado por una de las armaduras es

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}. \qquad (29.4)$$

El dieléctrico debilita el campo ε veces en el espacio entre las placas, pero esto sólo ocurre dentro del dieléctrico (véase la fórmula (20.2) y el texto relacionado con ella). Las cargas que hay en las armaduras se encuentran fuera del dieléctrico y, por lo tanto, se hallan bajo la acción del campo de intensidad (29.4). Multiplicando la carga q de la armadura por esta intensidad, obtenemos la expresión de la fuerza

$$F' = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}. \qquad (29.5)$$

Las fórmulas (29.3) y (29.5) no coinciden. Con la experiencia está de acuerdo el valor de la fuerza (29.3) que se obtiene de la fórmula de la energía. Esto se explica por el hecho de que, además de la fuerza «eléctrica» (29.5), sobre las armaduras actúan, por parte del dieléctrico, fuerzas mecánicas que tienden a separarlas

(véase el § 22; advertimos que tenemos en cuenta un dieléctrico líquido o gaseoso). En los bordes de las armaduras existe un campo disperso, cuya magnitud disminuye al alejarse de ellos (fig. 29.2). Las moléculas del dieléctrico, como tienen momento dipolar, experimentan la acción de una fuerza que las arrastra hacia la región en que el campo es más intenso (véase la fórmula (9.16)). Como resultado la presión entre las armaduras se eleva y aparece una fuerza que debilita ε veces la acción de la fuerza (29.5).

Si un condensador cargado, con espacio de aire, se sumerge parcialmente en un dieléctrico líquido, se observa la introducción del dieléctrico en el espacio entre las placas (fig. 29.3). Este fenómeno se explica del modo siguiente. La permitividad del aire es prácticamente igual a la unidad. Por eso, hasta que las placas se sumergen en el dieléctrico, la capacidad del condensador se puede considerar que es $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ y la energía, $W_0 = q^2/2C_0$. Cuando el espacio se llena parcialmente de dieléctrico, el condensador se puede considerar como dos condensadores conectados en paralelo, uno de los cuales tiene el área de la armadura igual a xS (x es la parte relativa del espacio lleno de líquido) y está lleno de dieléctrico con $\varepsilon > 1$, y el otro, con espacio de aire, tiene el área de la armadura igual a $(1 - x) S$. Al conectar en paralelo los condensadores, sus capacidades se suman:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S (1-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S x}{d} = C_0 + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) S}{d} x > C_0.$$

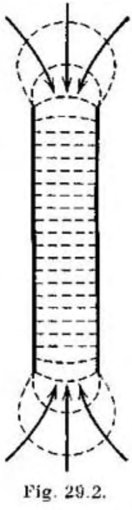


Fig. 29.2.

Como $C > C_0$, la energía $W = q^2/2C$ será menor que W_0 (la carga q se supone invariable, es decir, el condensador fue desconectado de la fuente de tensión antes de sumergirlo en el líquido). Por lo tanto, desde el punto de vista energético resulta conveniente que el espacio entre las placas se llene de dieléctrico. Por eso el dieléctrico es arrastrado hacia el condensador y su nivel en dicho espacio se eleva. Esto, a su vez, hace que aumente la energía potencial del dieléctrico en el campo de fuerzas de la gravedad. Al fin de cuentas el nivel del dieléctrico en el espacio entre las placas se establece a cierta altura, correspondiente al mínimo de la energía sumaria (eléctrica y gravitatoria). Este fenómeno se parece al de la elevación capilar de un líquido en el espacio estrecho entre dos placas (véase el § 119 del tomo 1°).

El arrastre del dieléctrico hacia el espacio entre las placas también se puede explicar desde el punto de vista microscópico. Junto

a los bordes de las placas del condensador hay un campo no homogéneo. Las moléculas del dieléctrico poseen momento dipolar intrínseco o lo adquieren bajo la acción del campo; por eso sobre ellas actúan fuerzas que tienden a trasladarlas a la región del campo intenso, es decir, hacia dentro del condensador. Bajo la acción de estas fuerzas el líquido se introduce en el espacio entre las placas hasta que las fuerzas eléctricas, que actúan sobre aquél en los bordes de las placas, se equilibran con el peso de la columna de líquido.

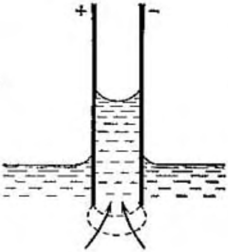


Fig. 29.3.

§ 30. Energía del campo eléctrico

La energía de un condensador cargado se puede expresar por medio de las magnitudes que caracterizan el campo eléctrico en el espacio entre las armaduras. Hacemos esto para un condensador plano. La sustitución en la fórmula $W_p = CU^2/2$ (véase (29.2)) de la expresión (27.3) de la capacidad da

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd.$$

El cociente U/d es igual a la intensidad del campo en el espacio entre las dos placas, y el producto Sd es el volumen V que ocupa el campo. Por consiguiente,

$$W_p = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V. \tag{30.1}$$

La fórmula $W_p = q^2/2C$ relaciona la energía del condensador con la carga de sus armaduras; la fórmula (30.1) la relaciona con la intensidad del campo. Es lógico plantearse la pregunta: ¿dónde está localizada (es decir, concentrada) la energía?; ¿quién es portador de la energía, el campo o las cargas? Dentro de los límites de la electrostática, que estudia los campos constantes con el tiempo de las cargas en reposo, es imposible responder a este interrogante. Los campos constantes y las cargas que los condicionan no pueden existir aislados uno de otro. Pero los campos que varían con el tiempo pueden existir independientemente de las cargas que los excitan y propagarse en el espacio en forma de ondas electromagnéticas. La experiencia demuestra que las ondas electromagnéticas transportan energía. En particular, la energía a cuyas expensas existe la vida en la Tierra es transportada desde el Sol por las ondas electromagnéticas; la energía que hace que suene el receptor de radio es transportada desde la estación transmisora por dichas ondas, etc. Estos hechos obligan a reconocer que el portador de la energía es el campo.

Si el campo es homogéneo (como ocurre en el condensador plano), la energía contenida en él se distribuye en el espacio con la densidad constante w, igual a la energía del campo dividida por el volumen que éste ocupa. De la fórmula (30.1) sigue que la densidad de la energía en un campo de intensidad E creado en un medio de permitividad ε, es

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \tag{30.2}$$

Teniendo en cuenta la relación (19.6), la fórmula (30.2) se puede representar en la forma

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \tag{30.3}$$

En un dieléctrico isótropo coinciden los sentidos de los vectores **E** y **D**. Por eso a la fórmula de la densidad de la energía se le puede dar la forma

$$w = \frac{\mathbf{ED}}{2}.$$

Sustituyendo en esta fórmula **D** por su valor (19.3), obtenemos para w la siguiente expresión:

$$w = \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{EP}}{2}. \tag{30.4}$$

El primer sumando de esta expresión coincide con la densidad de la energía del campo **E** en el vacío. El segundo sumando, como ahora demostraremos, es la energía que se gasta en polarizar el dieléctrico.

La polarización del dieléctrico consiste en que las cargas que entran en la composición de las moléculas se desplazan de sus posiciones de equilibrio bajo la acción del campo eléctrico **E**. Referido a la unidad de volumen del dieléctrico, el trabajo que se invierte en desplazar las cargas q_i a las magnitudes dr_i, es

$$dA = \sum_{A=1} q_i \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_i = \mathbf{E} d\left(\sum_{V=1} q_i \mathbf{r}_i\right)$$

(para simplificar suponemos que el campo es homogéneo). Según la fórmula (15.1), $\sum_{A=1} q_i \mathbf{r}_i$ es igual al momento dipolar de la unidad de volumen, es decir, a la polarización **P** del dieléctrico. Por lo tanto,

$$dA = \mathbf{E}\, d\mathbf{P}. \tag{30.5}$$

El vector **P** se relaciona con el **E** por medio de la fórmula $\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (véase (16.2)). De aquí $d\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 d\mathbf{E}$. Sustituyendo este valor de $d\mathbf{P}$ en (30.5), obtenemos la expresión

$$dA = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{E} = d\left(\frac{\varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathbf{EP}}{2}\right).$$

Finalmente, integrando, hallamos la expresión del trabajo que se gasta en polarizar la unidad de volumen del dieléctrico

$$A = \frac{\mathbf{EP}}{2}, \tag{30.6}$$

el cual coincide con el segundo sumando de la fórmula (30.4). De este modo, la expresión (30.3) incluye, además de la energía intrínseca del campo $\varepsilon_0\mathbf{E}^2/2$, la energía $\mathbf{EP}/2$ que se gasta, al crear el campo, en la polarización del dieléctrico.

Conociendo la densidad de la energía del campo en cada punto, se puede hallar la energía del campo comprendido en cualquier volumen V. Para esto hay que calcular la integral

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}\,dV. \tag{30.7}$$

Como ejemplo calcularemos la energía del campo de una esfera conductora de radio R, situada en un dieléctrico homogéneo infinito. La intensidad del campo en este caso sólo es función de r:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Descomponemos el espacio que rodea la esfera en capas esféricas concéntricas de espesor dr. El volumen de una capa será $dV = 4\pi r^2\,dr$. En él se encuentra la energía

$$dW = w\,dV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{dr}{r^2}.$$

La energía del campo será

$$W = \int dW = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

(de acuerdo con (26.4), $4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ es la capacidad de la esfera).

La expresión que hemos obtenido coincide con la de la energía de un conductor de capacidad C que sea portador de una carga q (véase la fórmula (28.3)).

CAPÍTULO V

CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA

§ 31. Corriente eléctrica

Si a través de una superficie imaginaria se traslada una carga total distinta de cero, se dice que a través de esta superficie pasa *corriente eléctrica*. La corriente puede pasar por los cuerpos sólidos (metales semiconductores), por los líquidos (electrólitos) y por los gases[1]).

Para que la corriente eléctrica pase es necesario que en el cuerpo dado (o en el medio dado) hayan partículas con carga que puedan desplazarse dentro de los límites do todo el cuerpo. Estas partículas se llaman *portadoras de carga* y pueden ser electrones, iones o, finalmente, partículas macroscópicas, portadoras de carga excedente (por ejemplo, partículas de polvo o gotitas con carga).

La corriente se produce a condición de que dentro del cuerpo exista un campo eléctrico. Los portadores de carga participan en el movimiento térmico de las moléculas y, por consiguiente, se mueven con cierta velocidad $\mathbf{v}$ en ausencia del campo. Pero en este caso a través de una superficie arbitraria trazada mentalmente en el cuerpo, pasa en ambos sentidos, por término medio, la misma cantidad de portadores de carga de cualquier signo, de manera que la corriente es nula. Cuando se conecta el campo, al movimiento caótico de los portadores con velocidad $\mathbf{v}$ se superpone el movimiento ordenado con velocidad $\mathbf{u}$[2]). De este modo, la velocidad de los portadores será $\mathbf{v} + \mathbf{u}$. Como el valor medio de $\mathbf{v}$ (pero no v) es nulo, la velocidad media de los portadores será $\langle \mathbf{u} \rangle$:

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle .$$

De lo dicho se deduce que la corriente eléctrica se puede definir como un movimiento ordenado de las cargas eléctricas.

De característica cuantitativa de la corriente eléctrica sirve la magnitud de la carga transportada a través de la superficie considerada en la unidad de tiempo. Esta magnitud se llama *intensidad de la corriente*. Advertimos que la intensidad de la corriente es en esencia el flujo de carga a través de la superficie (compárese con el flujo de líquido, el flujo do energía, etc.).

---

[1]) El paso de la corriente eléctrica a través de los gases se llama descarga en gas.

[2]) De un modo semejante a éste, en una corriente de gas, al movimiento térmico caótico de las moléculas se superpone el movimiento ordenado.

Si durante un tiempo dt se transporta a través de la superficie una carga dq, la intensidad de la corriente será

$$I=\frac{dq}{dt}. \tag{31.1}$$

La corriente eléctrica puede ser debida al movimiento tanto de los portadores positivos como de los negativos. El transporte de una carga negativa en un sentido equivale al transporte de una carga positiva de la misma magnitud en sentido contrario. Si la corriente la crean portadores de ambos signos, de tal modo que durante el tiempo dt los portadores positivos transportan a través de la superficie dada la carga dq^+ en un sentido y los portadores negativos la carga dq^- en el sentido opuesto, resultará que

$$I=\frac{dq^+}{dt}+\frac{|dq^-|}{dt}.$$

Como sentido de la corriente se toma aquel en que se trasladan los portadores positivos.

La corriente eléctrica puede estar distribuida por la superficie, a través de la cual ésta pasa, de un modo no uniforme. Con más detalle se puede caracterizar la corriente por medio del vector densidad de corriente **j**. Este vector es numéricamente igual a la intensidad de la corriente dI a través de una superficie $dS_\perp$, situada en el punto dado perpendicularmente a la dirección del movimiento de los portadores, referida a la unidad de dicha superficie:

$$j=\frac{dI}{dS_\perp}. \tag{31.2}$$

Como sentido de **j** se toma el del vector velocidad $\mathbf{u}^+$ del movimiento ordenado de los portadores positivos (o el sentido contrario al del vector $\mathbf{u}^-$).

El campo del vector densidad de corriente se puede representar por medio de las líneas de corriente, que se construyen lo mismo que las líneas de corriente de un líquido en movimiento, las líneas del vector **E**, etc.

Conociendo el vector densidad de corriente en cada punto del espacio se puede hallar la intensidad de la corriente I a través de cualquier superficie S:

$$I=\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \tag{31.3}$$

De (31.3) se sigue que la intensidad de la corriente es el flujo del vector densidad de corriente a través de una superficie (véase la fórmula (11.7)).

Supongamos que la unidad de volumen contiene n^+ portadores positivos y n^- negativos. La magnitud algebraica de las cargas

de los portadores es igual respectivamente a e^+ y e^-. Si bajo la acción del campo los portadores adquieren las velocidades medias u^+ y u^-, en la unidad de tiempo pasarán a través de la unidad de superficie n^+u^+ portadores positivos[1]) que transportarán la carga $e^+n^+u^+$. Análogamente los portadores negativos transportarán en sentido contrario la carga $e^-n^-u^-$. De este modo, para la densidad de corriente se obtiene la siguiente expresión:

$$j = e^+n^+u^+ + |e^-|\,n^-u^-. \tag{31.4}$$

A esta expresión puede dársele forma vectorial:

$$\mathbf{j} = e^+n^+\mathbf{u}^+ + e^-n^-\mathbf{u}^- \tag{31.5}$$

(los dos sumandos tienen el mismo sentido: el vector $\mathbf{u}^-$ tiene sentido contrario al $\mathbf{j}$, pero al multiplicarlo por el escalar negativo e^- se obtiene un vector de igual sentido que el $\mathbf{j}$).

El producto e^+n^+ da la densidad de carga de los portadores positivos ρ^+y, análogamente, e^-n^- da la densidad de carga de los portadores negativos ρ^-. Por consiguiente. la expresión (31.5) su puede escribir en la forma

$$\mathbf{j} = \rho^+\mathbf{u}^+ + \rho^-\mathbf{u}^-. \tag{31.6}$$

La corriente que no varía con el tiempo se llama *continua*. Para esta corriente es justa la correlación

$$I = \frac{q}{t}, \tag{31.7}$$

en la que q es la carga transportada a través de la superficie que se considera, en el tiempo t.

En el SI la unidad de intensidad de corriente, el *amperio* (A), es fundamental. Su definición se dará más adelante (véase el § 39). La unidad de carga, el *culombio*, se determina como la carga transportada en 1 s a través de la sección transversal de un conductor cuando la intensidad de la corriente es de 1 A.

Como unidad de intensidad de corriente en el sistema CGSE se toma la intensidad de una corriente con la cual, a través de una superficie dada, se transporta en 1 s una unidad CGSE de carga. De las relaciones (31.7) y (3.3) se sigue que

$$1\ \text{A} = 3\cdot 10^9\ \text{unid. CGSE de intensidad de corriente.} \tag{31.8}$$

---

[1]) La expresión para el número de moléculas que pasan en la unidad de tiempo a través de la superficie contiene además el factor 1/4, debido a que las moléculas se mueven caóticamente (véase la fórmula (95.6) del tomo 1º). En el caso que estudiamos no figura este factor, ya que los portadores de un signo dado se mueven ordenadamente en un sentido.

§ 32. Ecuación de continuidad

Consideremos en cierto medio, por el cual pasa la corriente, una superficie cerrada imaginaria S (fig. 32.1). La expresión $\oint_S \mathbf{j}d\mathbf{S}$ da la carga que sale en la unidad de tiempo del volumen V limitado por la superficie S. En virtud de la conservación de la carga, esta

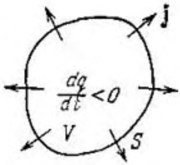


Fig. 32.1.

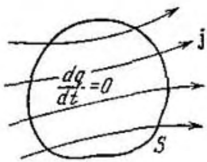


Fig. 32.2.

magnitud debe ser igual a la velocidad con que disminuye la carga q contenida en dicho volumen:

$$\oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Representando q en la forma $\int_V \rho dV$, obtenemos la relación

$$\oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \qquad (32.1)$$

Bajo el signo de integral hemos escrito la derivada parcial de ρ respecto de t, ya que la densidad de carga puede depender no sólo del tiempo, sino también de las coordenadas (la integral $\int \rho dV$ es función solamente del tiempo). Transformamos el primer miembro de la igualdad (32.1) según el teorema de Ostrogradski—Gauss. Como resultado obtenemos

$$\int_V \nabla\mathbf{j}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \qquad (32.2)$$

La igualdad (32.2) debe cumplirse cualquiera que sea la elección que se haga del volumen V sobre el cual se toman las integrales. Esto sólo es posible si en cada punto del espacio se cumple la condición

$$\nabla\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (32.3)$$

La relación (32.3) se llama *ecuación de continuidad*. Ella (lo mismo que la ecuación (32.1)) expresa la ley de conservación de la carga. De acuerdo con (32.3), en los puntos que son manantiales del vector **j** se produce una disminución de carga.

En el caso de una corriente estacionaria, el potencial en distintos puntos, la densidad de carga y otras magnitudes, son invariables. Por lo tanto, para la corrriente estacionaria (es decir, continua) la ecuación (32.3) tiene la forma

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \qquad (32.4)$$

Así, pues, en el caso de la corriente continua, el vector **j** no tiene manantiales. Esto quiere decir que las líneas de corriente no empiezan ni terminan en ninguna parte. Por consiguiente, las líneas de corriente continua son siempre cerradas. Respectivamente $\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S}$ es igual a cero. Por esto, para la corriente continua la figura análoga a la representada en la fig. 32.1 tiene la forma que se muestra en la fig. 32.2.

§ 33. Fuerza electromotriz

Si en un conductor se crea un campo eléctrico y no se toman medidas para su mantenimiento, la traslación de los portadores de carga hace muy pronto que desaparezca el campo dentro del conductor y que la corriente cese. Para mantener la corriente durante

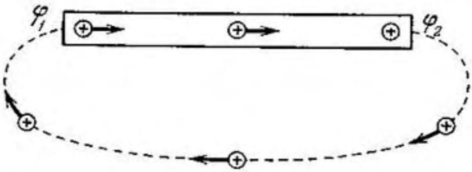


Fig. 33.1.

un tiempo suficientemente largo hay que retirar continuamente del extremo del conductor con menor potencial (se supone que los portadores de corriente son positivos) las cargas que trae a él la corriente, y siministrárselas continuamente al extremo con mayor potencial (fig. 33.1). En otras palabras, es necesario efectuar una circulación de las cargas con la cual éstas se muevan por un camino cerrado. Esto está de acuerdo con el hecho de que las líneas de corriente continua son cerradas (véase el párrafo precedente).

La circulación del vector intensidad del campo electrostático es nula. Por eso, en un circuito cerrado, a la vez que hay trozos en

los cuales los portadores positivos se mueven hacia el lado en que disminuye el potencial φ, debe haber trozos en los cuales el transporte de cargas positivas transcurra en el sentido en que aumenta φ, es decir. en contra de las fuerzas del campo electrostático (véase la parte del circuito representada con línea de trazos en la fig. 33.1). El transporte de los portadores en estos trozos sólo es posible con la ayuda de fuerzas de origen no electrostático, llamadas *fuerzas exteriores*. De este modo, para mantener la corriente se necesitan fuerzas exteriores que actúen a todo lo largo del circuito o en algunos de sus trozos. Estas fuerzas pueden deberse a procesos químicos, a la difusión de portadores de carga en un medio homogéneo o a través del límite entre dos cuerpos heterogéneos, a campos eléctricos (no electrostáticos) engendrados por campos magnéticos variables con el tiempo (véase el § 69), etc.

Las fuerzas exteriores se pueden caracterizar por el trabajo que realizan sobre las cargas que se desplazan por el circuito. La magnitud igual al trabajo de las fuerzas externas sobre una carga positiva unidad se llama *fuerza electromotriz* (f.e.m.) $\mathscr{E}$, que actúa en el circuito o en uno de sus trozos. Por consiguiente, si el trabajo de las fuerzas exteriores sobre una carga q es igual a A, será

$$\mathscr{E}=\frac{A}{q}. \tag{33.1}$$

De la comparación de las fórmulas (33.1) y (6.11) se infiere que la dimensión de la f.e.m. coincide con la del potencial. Por eso $\mathscr{E}$ se mide en las mismas unidades que φ.

La fuerza exterior $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ que actúa sobre la carga q se puede representar en la forma

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{E}^*q. \tag{33.2}$$

La magnitud vectorial $\mathbf{E}^*$ se denomina *intensidad del campo de las fuerzas externas*. El trabajo de las fuerzas externas sobre la carga q en el trozo del circuito *1—2*, es

$$A_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ext}}\, d\mathbf{l}=q\int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}.$$

Diviendo este trabajo por q, se obtiene la f.e.m. que actúa en el trozo del circuito dado:

$$\mathscr{E}_{12}=\int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}. \tag{33.3}$$

Una integral análoga calculada para el circuito cerrado da la f.e.m. que actúa sobre dicho circuito:

$$\mathscr{E}=\oint \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}. \tag{33.4}$$

Así, la f.e.m. que actúa sobre un circuito cerrado se puede definir como la circulación del vector intensidad de las fuerzas exteriores.

Además de las fuerzas exteriores, sobre la carga actúan las fuerzas del campo electrostático $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$. Por lo tanto, la fuerza resultante que actúa en cada punto del circuito sobre la carga q es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{\text{ext}} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

El trabajo que realiza esta fuerza sobre la carga q en el trozo *1—2* del circuito se determina por la expresión

$$A_{12} = q\int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + q\int_1^2 \mathbf{E}^*\,d\ = q\,(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathscr{E}_{12}. \qquad (33.5)$$

La magnitud numéricamente igual al trabajo realizado por las fuerzas electrostáticas y exteriores al trasladar una carga positiva unidad, recibe el nombre de *caída de tensión* o, simplemente, *tensión* U en el trozo del circuito dado. De acuerdo con la fórmula (33.5)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}. \qquad (33.6)$$

Un trozo del circuito en el cual no actúan fuerzas exteriores, se dice que es *homogéneo*. Un trozo del circuito en el cual sobre los portadores de corriente actúan fuerzas exteriores, *no es homogéneo*. Para un trozo del circuito homogéneo

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad (33.7)$$

es decir, la tensión coincide con la diferencia de potencial en los extremos del trozo.

§ 34. Ley de Ohm. Resistencia de los conductores

G. S. Ohm estableció experimentalmente una ley según la cual *la intensidad de la corriente que pasa por un conductor metálico homogéneo* (en el sentido de que no existen fuerzas exteriores) *es proporcional a la caída de tensión U en el conductor*:

$$I = \frac{1}{R}\,U. \qquad (34.1)$$

Recordaremos que en el caso de un conductor homogéneo la tensión U coincide con la diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ (véase (33.6)).

La magnitud designada con la letra R en la fórmula (34.1) se llama *resistencia eléctrica* del conductor. De unidad de resistencia sirve el ohmio, que es igual a la resistencia de un conductor por el cual, cuando la tensión es de 1 V, pasa una corriente de 1 A de intensidad.

La magnitud de la resistencia depende de la forma y de las dimensiones del conductor, así como de las propiedades del material de

que está hecho. Para un conductor cilíndrico homogéneo

$$R=\rho\frac{l}{S},\tag{34.2}$$

donde l es la longitud del conductor; S, el área de su sección transversal, y ρ un coeficiente que depende de las propiedades del material, llamado *resistividad* o *resistencia eléctrica específica* de la substancia. Si $l = 1$ y $S = 1$, entonces R es numéricamente igual a ρ. En el SI se mide ρ en *ohmios metro* ($\Omega\cdot$m).

Hallemos la relación entre los vectores **j** y **E** en un mismo punto del conductor. En un conductor isótropo el movimiento ordenado de los portadores de corriente se efectúa en el sentido del vector **E**.

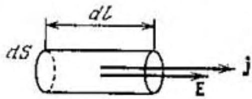


Fig. 34.1.

Por eso los sentidos de los vectores **j** y **E** coinciden[1]). En el entorno de un punto determinado aislemos mentalmente un elemento cilíndrico de volumen con las generatrices paralelas a los vectores **j** y **E** (fig. 34.1). A través de la sección transversal de este cilindro pasa una corriente de intensidad $j\,dS$. La tensión aplicada al cilindro es igual a $E\,dl$, siendo E la intensidad del campo en el punto dado. Finalmente, la resistencia del cilindro, según la fórmula (34.2), es $\rho\,(dl/dS)$. Sustituyendo estos valores en la fórmula (34.1), llegamos a la relación

$$j\,dS=\frac{dS}{\rho\,dl}E\,dl \quad \text{o} \quad j=\frac{1}{\rho}E.$$

Aprovechando que los vectores **j** y **E** tienen el mismo sentido se puede escribir

$$\mathbf{j}=\frac{1}{\rho}\mathbf{E}=\sigma\mathbf{E}.\tag{34.3}$$

Esta fórmula expresa la ley de Ohm en forma diferencial.

La magnitud σ, inversa de ρ, que figura en (34.3) se denomina *conductividad eléctrica específica* del material. La unidad recíproca del ohmio es el *siemenio* (S). Respectivamente, la unidad de σ es el *siemenio por metro* (S/m).

Supongamos para simplificar que en el conductor sólo existen portadores de un signo. De acuerdo con la fórmula (31.5), la den-

---

[1]) En los cuerpos anisótropos los sentidos de los vectores **j** y **E**, en general, no coinciden. En estos cuerpos la relación entre **j** y **E** se establece por medio del tensor de conducción.

sidad de corriente en este caso será

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u}. \tag{34.4}$$

Comparando esta expresión con la fórmula (34.3) se llega a la conclusión de que la velocidad del movimiento ordenado de los portadores de corriente es proporcional a la intensidad del campo **E**, es decir, a la fuerza que comunica a los portadores el movimiento ordenado. La proporcionalidad de la velocidad a la fuerza aplicada a un cuerpo se observa en aquellos casos en que, además de la fuerza que produce el movimiento, actúa sobre el cuerpo la fuerza de resistencia del medio. Esta fuerza es debida a la interacción de los portadores de corriente con las partículas de que está construida la substancia del conductor. La existencia de la fuerza de resistencia al movimiento ordenado de los portadores de corriente condiciona la resistencia eléctrica del conductor.

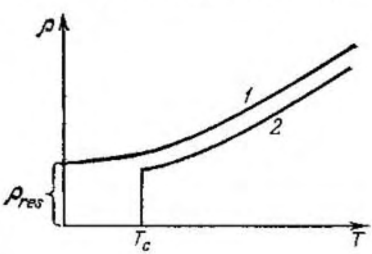


Fig. 34.2.

La capacidad de una substancia para conducir la corriente eléctrica se caracteriza por su resistividad específica ρ o su conductividad específica σ. Su magnitud viene determinada por la naturaleza química de la substancia y por las condiciones, en particular la temperatura, en que se encuentra.

Para la mayoría de los metales a temperaturas próximas a la ambiente, ρ varía proporcionalmente a la temperatura absoluta T:

$$\rho \sim T. \tag{34.5}$$

A bajas temperaturas se observan desviaciones de esta ley (fig. 34.2). En la mayoría de los casos la dependencia de ρ respecto de T sigue la curva *1*. La magnitud de la resistencia residual ρ_{res} depende en alto grado de la pureza del material y de la existencia de tensiones mecánicas residuales en la muestra. Por eso después del recocido disminuye apreciablemente ρ_{res}. En un metal absolutamente puro, con una red cristalina perfectamente regular, a la temperatura de cero absoluto $\rho = 0$.

En un gran grupo de metales y aleaciones, a una temperatura del orden de varios kélvines la resistencia se anula de golpe (curva *2* de la fig. 34.2). Por primera vez este fenómeno, llamado *superconductividad*, fue descubierto en 1911 por H. Kamerlingh Onnes en el mercurio. Más tarde se descubrió la superconductividad en el plomo, estaño, cinc, aluminio y otros metales, así como en una serie de

aleaciones. Cada superconductor tiene su temperatura crítica T_c, a la cual pasa al estado superconductor. Si sobre un superconductor actúa un campo magnético, el estado superconductor se altera. La magnitud del campo crítico B_c[1]) que destruye la superconducción, es nula cuando $T = T_c$ y aumenta al disminuir la temperatura.

La explicación teórica completa de la superconductividad fue dada en 1957 por J. Bardeen, L. Cooper y J. Schrieffer (véase el § 56 del tomo 3°).

La dependencia de la resistencia eléctrica respecto de la temperatura sirve de base a los termómetros de resistencia. Un termómetro de este tipo consiste en un alambre metálico (generalmente de platino) arrollado a un armazón de porcelana o de mica. Graduado por puntos de temperatura constante, el termómetro de resistencia permite medir, con exactitud del orden de varias centésimas de grado, temperaturas tanto bajas como altas. Ultimamente cada vez se utilizan más los termómetros de resistencia a base de semiconductores.

§ 35. Ley de Ohm para un trozo heterogéneo del circuito

En un trozo heterogéneo del circuito actúan sobre los portadores de corriente, además de las fuerzas electrostáticas $e\mathbf{E}$, las fuerzas exteriores $e\mathbf{E}^*$. Estas últimas son capaces de producir el movimiento ordenado de los portadores de corriente en la misma medida que las fuerzas electrostáticas. En el párrafo anterior se explicó que en un conductor homogéneo la velocidad media del movimiento ordenado de los portadores de corriente es proporcional a la fuerza electrostática $e\mathbf{E}$. Es evidente que allí donde, además de las fuerzas electrostáticas, actúan sobre los portadores fuerzas exteriores, la velocidad media del movimiento ordenado de dichos portadores será proporcional a la fuerza total $e\mathbf{E} + e\mathbf{E}^*$. Respectivamente, la densidad de corriente en estos puntos resulta ser proporcional a la suma de las intensidades $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \tag{35.1}$$

La fórmula (35.1) generaliza la (34.3) al caso de un conductor no homogéneo. Ella expresa en forma diferencial la ley de Ohm para un trozo heterogéneo de circuito.

De la ley en forma diferencial se puede pasar a la forma integral de la ley de Ohm. Consideremos un trozo heterogéneo del circuito. Supongamos que dentro de este trozo existe una línea (que llamaremos contorno de corriente) que satisface las condiciones que siguen: 1) en cada sección perpendicular al contorno las magnitudes $\mathbf{j}$, σ, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}^*$ tienen, con suficiente precisión, los mismos valores;

[1]) Con la letra B se designa la inducción del campo magnético (véase el § 40).

2) los vectores **j**, **E** y **E*** están dirigidos en cada punto tangencialmente al contorno. La sección transversal del conductor puede no ser constante (fig. 35.1).

Elegimos arbitrariamente el sentido del movimiento por el contorno. Sea el sentido elegido el correspondiente a la traslación del extremo *1* al extremo *2* del trozo de circuito (sentido *1—2*). Proyectemos los vectores que figuran en la relación (35.1) sobre un elemento del contorno $d\mathbf{l}$. Como resultado obtenemos

$$j_l = \sigma (E_l + E_l^*). \qquad (35.2)$$

En virtud de las suposiciones hechas, la proyección de cada uno de los vectores es igual al módulo del vector tomado con signo más o menos en dependencia de cómo esté dirigido el vector con respecto a $d\mathbf{l}$. Por ejemplo, $j_l = j$ si la corriente pasa en el sentido *1—2*, y $j_l = -j$ si la corriente pasa en el sentido *2—1*.

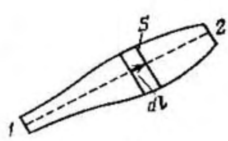


Fig. 35.1.

A consecuencia de la conservación de la carga, la intensidad de la corriente continua debe ser la misma en cada sección. Por eso la magnitud $I = j_l S$ es constante a lo largo del contrno. La intensidad de la corriente en este caso debe considerarse como una magnitud algebraica. Recordamos que el sentido *1—2* se eligió arbitrariamente. Por esto, si la corriente pasa en el sentido elegido, deberá considerarse positiva, y si pasa en el sentido contrario (es decir, del extremo *2* al *1*), su intensidad se debe considerar negativa.

Sustituimos en (35.2) j_l por la relación I/S y la conductividad σ por la resistividad ρ. Como resultado se obtiene la relación

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*.$$

Multiplicamos esta relación por dl y la integramos a lo largo del contorno:

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_l \, dl + \int_1^2 E_l^* \, dl.$$

La expresión $\rho \; dl/S$ es la resistencia del trozo del contorno de la longitud dl, y su integral es la resistencia R del trozo del circuito. La primera integral del segundo miembro da $\varphi_1 - \varphi_2$, mientras que la segunda, la f.e.m. $\mathscr{E}_{12}$ que actúa sobre el trozo. De este modo llegamos a la fórmula

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}. \qquad (35.3)$$

La f.e.m. $\mathscr{E}_{12}$, lo mismo que la intensidad de la corriente I, es una magnitud algebraica. En el caso en que la f.e.m. facilita

el movimiento de los portadores de corriente positivos en el sentido elegido (o sea, en el $1-2$), $\mathscr{E}_{12} > 0$. Si la f.e.m. dificulta el movimiento de los portadores positivos en dicho sentido, $\mathscr{E}_{12} < 0$.

Escribimos (35.3) en la forma

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R}. \tag{35.4}$$

Esta fórmula expresa la ley de Ohm para un trozo heterogéneo del circuito. Suponiendo $\varphi_1 = \varphi_2$, se obtiene la expresión de la ley de Ohm para un circuito cerrado:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{35.5}$$

Aquí $\mathscr{E}$ es la f.e.m. que actúa en el circuito y R, la resistencia sumaria de todo éste.

§ 36. Circuitos derivados. Reglas de Kirchhoff

El cálculo de los circuitos derivados se simplifica mucho si se utilizan las reglas o leyes enunciadas por Kirchhoff. Estas reglas son dos. La primera de ellas se refiere a los nudos de un circuito. Se llama *nudo* el punto en el cual concurren más de dos conductores

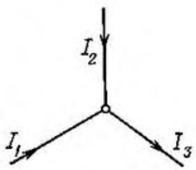


Fig. 36.1.

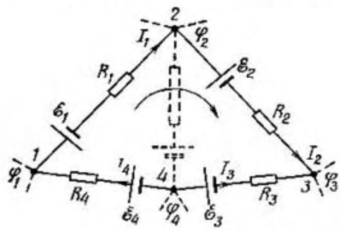


Fig. 36.2.

(fig. 36.1). La corriente que llega al nudo se considera que tiene un signo (más o menos) y la que sale de él, que tiene otro (menos o más).

La primera regla de Kirchhoff dice que *la suma algebraica de las corrientes que llegan a un nudo es nula*:

$$\sum I_k = 0. \tag{36.1}$$

Esta regla se infiere de la ecuación de continuidad, es decir, al fin de cuentas, de la ley de conservación de la carga. Para la corriente continua $\nabla \mathbf{j}$ es en todas partes nulo (véase (32.4)). Por consi-

guiente, el flujo del vector **j** (o sea, la suma algebraica de las corrientes que pasan a través de la superficie cerrada imaginaria que rodea el nudo) debe ser nulo.

La ecuación (36.1) se puede escribir para cada uno de los N nudos del circuito. Pero independientes sólo son $N - 1$ ecuaciones; la N-ésima será consecuencia de ellas.

La segunda regla se refiere a cualquier contorno cerrado (malla) escogido en un circuito derivado (véase, por ejemplo, el contorno *1—2—3—4—1* en la fig. 36.2). Establecemos un sentido de recorrido (por ejemplo, en sentido horario como se indica en la figura) y aplicamos a cada una de las partes no ramificadas del contorno la ley de Ohm:

$$I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_1,$$
$$I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathscr{E}_2,$$
$$I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathscr{E}_3,$$
$$I_4R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \mathscr{E}_4.$$

Al sumar estas expresiones los potenciales se simplifican y se obtiene la ecuación

$$\sum I_kR_k = \sum \mathscr{E}_k, \qquad (36.2)$$

que expresa la *segunda regla* de Kirchhoff.

La ecuación (36.2) se puede formar para todos los contornos cerrados (mallas) que pueden aislarse mentalmente en el circuito derivado. Pero independientes sólo serán las ecuaciones de aquellos contornos que no se pueden obtener por superposición de otros contornos. Así, por ejemplo, para el circuito representado en la figura 36.3 se pueden formar tres ecuaciones:

1) para el contorno *1—2—3—6—1*,
2) para el contorno *3—4—5—6—3*,
3) para el contorno *1—2—3—4—5—6—1*.

El último contorno se obtiene por superposición de los dos primeros. Por eso su ecuación no será independiente. Como independientes pueden tomarse dos cualesquiera de las tres ecuaciones.

Al formar las ecuaciones de la segunda regla de Kirchhoff, a las corrientes y fuerzas electromotrices hay que atribuirles signos de acuerdo con el sentido de recorrido elegido. Por ejemplo, la corriente I_1 en la fig. 36.3 debe considerarse negativa, ya que va al encuentro del sentido de recorrido elegido. A la f.e.m. $\mathscr{E}_1$ también debe atribuírsele el signo menos, puesto que actúa en sentido contrario al de recorrido, y así sucesivamente.

El sentido de recorrido en cada uno de los contornos se puede elegir de un modo absolutamente arbitrario e independientemente del sentido elegido en otros contornos. Con esto puede ocurrir que

una misma corriente y una misma f.e.m. figura en distintas ecuaciones con signos diferentes (así ocurre con la corriente I_2 en la fig. 36.3, cuando los sentidos de recorrido son los que se indican en los contornos). Esto, sin embargo, no tiene ninguna importancia, porque la variación del sentido de recorrido sólo hace que se cambien todos los signos de la ecuación (36.2) por los contrarios.

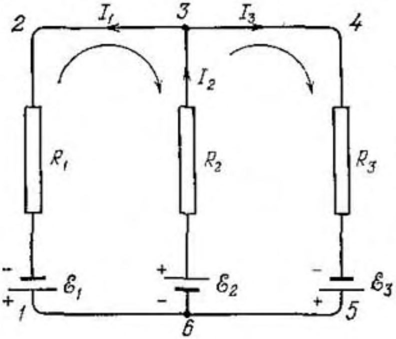


Fig. 36.3.

Al formar las ecuaciones debe recordarse que a través de cualquier sección de un trozo no ramificado del circuito pasa la misma corriente. Por ejemplo, por el trozo desde el punto *6* hasta la fuente de corriente $\mathscr{E}_2$ pasa la misma corriente I_2 que por el trozo desde la fuente $\mathscr{E}_2$ hasta el punto *3*.

El número de ecuaciones independientes que se forman de acuerdo con las reglas primera y segunda de Kirchhoff resulta ser igual al número de distintas corrientes que pasan por el circuito derivado. Por eso, si se dan las fuerzas electromotrices y las resistencias en todos los trozos no ramificados, se pueden calcular todas las corrientes. También se pueden resolver problemas de otro género, por ejemplo, hallar las fuerzas electromotrices que hay que intercalar en cada uno de los trozos del circuito para obtener, con las resistencias dadas, las corrientes necesarias.

§ 37. Potencia de la corriente

Consideremos un trozo arbitrario del circuito de corriente continua a cuyos extremos está aplicada una tensión U. Durante un tiempo t a través de cada sección del conductor pasa la carga $q = It$. Esto equivale a que la carga It se traslada en el tiempo t de un extremo del conductor a otro. Con esto las fuerzas del campo electrostático y las fuerzas exteriores que actúan sobre el trozo del circuito dado, realizan el trabajo

$$A = Uq = UIt \tag{37.1}$$

(recordamos que la tensión U se define como el trabajo que realizan las fuerzas electrostáticas y exteriores durante la traslación de una carga positiva unitaria; véase la fórmula (33.6)).

Dividiendo el trabajo A por el tiempo t durante el cual se realiza, obtenemos la potencia que desarrolla la corriente en el trozo del circuito considerado:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2) I + \mathcal{E}_{12} I. \tag{37.2}$$

Esta potencia se puede gastar en que el trozo del circuito que se considera realice trabajo sobre los cuerpos exteriores (para lo cual el trozo del circuito deberá moverse en el espacio), en el transcurso de reacciones químicas y, finalmente, en calentar dicho trozo del circuito.

La razón de la potencia ΔP desarrollada por la corriente en un volumen ΔV del conductor, a la magnitud del dicho volumen, se llama *potencia específica de la corriente* P_{esp} en el punto dado del conductor. Por definición, la potencia específica

$$P_{esp} = \frac{\Delta P}{\Delta V}. \tag{37.3}$$

Convencionalmente, la potencia específica es la potencia que se desarrolla en la unidad de volumen del conductor.

La expresión de la potencia específica de la corriente se puede obtener partiendo de los razonamientos siguientes. La fuerza $e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ desarrolla, al moverse el portador de corriente, la potencia

$$P' = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)(\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

Promediamos esta expresión por los portadores contenidos en un volumen ΔV, dentro de cuyos límites $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}^*$ se puedan considerar constantes. Como resultado obtenemos

$$\langle P' \rangle = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle =$$
$$= e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{v} \rangle + e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle$$

(recordamos que $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$).

La potencia ΔP desarrollada en el volumen ΔV se puede hallar multiplicando $\langle P' \rangle$ por el número de portadores de corriente que hay en dicho volumen, que es igual a $n\Delta V$ (n es el número de portadores que hay en la unidad de volumen). De este modo

$$\Delta P = \langle P' \rangle n\Delta V = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle n\Delta V = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\Delta V$$

(véase (34.4)). De aquí

$$P_{esp} = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \tag{37.4}$$

Esta igualdad es la forma diferencial de la expresión integral (37.2).

§ 38. Ley de Joule—Lenz

En el caso en que el conductor está en reposo y en él no se producen transformaciones químicas, el trabajo de la corriente (37.1) se gasta en aumentar la energía interna del conductor, como resultado de lo cual éste se calienta. Es costumbre decir que cuando la corriente pasa por un conductor se desprende el calor

$$Q = UIt.$$

Sustituyendo, de acuerdo con la ley de Ohm, U por RI, obtenemos la fórmula

$$Q = RI^2t. \tag{38.1}$$

La relación (38.1) fue establecida experimentalmente por J. P. Joule, e independientemente de él, por E. J. Lenz, y lleva el nombre de *ley de Joule—Lenz*.

Si la intensidad de la corriente varía con el tiempo, la cantidad de calor que se desprende durante el tiempo t se calcula por la fórmula

$$Q = \int_0^t RI^2\,dt. \tag{38.2}$$

De la fórmula (38.1), que determina el calor que se desprende en todo el conductor, se puede pasar a la expresión que caracteriza el desprendimiento de calor en distintos puntos de éste. Aislemos en el conductor, del mismo modo que lo hicimos al deducir la fórmula (34.3), un elemento de volumen en forma de cilindro (véase la fig. 34.1). De acuerdo con la ley de Joule—Lenz, durante el tiempo dt se desprende en este volumen el calor

$$dQ = RI^2\,dt = \frac{\rho\,dl}{dS}(j\,dS)^2\,dt = \rho j^2\,dV\,dt \tag{38.3}$$

($dV - dS\,dl$ es la magnitud del elemento de volumen).

Dividiendo la expresión (38.3) por dV y dt, hallamos la cantidad de calor que se desprende en la unidad de volumen por unidad de tiempo:

$$Q_{esp} = \rho j^2. \tag{38.4}$$

Por analogía con el nombre de la magnitud (37.3), la magnitud Q_{esp} se puede llamar *potencia térmica específica de la corriente.*

La fórmula (38.4) es la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Esta expresión se puede obtener de la relación (37.4). Sustituyendo en (37.4) $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$ por $\mathbf{j}/\sigma = \rho\mathbf{j}$ (véase (35.1)), llegamos

a la expresión

$$P_{esp} = \rho \mathbf{j}^2,$$

que coincide con (38.4).

Advertimos que Joule y Lenz establecieron su ley para un trozo homogéneo del circuito. No obstante, como se deduce de los cálculos expuestos en este párrafo, las fórmulas (38.1) y (38.4) también son válidas para un trozo no homogéneo, a condición de que las fuerzas exteriores que actúan en él no sean de origen químico.

CAPÍTULO VI

CAMPO MAGNÉTICO EN EL VACÍO

§ 39. Interacción de las corrientes

La experiencia demuestra que las corrientes eléctricas interaccionan entre sí. Por ejemplo, dos conductores rectilíneos paralelos delgados por los cuales pasan corrientes (que llamaremos corrientes directas) se atraen entre sí, cuando éstas tienen en ellos el mismo sentido, y se repelen, si tienen sentidos opuestos. La fuerza de interacción correspondiente a la unidad de longitud de cada uno de los conductores paralelos es proporcional a las magnitudes de las corrientes que pasan por ellos I_1 e I_2 e inversamente proporcional a la distancia b que los separa:

$$F_{\text{unid}} = k\frac{2I_1I_2}{b}. \qquad (39.1)$$

Por razones que quedarán claras más adelante, el coeficiente de proporcionalidad lo designaremos por $2k$.

La ley de la interacción de las corrientes fue establecida en 1820 por A. M. Ampere. La expresión general de esta ley, válida para conductores de forma cualquiera, se dará en el § 44.

Basándose en la relación (39.1) se establece la unidad de intensidad de la corriente en el SI y en el sistema electromagnético absoluto de unidades (sistema CGSM). La unidad de intensidad de corriente en el SI, el *amperio*, se define como la intensidad de la corriente invariable que, al pasar por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección circular despreciable por su pequeñez, situados a 1 m de distancia uno de otro en el vacío, produce entre ellos una fuerza igual a $2\cdot10^{-7}$ N por cada metro de longitud.

La unidad de carga, llamada *culombio*, se define como la carga que pasa en 1 s a través de la sección transversal de un conductor por el cual fluye una corriente continua de 1 A de intensidad. De acuerdo con esto, el culombio se llama también *amperio-segundo* (A·s).

En forma racionalizada la fórmula (39.1) se escribe como sigue:

$$F_{\text{unid}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}, \qquad (39.2)$$

donde μ_0 es la denominada *constante magnética* (compárese con la fórmula (4.1)). Para hallar el valor numérico de μ_0 nos valemos de que, según la definición del amperio, si $I_1 = I_2 = 1$ A y $b = 1$ m, la fuerza F_{unid} es igual a $2\cdot10^{-7}$ N/m. Sustituyendo estos valores

en la fórmula (39.2), resulta:

$$2\cdot 10^{-7}=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\cdot 1\cdot 1}{1}.$$

De aquí

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}=1{,}26\cdot 10^{-6}\ \text{H/m}^{1)}. \qquad (39.3)$$

El coeficiente k de la fórmula (39.1) se puede hacer igual a la unidad a expensas de la elección de la unidad de intensidad de corriente. Así se establece la unidad electromagnética absoluta de intensidad de corriente (unid. CGSM de intensidad de corriente), que se define como la intensidad de una corriente tal que, al pasar por un conductor rectilíneo fino de longitud infinita, actúa sobre una corriente directa igual y paralela a ella, distanciada 1 cm, con la fuerza de 2 dinas por cada centímetro de longitud.

En el sistema CGSE k resulta ser distinta de la unidad de magnitud dimensional. De acuerdo con la fórmula (39.1) la dimensión de k se determina por la expresión siguiente:

$$[k]=\frac{[F_{\text{unid}}b]}{[I]^2}=\frac{[F]}{[I]^2}. \qquad (39.4)$$

Hemos tenido en cuenta que la dimensión de F_{unid} es la dimensión de una fuerza dividida por la dimensión de una longitud; por eso la dimensión del producto $F_{\text{unid}}\, b$ es igual a la dimensión de una fuerza. Según las fórmulas (3.2) y (31.7)

$$[F]=\frac{[q]^2}{\mathrm{L}^2};\qquad [I]=\frac{[q]}{\mathrm{T}}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (39.4), hallamos que

$$[k]=\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}^2}.$$

Por consiguiente, en el sistema CGSE se puede representar k en la forma

$$k=\frac{1}{c^2}, \qquad (39.5)$$

donde c es una magnitud con dimensión de velocidad, llamada *constante electrodinámica*. Para hallar su valor numérico nos valemos de la relación (3.3) entre el culombio y la unid. CGSE de carga, que fue establecida experimentalmente. La fuerza de $2\cdot 10^{-7}$ N/m equivale a $2\cdot 10^{-4}$ din/cm. De acuerdo con la fórmula (39.1), con esta fuerza interaccionan dos corrientes de $3\cdot 10^9$ unid. CGSE (o sea, de 1 A) cada una, cuando $b=100$ cm. Por lo tanto,

$$2\cdot 10^{-4}=\frac{1}{c^2}\,\frac{2\cdot 3\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^9}{100},$$

de donde

$$c=3\cdot 10^{10}\ \text{cm/s}=3\cdot 10^8\ \text{m/s}. \qquad (39.6)$$

El valor de la constante electrodinámica coincide con la magnitud de la velocidad de la luz en el vacío. De la teoría de Maxwell se infiere la existencia de las ondas electromagnéticas, cuya velocidad en el vacío es igual a la constante electrodinámica c. La coincidencia de c con la velocidad de la luz en el vacío dio a Maxwell base para suponer que la luz es una onda electromagnética.

El valor de k en la fórmula (39.1) es igual a 1 en el sistema CGSM y a $1/c^2=1/(3\cdot 10^{10})^2$ s²/cm² en el sistema CGSE. De aquí se sigue que una corriente de

---

[1]) Henrio por metro (véase el § 64).

1 unid. CGSM de intensidad equivale a una corriente de $3\cdot10^{10}$ unid. CGSE de intensidad:

1 unid. CGSM de intensidad de corriente $= 3\cdot10^{10}$ unid. CGSE de intensidad de corrriente $= 10$ A. (39.7)

Multiplicando esta relación por 1 s, obtenemos que

1 unid. CGSM de carga $= 3\cdot10^{10}$ unid. CGSE de carga $= 10$ C. (39.8)

De este modo

$$I_{\mathrm{CGSM}}=\frac{1}{c}I_{\mathrm{CGSE}}. \tag{39.9}$$

Respectivamente,

$$q_{\mathrm{CGSM}}=\frac{1}{c}q_{\mathrm{CGSE}}. \tag{39.10}$$

Entre las constantes ε_0, μ_0 y c existe relación. Para establecer esta relación hallamos la dimensión y el valor numérico del producto $\varepsilon_0\mu_0$. De acuerdo con la fórmula (4.1) la dimensión de ε_0 es

$$[\varepsilon_0]=\frac{[q]^2}{\mathrm{L}^2[F]}. \tag{39.11}$$

Según (39.2)

$$[\mu_0]=\frac{[F_{\mathrm{unid}}b]}{[I]^2}=\frac{[F]\,\mathrm{T}^2}{[q]^2}. \tag{39.12}$$

Multiplicando entre sí las expresiones (39.11) y (39.12) se obtiene

$$[\varepsilon_0\mu_0]=\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}^2}=\frac{1}{[v]^2} \tag{39.13}$$

(v es la velocidad).

Teniendo en cuenta (4.2) y (39.3), el valor numérico del producto $\varepsilon_0\mu_0$ es

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{4\pi\cdot9\cdot10^9}4\pi\cdot10^{-7}=\frac{1}{(3\cdot10^8)^2}\frac{s^2}{m^2}. \tag{39.14}$$

Finalmente, tomando en consideración (39.6), (39.13) y (39.14), obtenemos la relación que nos interesa:

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}. \tag{39.15}$$

§ 40. Campo magnético

La interacción de las corrientes se efectúa por medio de un campo llamado *magnético*. Esta denominación procede de que, como descubrió en 1820 H. Ch. Oersted, el campo excitado por la corriente ejerce una acción orientadora sobre la aguja magnética. En el experimento de Oersted, un alambre, por el cual pasaba la corriente, estaba tendido sobre una aguja magnética, dispuesta en un soporte terminado en punta sobre el cual podía girar. Cuando se conectaba la corriente, la aguja se situaba en dirección perpendicular al alambre.

Si se cambiaba el sentido de la corriente, la aguja se volvía hacia el lado opuesto.

De la experiencia de Oersted se deduce que el campo magnético tiene carácter dirigido y se puede caracterizar por una magnitud vectorial. Esta magnitud se designa por medio de la letra **B**. Sería lógico que, por analogía con la intensidad del campo eléctrico **E**, se llamara **B** intensidad del campo magnético. Pero por razones históricas, a la característica fundamental de la intensidad del campo magnético se le dio el nombre de *inducción magnética*. En cambio, la denominación de «intensidad del campo magnético» resultó atribuida a una magnitud auxiliar **H**, análoga a la característica auxiliar **D** del campo eléctrico.

El campo magnético, a diferencia del eléctrico, no ejerce influencia sobre una carga en reposo. La fuerza se manifiesta únicamente cuando la carga se mueve.

Un conductor con corriente es un sistema neutro de cargas eléctricas, en el cual las cargas de un signo se mueven en un sentido y las cargas del otro signo, en el sentido contrario (o están en reposo). De aquí se sigue que el campo magnético es generado por las cargas en movimiento.

Así, las cargas en movimiento (corrientes) hacen que varíen las propiedades del espacio que las rodea, es decir, crean en él un campo magnético. Este campo se manifiesta en que sobre las cargas (corrientes) que se mueven en él actúan fuerzas.

La experiencia da, que para que el campo magnético, lo mismo que para el eléctrico, es justo el principio de superposición: *el campo* **B**, *creado por varias cargas en movimiento (corrientes) es igual a la suma vectorial de los campos* $\mathbf{B}_i$ *que engendran las cargas (corrientes) por separado*:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \tag{40.1}$$

(compárese con (5.7)).

§ 41. Campo de una carga en movimiento

El espacio es isótropo, por eso, si la carga está en reposo, todas las direcciones resultan ser equivalentes. Esto condiciona el hecho de que el campo electrostático que crea una carga puntual sea simétrico esférico.

En el caso en que la carga se mueve con la velocidad **v**, en el espacio aparece una dirección privilegiada (la del vector **v**). Por eso es de esperar que el campo magnético creado por una carga en movimiento tenga simetría axial. Advertimos que se trata del movimiento libre de la carga, es decir, de su movimiento con velocidad constante. Para que se produzca la aceleración es necesario que sobre la carga actúe un campo qualquiera (eléctrico o magnético). Este campo alteraría de por sí la isotropía del espacio.

Consideremos el campo magnético que crea en cierto punto P una carga puntual q que se mueve con la velocidad constante $\mathbf{v}$ (fig. 41.1). La excitación del campo se transmite de un punto a otro con la velocidad finita c. Por eso la inducción $\mathbf{B}$ en el punto P en el instante t no se determina por la posición de la carga en el mismo instante t, sino por su posición en cierto instante anterior $t-\tau$:

$$\mathbf{B}(P,\ t)=f\{q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{r}(t-\tau)\}.$$

Aquí P significa el conjunto de las coordenadas del punto P determinadas en cierto sistema de referencia en reposo, y $\mathbf{r}(t-\tau)$ es el radio vector trazado al punto P desde el punto en que se encuentra la carga en el instante $t-\tau$.

Si la velocidad del movimiento de la carga v es mucho menor que c ($v \ll c$), el tiempo de retraso τ será despreciable por su pequeñez. En este caso se puede considerar que el valor de $\mathbf{B}$ en el instante t se determina por la posición de la carga en el mismo instante t. Con esta condición

$$\mathbf{B}(P,\ t)=f\{q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{r}(t)\} \qquad (41.1)$$

(recordamos que $\mathbf{v}=\text{const}$, por lo que $\mathbf{v}(t-\tau)=\mathbf{v}(t)$).

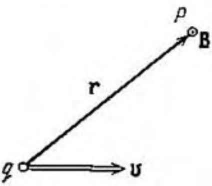


Fig. 41.1.

La forma de la función (41.1) sólo se puede establecer experimentalmente. No obstante, antes de dar el resultado del experimento, intentemos comprender qué dependencia puede ser ésta. La suposición más simple consiste en que la magnitud del vector $\mathbf{B}$ es proporcional a la carga q y a la velocidad v (cuando $\mathbf{v}=0$ el campo magnético está ausente). Hay que «construir» con el escalar q y los dos vectores dados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ el vector $\mathbf{B}$ que nos interesa. Esto se puede hacer multiplicando vectorialmente entre sí los vectores dados y multiplicando luego el resultado obtenido por el escalar. En definitiva se obtiene la expresión

$$q\,[\mathbf{vr}]. \qquad (41.2)$$

Con el alejamiento de la carga (al aumentar r) el módulo de esta expresión crece. Es inverosímil que se comporte así la característica del campo, porque en los casos de otros campos que conocemos (electrostático y gravitacional) al alejarse de la fuente el campo no se intensifica, sino al contrario, se debilita, variando como $1/r^2$. Supongamos que el campo magnético de la carga en movimiento se comporta, al variar r, del mismo modo. La proporcionalidad inversa al cuadrado de r se puede obtener dividiendo la expresión (41.2) por r^3. Como resultado se obtiene la expresión

$$\frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}. \qquad (41.3)$$

La experiencia da que, en el caso en que $v \ll c$, la inducción magnética del campo de la carga en movimiento viene determinada por la fórmula

$$\mathbf{B} = k' \frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}, \tag{41.4}$$

en la que k' es un coeficiente de proporcionalidad.

Conviene subrayar una vez más que los razonamientos que nos han conducido a la expresión (41.3) no se pueden considerar de ninguna manera como deducción de la fórmula (41.4). Estos razonamientos carecen de fuerza demostrativa. Su fin consiste en ayudar a comprender y recordar la fórmula (41.4). Pero esta fórmula sólo se puede obtener experimentalmente.

De la relacíon (41.4) se infiere que el vector $\mathbf{B}$ en cada punto P tiene dirección perpendicular al plano que pasa por la dirección del vector $\mathbf{v}$ y por el punto P, de manera que el giro en el sentido $\mathbf{B}$ forma con la dirección $\mathbf{v}$ un sistema dextrógiro (véase el círculo con punto en la fig. 41.4). Advertimos que $\mathbf{B}$ es un pseudovector.

El valor del coeficiente de proporcionalidad k' depende de la elección de las unidades de las magnitudes que figuran en la fórmula (41.4). En forma racionalizada la relación (41.4) se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}. \tag{41.5}$$

A esta fórmula se le puede dar la forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\,[\mathbf{ve}_r]}{r^2} \tag{41.6}$$

(compárese con (5.3)). Es conveniente indicar que en las fórmulas análogas, en aquellos casos en que ε_0 está en el denominador, μ_0 está en el numerador, y al contrario.

La unidad de inducción magnética en el SI se llama *tesla* (T).

En los sistemas CGSE y CGSM la unidad de inducción magnética B se elige de manera que el coeficiente k' de la fórmula (41.4) sea igual a la unidad. Por consiguiente, entre las unidades B en estos sistemas existe la misma relación que entre las unidades de carga:

$$1 \text{ unid. } B \text{ CGSM} = 3 \cdot 10^{10} \text{ unid. } B \text{ CGSE} \tag{41.7}$$

(véase (39.8)). La unidad CGSM de inducción magnética tiene el nombre especial de *gaussio* (Gs).

El científico alemán K. F. Gauss propuso un sistema de unidades en el cual todas las magnitudes eléctricas (carga, intensidad de la corriente, intensidad del campo eléctrico, etc). se miden en las unidades del sistema CGSE, mientras que las magnitudes magnéticas (inducción magnética, momento magnético, etc.), en las unidades del sistema CGSM. Este sistema de unidades se denomina *sistema de Gauss*.

En el sistema de Gauss, a consecuencia de las relaciones (39.9) y (39.10), en todas las fórmulas que contienen, además de magnitudes magnéticas, la inten-

sidad de la corriente o la carga, figura un factor $1/c$ por cada magnitud I o q que hay en ellas. Este factor transforma el valor de la magnitud correspondiente (I o q) expresado en unidades CGSE, en su valor expresado en unidades CGSM (sistema de unidades CGSM está construido de tal modo, que los coeficientes de proporcionalidad de todas las fórmulas son iguales a 1). Por ejemplo, en el sistema de Gauss la fórmula (41.4) tiene la forma

$$\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}. \tag{41.8}$$

Señalaremos que la aparición de una dirección privilegiada en el espacio (la del vector $\mathbf{v}$) al moverse la carga, hace que el campo eléctrico de la carga en movimiento pierda su simetría esférica y adquiera simetría axial. El cálculo correspondiente da que las líneas $\mathbf{E}$ del campo de la carga en movimiento libre tienen la forma que muestra la fig. 41.2. El vector $\mathbf{E}$ en el punto P está dirigido

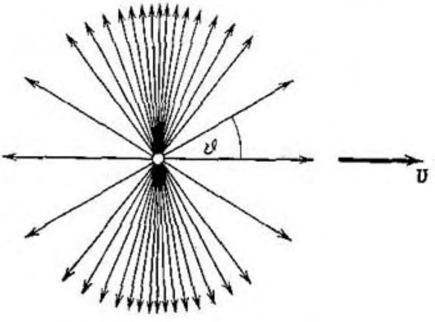


Fig. 41.2.

a lo largo del radio vector $\mathbf{r}$ trazado desde el punto en que se encuentra la carga en el instante dado, al punto P. La magnitud misma de la intensidad del campo se determina por la fórmula

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta]^{3/2}}, \tag{41.9}$$

en la que ϑ es el ángulo entre la dirección de la velocidad $\mathbf{v}$ y la del radio vector $\mathbf{r}$.

Cuando $v \ll c$, el campo eléctrico de la carga en movimiento libre en cada instante no se diferencia prácticamente del campo electrostático que crearía una carga en reposo que se encontrara en el mismo punto en que en el instante dado se encuentra la carga en movimiento. Pero hay que recordar que este campo «electrostá-

tico» se traslada junto con la carga, a consecuencia de lo cual el campo en cada punto del espacio varía con el tiempo.

Para velocidades v comparables con c, el campo, en las direcciones perpendiculares a **v** resulta sensiblemente más intenso que en la dirección del movimiento a la misma distancia de la carga (véase la fig. 41.2, dibujada para $v/c = 0{,}8$). El campo se «achata» en la dirección del movimiento, concentrándose principalmente en las proximidades del plano que pasa por la carga y es perpendicular al vector **v**.

§ 42. Ley de Biot—Savart

Vamos a aclarar el carácter del campo magnético que crea un conductor delgado arbitrario por el cual pasa corriente. Consideremos un elemento pequeño del conductor cuya longitud sea dl. Este elemento contendrá $nS\,dl$ portadores de corriente (n es el número de portadores por unidad de volumen, y S, el área de la sección transversal del conductor en el sitio en que se ha tomado el elemento dl). En un punto cuya posición respecto del elemento dl esté determinada por el radio vector **r** (fig. 42.1), un portador de corriente e aislado creará un campo de inducción

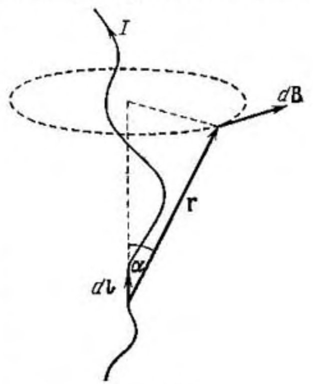


Fig. 42.1.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e\,[(\mathbf{v}+\mathbf{u}),\ \mathbf{r}]}{r^3}$$

(véase la fórmula (41.5)). Aquí **v** es la velocidad del movimiento caótico y **u**, la velocidad del movimiento ordenado.

El valor de la inducción magnética, promediado por los portadores de corriente contenidos en el elemento dl, es

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e\,[(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle),\ \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e\,[\langle \mathbf{u} \rangle,\ \mathbf{r}]}{r^3}$$

($\langle \mathbf{v} \rangle = 0$). Multiplicando esta expresión por el número de portadores que hay en el elemento de conductor (igual a $nS\,dl$), obtenemos la aportación al campo que hace el elemento dl:

$$d\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle\, nS\,dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{S\,[(ne\,\langle \mathbf{u} \rangle),\ \mathbf{r}]\,dl}{r^3}$$

(hemos introducido los factores escalares n y e bajo el signo del producto vectorial). Tomando en consideración que $ne\,\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{j}$, se

puede escribir

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S\,[\mathbf{j},\,\mathbf{r}]\,dl}{r^3}. \qquad (42.1)$$

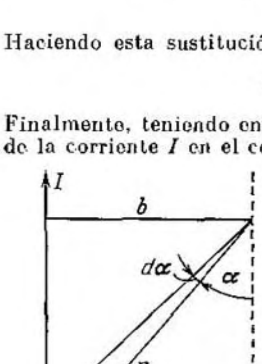
Introducimos el vector $d\mathbf{l}$ dirigido a lo largo de un elemento de corriente de longitud dl, en el sentido en que pasa la corriente. El módulo de este vector es dl. Como los sentidos de los vectores $\mathbf{j}$ y $d\mathbf{l}$ coinciden, existe la igualdad

$$\mathbf{j}\,dl = j\,d\mathbf{l}. \qquad (42.2)$$

Haciendo esta sustitución en la fórmula (42.1), obtenemos

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Sj\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el producto Sj da la intensidad de la corriente I en el conductor, llegamos a la expresión definitiva que determina la inducción magnética del campo que crea un elemento de corriente de longitud dl:



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (42.3)$$

Hemos deducido la fórmula (42.3) de la (41.5). En realidad la fórmula (42.3) fue establecida experimentalmente antes de conocerse la relación (41.5). Es más, esta relación fue deducida de la fórmula (42.3).

J. B. Biot y F. Savart estudiaron en 1820 los campos magnéticos que pasan por conductores delgados de forma diversa. P.-S. Laplace analizó los datos experimentales obtenidos por Biot y Savart y halló que el campo magnético de cualquier corriente puede ser calculado como la suma vectorial (superposición) de los campos que crean las distintas porciones elementales de corriente. Para la inducción magnética del campo que crea un elemento de corriente de longitud dl, Laplace obtuvo la fórmula (42.3). Por eso esta relación lleva el nombre de *ley de Biot-Savart-Laplace* o sólo *de Biot—Savart.*

En la fig 42.1 se ve que el vector $d\mathbf{B}$ es perpendicular al plano que pasa por $d\mathbf{l}$ y por el punto en el cual se calcula el campo, de tal modo que el giro alrededor de $d\mathbf{l}$ en el sentido de $d\mathbf{B}$ está ligado con $d\mathbf{l}$ por la regla del sacacorchos. El módulo de $d\mathbf{B}$ se determina por la expresión

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,dl\,\text{sen}\,\alpha}{r^2}, \qquad (42.4)$$

en la que α se el ángulo entre los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$.

Apliquemos la fórmula (42.3) para calcular el campo de la corriente directa, es decir, el campo que crea la corriente que pasa por un conductor recto y fino de longitud infinita (fig. 42.2). Todos los vectores $d\mathbf{B}$ en un punto dado tienen el mismo sentido (en nuestro caso hacia detrás de la figura). Por esto, la suma de los vectores $d\mathbf{B}$ se puede sustituir por la suma de sus módulos. El punto en el cual calculamos la inducción magnética se halla a la distancia b del conductor.

Por la fig. 42.2 se ve que

$$r=\frac{b}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad dl=\frac{r\,d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b\,d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Sustituimos estos valores en la fórmula (42.4):

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib\,d\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha.$$

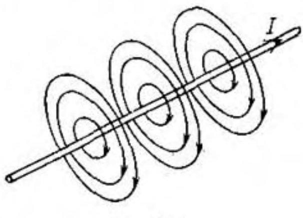


Fig. 42.3.

El ángulo α, para todos los elementos de la corriente directa infinita, varía entre los límites de 0 a π. Por consiguiente,

$$B=\int dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}.$$

De este modo, la inducción magnética del campo de la corriente directa se determina por la fórmula

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}. \qquad (42.5)$$

Las líneas de inducción magnética del campo de la corriente directa forman un sistema de circunferencias concéntricas que rodean el conductor (fig. 42.3).

§ 43. Fuerza de Lorentz

Sobre una carga que se mueve en un campo magnético actúa una fuerza que llamaremos *magnética*. Esta fuerza viene determinada por la carga q, la velocidad de su movimiento $\mathbf{v}$ y la inducción magnética $\mathbf{B}$ en el punto en que se encuentra la carga en el instante que se considera. La suposición más simple consiste en que el módulo de la fuerza F es proporcional a cada una de las tres magnitudes q, v y B. Además puede esperarse que F dependa de la orientación mutua de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$. La dirección y el sentido del vector $\mathbf{F}$ debe depender de las direcciones y sentidos de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$.

Para «construir» el vector **F** con el escalar q y los vectores **v** y **B**, multiplicamos entre sí vectorialmente **v** y **B** y luego multiplicamos el producto obtenido por el escalar q. Como resultado se obtiene la expresión

$$q\,[\mathbf{vB}]. \qquad (43.1)$$

Empíricamente se ha establecido que la fuerza **F** que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético está determinada por la fórmula

$$\mathbf{F} = kq\,[\mathbf{vB}], \qquad (43.2)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las unidades que se elijan de las magnitudes que figuran en la fórmula.

Debe tenerse en cuenta que los razonamientos que nos han conducido a la expresión (43.1) no pueden ser considerados como demostración de la fórmula (43.2). Estos razonamientos no tienen fuerza demostrativa. Su fin es facilitar el recuerdo de la fórmula (43.2). La validez de dicha fórmula sólo se puede establecer experimentalmente.

Conviene indicar que la relación (43.2) puede considerarse como determinación de la inducción magnética **B**.

La unidad de inducción magnética **B**, la tesla, se determina de tal modo, que el coeficiente de proporcionalidad k de la fórmula (43.2) sea igual a la unidad. Por lo tanto, en el SI esta fórmula tiene la forma

$$\mathbf{F} = q\,[\mathbf{vB}]. \qquad (43.3)$$

El módulo de la fuerza magnética es

$$F = qvB \operatorname{sen} \alpha, \qquad (43.4)$$

donde α es el ángulo entre los vectores **v** y **B**. De (43.4) se infiere que una carga que se mueva a lo largo de las líneas del campo magnético no experimentará la acción de la fuerza magnética.

La fuerza magnética es perpendicular al plano en que se encuentran los vectores **v** y **B**. Si la carga q es positiva, el sentido de la fuerza coincide con el del vector $[\mathbf{vB}]$. En caso de que q sea negativa, los sentidos de los vectores **F** y $[\mathbf{vB}]$ serán opuestos (fig. 43.1).

Como la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula cargada, ésta no realiza trabajo sobre ella. Por consiguiente, actuando sobre una partícula cargada con un campo magnético constante, no se puede cambiar su energía.

Si se tienen a la vez los campos eléctrico y magnético, la fuerza que actúa sobre la partícula cargada será

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\,[\mathbf{vB}]. \qquad (43.5)$$

Esta expresión fue obtenida empíricamente por H. A. Lorentz y se llama *fuerza de Lorentz.*

Sea una carga q que se mueve con la velocidad $\mathbf{v}$ paralelamente a un conductor recto infinito por el cual pasa una corriente de intensidad I (fig. 43.2). De acuerdo con las fórmulas (42.5) y (43.4), sobre la carga actúa en este caso una fuerza magnética cuyo módulo es

$$F = qvB = qv\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}, \tag{43.6}$$

donde b es la distancia desde la carga hasta el conductor. En el caso de una carga positiva, la fuerza está dirigida hacia el con-

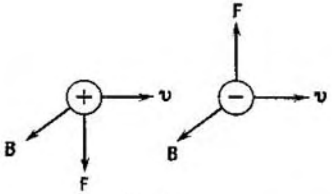


Fig. 43.1.

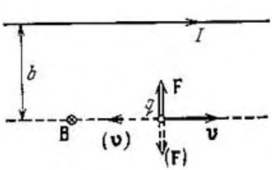


Fig. 43.2.

ductor, si los sentidos de la corriente y los del movimiento de la carga son los mismos, y tendrá que alejarse del conductor si los sentidos de la corriente y los del movimiento de la carga son opuestos (véase la fig. 43.2). En el caso de una carga negativa, el sentido de la fuerza, a igualdad de las demás condiciones, se invierte.

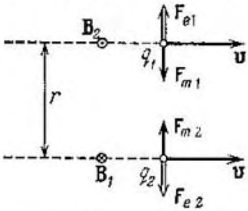


Fig. 43.3.

Consideremos dos cargas puntuales del mismo signo q_1 y q_2 que se muevan a lo largo de dos rectas paralelas con la misma velocidad v, mucho menor que c (fig. 43.3). Cuando $v \ll c$ el campo eléctrico no se diferencia prácticamente del campo de las cargas en reposo (véase el § 41). Por eso la magnitud de la fuerza eléctrica F_e que actúa sobre las cargas se puede suponer que es

$$F_{e1} = F_{e2} = F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}. \tag{43.7}$$

De acuerdo con las fórmulas (41.5) y (43.3), para la fuerza magnética F_m que actúa sobre las cargas se obtiene la expresión

$$F_{m_1} = F_{m_2} = F_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v^2}{r^2} \tag{43.8}$$

(el radio vector $\mathbf{r}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$).

Hallamos la razón de la fuerza magnética a la eléctrica. De (43.7) y (43.8) se sigue que

$$\frac{F_m}{F_e}=\varepsilon_0\mu_0 v^2=\frac{v^2}{c^2} \tag{43.9}$$

(véase (39.15)). Hemos obtenido la relación (43.9) suponiendo que $v \ll c$. No obstante, esta relación resulta ser válida para cualesquiera valores de v.

Las fuerzas $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_m$ tienen sentidos opuestos. La fig. 43.3 ha sido dibujada para cargas de igual signo positivas. Para las cargas de igual signo negativas los sentidos de las fuerzas siguen siendo los mismos, pero los de los vectores $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ se invierten. Para cargas de signos distintos los sentidos de las fuerzas eléctricas y magnéticas serán contrarios a los que se indican en la figura.

De (43.9) se deduce que la fuerza magnética es más débil que la de Coulomb en un factor igual al cuadrado de la razón de la velocidad de la carga a la velocidad de la luz. Esto se explica porque la interacción magnética entre las cargas en movimiento es un efecto relativista (véase el § 45). El magnetismo desaparecería si la velocidad de la luz fuera infinitamente grande

§ 44. Ley de Ampere

Si un conductor, por el que pasa corriente, se encuentra en un campo magnético, sobre cada uno de los portadores de corriente actúa la fuerza

$$\mathbf{F}=e\,[(\mathbf{v}+\mathbf{u}),\ \mathbf{B}] \tag{44.1}$$

(véase (43.3)). Aquí $\mathbf{v}$ es la velocidad del movimiento caótico de los portadores y $\mathbf{u}$, la velocidad de su movimiento ordenado. Del portador de corriente la acción de esta fuerza se transmite al conductor, por el cual se traslada. Como resultado, sobre el conductor con corriente que se halla en el campo magnético actúa una fuerza.

Hallemos la magnitud de la fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre un elemento de longitud dl del conductor. Para esto promediamos la expresión (44.1) por los portadores de corriente contenidos en el elemento dl:

$$\langle\mathbf{F}\rangle=e\,[(\langle\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{u}\rangle),\ \mathbf{B}]=e\,[\langle\mathbf{u}\rangle,\ \mathbf{B}] \tag{44.2}$$

($\mathbf{B}$ es la inducción magnética en el sitio en que se encuentra el elemento dl). El elemento del conductor contiene un número de portadores igual a $nS\,dl$ (n es el número de portadores que hay en la unidad de volumen, y S, el área de la sección transversal del conductor en el sitio dado). Multiplicando la expresión (44.2) por el número de portadores, hallamos la fuerza que nos interesa:

$$d\mathbf{F}=\langle\mathbf{F}\rangle\,nS\,dl=[(ne\,\langle\mathbf{u}\rangle),\ \mathbf{B}]\,S\,dl.$$

Tomando en consideración que $ne\langle\mathbf{u}\rangle$ es la densidad de la corriente $\mathbf{j}$ y que $S\,dl$ da el volumen dV del elemento del conductor, se puede escribir que

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]\,dV. \tag{44.3}$$

De aquí se puede obtener la expresión de la densidad de la fuerza, es decir, la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen del conductor:

$$\mathbf{F}_{\text{unid. vol.}} = [\mathbf{jB}]. \tag{44.4}$$

Escribimos la fórmula (44.3) en la forma

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]\,S\,dl.$$

Sustituyendo, de acuerdo con (42.2), $\mathbf{j}S\,dl$ por $jS\,d\mathbf{l} = I\,d\mathbf{l}$, llegamos a la fórmula

$$d\mathbf{F} = I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]. \tag{44.5}$$

Esta fórmula determina la fuerza que actúa sobre un elemento de

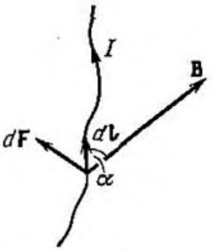


Fig. 44.1.

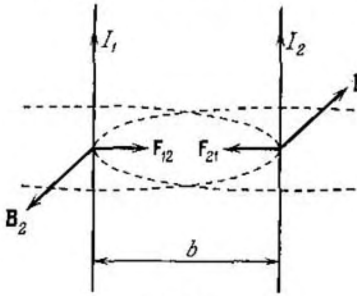


Fig. 44.2.

corriente $d\mathbf{l}$ en un campo magnético. La relación (44.5) fue establecida experimentalmente por A. M. Ampere y se denomina *ley de Ampere*.

Hemos obtenido la ley de Ampere partiendo de la expresión (43.3) para la fuerza magnética. En realidad la expresión para la fuerza magnética fue deducida de la expresión (44.5) establecida experimentalmente.

El módulo de la fuerza (44.5) se calcula por la fórmula

$$dF = IB\,dl \operatorname{sen} \alpha, \tag{44.6}$$

en la que α es el ángulo entre los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{B}$ (fig. 44.1). La fuerza es perpendicular al plano en que descansan los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{B}$.

La ley de Ampere es aplicable al cálculo de la fuerza de interacción de dos corrientes directas, paralelas, de longitud infinita, situadas

en el vacío. Si la distancia entre estas corrientes es b (fig. 44.2), cada elemento de la corriente I_2 se encontrará en un campo magnético cuya inducción será $B_1 = (\mu_0/4\pi)(2I_1/b)$ (véase la fórmula (42.5)). El ángulo α entre los elementos de la corriente I_2 y el vector $\mathbf{B}_1$ es recto. Por lo tanto, de acuerdo con (44.6), sobre la unidad de longitud de la corriente I_2 actúa la fuerza

$$F_{21\,\text{unid}} = I_2B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}. \qquad (44.7)$$

La expresión (44.7) coincide con la fórmula (39.2).

Para la fuerza $F_{12\,\text{unid}}$ que actúa sobre la unidad de longitud de la corriente I_1 se obtiene una expresión análoga. Es fácil convencerse de que si las corrientes tienen el mismo sentido, se atraerán entre sí, y si tienen sentidos distintos, se repelerán.

§ 45. El magnetismo como efecto relativista

Entre la electricidad y el magnetismo existe una profunda ligazón. Basándose en los postulados de la teoría de la relatividad y en la invariancia de la carga eléctrica se puede demostrar que la interacción magnética entre las cargas y las corrientes es la consecuencia

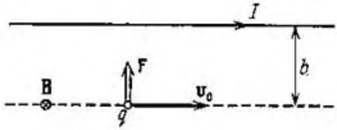


Fig. 45.1.

de la ley de Coulomb. Vamos a mostrar esto sobre el ejemplo de una carga que se mueve, paralelamente a una corriente directa infinita, con la velocidad v_0[1]) (fig. 45.1).

Según la fórmula (43.6), la fuerza magnética que actúa sobre la carga en el caso que analizamos es

$$F = qv_0\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b} \qquad (45.1)$$

(el significado de las letras que figuran en esta expresión se ve claramente en la fig. 45.1). Esta fuerza está dirigida hacia el conductor con corriente ($q > 0$).

Antes de empezar a deducir la fórmula de la fuerza (45.1) partiendo de la ley de Coulomb y de las relaciones relativistas, vamos a considerar el efecto siguiente. Supongamos que existe una cadena lineal

[1]) Para que las designaciones sean análogas a las del cap. VIII del tomo 1º, designamos la velocidad de la carga con v_0.

infinita de cargas puntuales de igual magnitud e, separadas unas de otras por un espacio muy pequeño l_0 (fig. 45.2). En virtud de la pequeñez de l_0 podemos hablar de la densidad lineal de cargas λ_0 que, evidentemente, será

$$\lambda_0 = e/l_0. \tag{45.2}$$

Hagamos que las cargas se muevan a lo largo de la cadena con la misma velocidad u. Entonces la distancia entre las cargas disminuye y se hace igual a

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

(véase la fórmula (64.1) del tomo 1°). La magnitud de las cargas, debido a su invariancia, sigue siendo la misma. Como resultado,

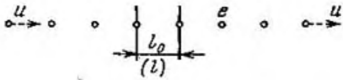


Fig. 45.2.

la densidad lineal de cargas que se observa en el sistema de referencia con respecto al cual se mueven las cargas, varía y se hace igual a

$$\lambda = e/l = \lambda_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{45.3}$$

Ahora consideremos en un sistema de referencia K dos cadenas infinitas, prácticamente coincidentes una con otra, formadas por cargas de igual magnitud, pero de signos distintos, que se mueven en sentidos opuestos con la misma velocidad u (fig. 45.3, a). El conjunto de estas dos cadenas equivale a una corriente directa infinita de intensidad

$$I = 2\lambda u = 2\lambda_0 u/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \tag{45.4}$$

en la que λ es la magnitud determinada por la fórmula (45.3). La densidad lineal total de cargas de las cadenas es nula, por lo que el campo eléctrico está ausente. Sobre la carga q actúa una fuerza magnética cuya magnitud, de acuerdo con (45.1) y (45.4), es

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{45.5}$$

Pasamos al sistema de referencia K' con respecto al cual la carga q está en reposo (fig. 45.3, b) En este sistema sobre la carga q también actúa una fuerza (que designaremos por F'). Pero esta fuerza no puede ser de origen magnético, ya que la carga q está en reposo. La fuerza F' tiene origen puramente eléctrico. Se produce porque la densidad lineal de cargas positivas y negativas en las

cadenas ahora no es la misma (más adelante se verá que la densidad de cargas negativas es mayor). El exceso de carga negativa distribuido por la cadena crea un campo eléctrico que actúa sobre la carga positiva q con la fuerza F' dirigida hacia la cadena (véase la fig. 45.3, *b*).

Calculamos la fuerza F' y nos convencemos de que es «igual» a la fuerza F determinada por la fórmula (45.5). Hemos puesto «igual» entre comillas porque la fuerza no es una magnitud invariante. Al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, la fuerza

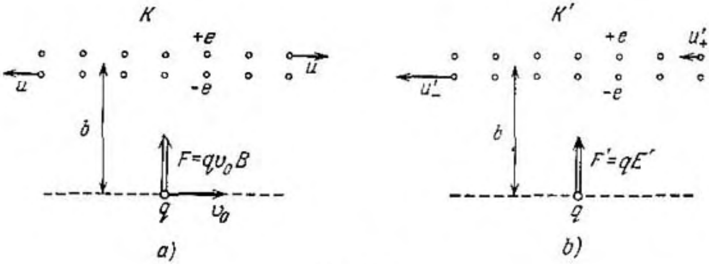


Fig. 45.3.

se transforma según una ley bastante compleja. En el caso particular en que la fuerza $\mathbf{F}'$ es perpendicular a la velocidad relativa de los sistemas K y K' ($\mathbf{F}' \perp \mathbf{v}_0$), la transformación tiene la forma

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}'\sqrt{1-v_0^2/c^2}+\mathbf{v}_0(\mathbf{F}'\mathbf{v}')/c^2}{1+v_0v'/c^2}$$

(v' es la velocidad, medida en el sistema K', de la partícula sobre la cual actúa la fuerza $\mathbf{F}'$). Si $\mathbf{v}' = 0$ (como ocurre en el problema que analizamos), la fórmula de transformación de la fuerza tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\sqrt{1-v_0^2/c^2}.$$

De esta fórmula se infiere que la fuerza, perpendicular a $\mathbf{v}_0$, que actúa sobre la partícula que está en reposo en el sistema K', resulta ser también en el sistema K perpendicular al vector $\mathbf{v}_0$. El módulo de la fuerza en este caso se transforma según la fórmula

$$F = F'\sqrt{1-v_0^2/c^2}. \tag{45.6}$$

Las densidades de cargas en las cadenas positiva y negativa medidas en el sistema K' tienen las magnitudes (véase (45.3))

$$\lambda'_+ = \lambda_0/\sqrt{1-u_+'^2/c^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0/\sqrt{1-u_-'^2/c^2}, \tag{45.7}$$

donde u'_+ y u'_- son las velocidades de las cargas $+e$ y $-e$ medidas en el sistema K'. Al pasar del sistema K al K', la proyección de la velocidad de las partículas sobre la dirección x, que coincide con la de $\mathbf{v}_0$, se transforma según la fórmula

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1 - u_x v_0/c^2}$$

(véase la fórmula (66.2) del tomo 1°; hemos sustituido v y v' por u y u'). Para las cargas $+e$ la componente u_x es igual a u y para las cargas $-e$, igual a $-u$ (véase la fig. 45.3, a). Por lo tanto,

$$(u'_x)_+ = \frac{u - v_0}{1 - uv_0/c^2}, \quad (u'_x)_- = \frac{-u - v_0}{1 + uv_0/c^2}.$$

Como las demás proyecciones son nulas, obtenemos

$$u'_+ = \frac{|u - v_0|}{1 - uv_0/c^2}, \quad u'_- = \frac{u + v_0}{1 + uv_0/c^2}. \qquad (45.8)$$

Para simplificar los cálculos pasamos a las velocidades relativas

$$\beta_0 = v_0/c, \quad \beta = u/c, \quad \beta'_+ = u'_+/c, \quad \beta'_- = u'_-/c.$$

Entonces las fórmulas (45.7) y (45.8) toman la forma

$$\lambda'_+ = \lambda_0/\sqrt{1 - \beta'^2_+}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0/\sqrt{1 - \beta'^2_-}, \qquad (45.9)$$

$$\beta'_+ = \frac{|\beta - \beta_0|}{1 - \beta\beta_0}, \quad \beta'_- = \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}. \qquad (45.10)$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas obtenemos para la densidad total de cargas la expresión

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta\beta_0}\right)^2}} - \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\lambda_0 (1 - \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2}} - \frac{\lambda_0 (1 + \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2}}.$$

Es fácil convencerse de que

$$(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2 = (1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2 =$$

$$= (1 - \beta_0^2) \times (1 - \beta^2).$$

Por consiguiente,

$$\lambda' = \frac{-2\lambda_0 \beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = \frac{-2\lambda_0 u v_0}{c^2 \sqrt{1 - v_0^2/c^2}\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (45.11)$$

De acuerdo con la fórmula (14.5), un hilo de longitud infinita, portador de una carga de densidad λ', crea un campo cuya intensidad a la distancia b del hilo es

$$E' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda'}{b}.$$

En este campo sobre la carga q actúa la fuerza

$$F' = qE' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 b}.$$

La sustitución de λ' por su valor (45.11) da (omitiendo el signo menos)

$$F' = \frac{q\lambda_0 u v_0}{\pi\varepsilon_0 b c^2 \sqrt{1-v_0^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} =$$

$$= qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \qquad (45.12)$$

(recordamos que $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$; véase (39.15)).

La expresión obtenida se diferencia de la (45.5) únicamente en el factor $1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$. Por consiguiente, se puede escribir que

$$F = F'\sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

donde F es la fuerza determinada por la expresión (45.5) y F', la fuerza definida por la expresión (45.12). La comparación con (45.6) muestra que F y F' son en esencia los valores de una misma fuerza determinados en los sistemas K y K'.

Señalaremos que en el sistema K'' que se moviera con respecto al K con una velocidad distinta de la velocidad v_0 de la carga, la fuerza que actuaría sobre esta última se compondría de las fuerzas eléctrica y magnética.

Los resultados que hemos obtenido significan que los campos eléctrico y magnético están ligados inseparablemente el uno con el otro y forman un campo electromagnético único. Eligiendo especialmente el sistema de referencia, el campo puede resultar puramente eléctrico o puramente magnético. Pero con respecto a otros sistemas de referencia, este mismo campo será el conjunto de los campos eléctrico y magnético.

En diferentes sistemas inerciales de referencia los campos eléctrico y magnético de un mismo conjunto de cargas resultan ser distintos. La deducción, que rebasa los marcos del curso de física general, conduce a las siguientes fórmulas de transformación de los campos al pasar del sistema de referencia K al sistema de referencia K' que se mueve con respecto a él con la velocidad $\mathbf{v}_0$:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ B'_x &= B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v_0 E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v_0 E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \qquad (45.13)$$

Aquí E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z son los componentes de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ que caracterizan el campo electromagnético en el sistema K; los símbolos análogos con apóstrofos son los componentes de los

vectores $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$, que caracterizan el campo en el sistema K'; con la letra β se designa la relación v_0/c.

Descomponiendo los vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ en sus componentes paralelos al vector $\mathbf{v}_0$ (y, por lo tanto, a los ejes x y x') y perpendiculares a él mismo (es decir, representando $\mathbf{E}$ en la forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp$ y así sucesivamente), se pueden escribir las fórmulas (45.13) en forma vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = \frac{\mathbf{E}_\perp + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel, \quad \mathbf{B}'_\perp = \frac{\mathbf{B}_\perp - (1/c^2)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{45.14}$$

En el sistema de unidades de Gauss las fórmulas (45.14) tienen la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = \frac{\mathbf{E}_\perp + (1/c)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel, \quad \mathbf{B}'_\perp = \frac{\mathbf{B}_\perp - (1/c)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{45.15}$$

En el caso en que $\beta \ll 1$ (es decir, $v_0 \ll c$), las fórmulas (45.14) se simplifican del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}'_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = \mathbf{E}_\perp + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]; \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel, \quad \mathbf{B}'_\perp = \mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\,[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]. \end{aligned}$$

Sumando dos a dos estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_\parallel + \mathbf{E}'_\perp = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp] = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_\parallel + \mathbf{B}'_\perp = \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp] = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]. \end{aligned} \tag{45.16}$$

Como los vectores $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{B}_\parallel$ son colineares, su producto vectorial es nulo. Por eso $[\mathbf{v}_0\mathbf{B}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\parallel] + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp] = [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]$. Análogamente, $[\mathbf{v}_0\mathbf{E}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]$. Teniendo esto en cuenta, a las fórmulas (45.16) se les puede dar la forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]. \tag{45.17}$$

Según estas fórmulas se transforman los campos si la velocidad relativa v_0 del sistema de referencia es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío c ($v_0 \ll c$).

En el sistema de Gauss las fórmulas (45.17) tienen la forma:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]. \tag{45.18}$$

En el ejemplo considerado al principio de este párrafo, en el sistema K, en que la carga q se movía paralelamente al conductor

con corriente a la velocidad $\mathbf{v}_0$, sólo existía el campo magnético $\mathbf{B}_\perp$ perpendicular a $\mathbf{v}_0$; los componentes $\mathbf{B}_\parallel$, $\mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{E}_\parallel$ eran nulos. De acuerdo con las fórmulas (45.14), en el sistema K', en que la carga q estaba en reposo (este sistema se mueve con respecto al K a la velocidad $\mathbf{v}_0$), se observa el componente $\mathbf{B}'_\perp$, igual a $\mathbf{B}_\perp/\sqrt{1-\beta^2}$, y, además, el componente perpendicular del campo eléctrico $\mathbf{E}'_\perp = [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]/\sqrt{1-\beta^2}$.

En el sistema K sobre la carga actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = q\,[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]. \tag{45.19}$$

Como la carga q está en reposo en el sistema K', sobre ella sólo actúa en este sistema la fuerza eléctrica

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'_\perp = \frac{q\,[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.20}$$

La comparación de las fórmulas (45.19) y (45.20) da $\mathbf{F} = \mathbf{F}'\sqrt{1-\beta^2}$, que coincide con (45.6).

§ 46. Circuito con corriente en un campo magnético

Veamos cómo se comporta un circuito con corriente en un campo magnético. Empecemos por el caso de un campo homogéneo ($\mathbf{B} = \text{const}$). De acuerdo con (44.5) sobre cada elemento $d\mathbf{l}$ del circuito actúa una fuerza

$$d\mathbf{F} = I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]. \tag{46.1}$$

La resultante de estas fuerzas será

$$\mathbf{F} = \oint I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]. \tag{46.2}$$

Sacando fuerza del signo de integral las magnitudes constantes I y $\mathbf{B}$, obtenemos

$$\mathbf{F} = I\left[\left(\oint d\mathbf{l}\right),\ \mathbf{B}\right].$$

La integral $\oint d\mathbf{l}$ es nula, por lo tanto, $\mathbf{F} = 0$. De este modo, la fuerza resultante que actúa sobre el circuito con corriente en el campo magnético homogéneo es nula. Esto es justo para circuitos de cualquier forma (incluso no planos) situados arbitrariamente con respecto a la dirección del campo. Para que la fuerza resultante sea nula sólo importa que el campo sea homogéneo.

En adelante nos limitaremos a estudiar los circuitos planos. Calculemos el momento de rotación resultante que crean las fuerzas (46.1) aplicadas al circuito. Como en un campo homogéneo la suma de estas fuerzas es nula, el momento resultante con relación a cualquier punto será el mismo. En efecto, el momento resultante con

respecto a cierto punto O se determina por la expresión

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{r},\ d\mathbf{F}],$$

en la que $\mathbf{r}$ es el radio vector trazado desde el punto O hasta el punto de aplicación de la fuerza $d\mathbf{F}$. Tomemos otro punto O' desplazado con respecto al O un segmento $\mathbf{b}$. Entonces $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'$, y, respectivamente, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$. Por eso el momento resultante con relación al punto O' será

$$\mathbf{N}' = \int [\mathbf{r}',\ d\mathbf{F}] = \int [(\mathbf{r} - \mathbf{b}),\ d\mathbf{F}] = \int [\mathbf{r},\ d\mathbf{F}] - \int [\mathbf{b},\ d\mathbf{F}] = \mathbf{N} - [\mathbf{b},\ d\mathbf{F}] = \mathbf{N}$$

$\left(\int d\mathbf{F} = 0\right)$. Los momentos calculados con respecto a dos puntos O y O' tomados arbitrariamente han resultado coincidentes. De aquí concluimos que el momento no depende de la elección del punto con respecto al cual se toma (compárese con un par de fuerzas).

Consideremos un circuito plano arbitrario, con corriente, que se halle en un campo magnético homogéneo $\mathbf{B}$. Supongamos que el circuito está orientado de tal modo que la normal positiva $\mathbf{n}$ a él es perpendicular al vector $\mathbf{B}$ (fig. 46.1). Se llama positiva la normal, cuyo sentido está relacionado con el de la corriente en el circuito mediante la regla del sacacorchos.

Dividamos el área abarcada por el circuito en franjas estrechas, paralelas a la dirección del vector $\mathbf{B}$, de anchura dy (véase la fig. 46.1, a; en la fig. 46.1, b una de estas franjas se representa aumentada).

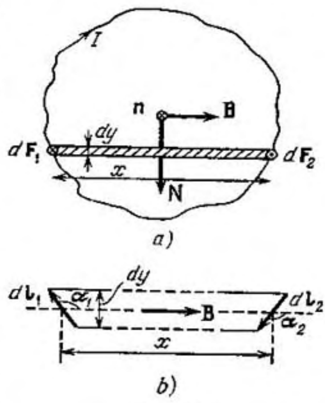


Fig. 46.1.

Sobre el elemento de circuito dl_1, que limita la franja por la izquierda, actúa la fuerza $d\mathbf{F}_1$, dirigida hacia detrás de la figura. El módulo de esta fuerza es $dF_1 = IB\ dl_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = IB\ dy$ (véase la fig. 46.1, b). Sobre el elemento del circuito $d\mathbf{l}_2$, que limita la franja por la derecha, actúa la fuerza $d\mathbf{F}_2$, dirigida hacia nosotros. El módulo de esta fuerza es $dF_2 = IB\ dl_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = IB\ dy$. El resultado obtenido significa que las fuerzas aplicadas a los elementos opuestos del circuito $d\mathbf{l}_1$ y $d\mathbf{l}_2$ forman un par, cuyo momento es

$$dN = IBx\ dy = IB\ dS$$

(dS es el área de la franja). En la fig. 46.1 se ve que el vector $d\mathbf{N}$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{B}$ y, por consiguiente, se puede escribir en la forma

$$d\mathbf{N} = I\,[\mathbf{nB}]\,dS.$$

Efectuando la suma de esta expresión extendida a todas las franjas, obtenemos el momento de rotación que actúa sobre el circuito:

$$\mathbf{N} = \int I\,[\mathbf{nB}]\,dS = I\,[\mathbf{nB}]\int dS = I\,[\mathbf{nB}]\,S \qquad (46.3)$$

(el campo se supone homogéneo, por lo que el producto $[\mathbf{nB}]$ es igual para todas las franjas y puede sacarse fuera del signo integral). La magnitud S que figura en la expresión (46.3) es el área abarcada por el circuito.

La expresión (46.3) se puede representar en la forma

$$\mathbf{N} = [(IS\mathbf{n}),\ \mathbf{B}]. \qquad (46.4)$$

Esta fórmula es semejante a la (9.12), que determina el momento de rotación que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

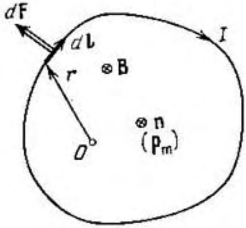


Fig. 46.2.

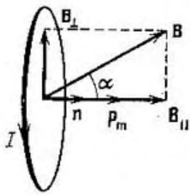


Fig. 46.3.

De análogo de $\mathbf{E}$ hace las veces en (46.4) el vector $\mathbf{B}$, y de análogo del momento eléctrico dipolar $\mathbf{p}$, la expresión $IS\mathbf{n}$. Esto ha servido de base para llamar la magnitud

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} \qquad (46.5)$$

momento magnético dipolar del circuito con corriente. El sentido del vector $\mathbf{p}_m$ coincide con el de la normal positiva al circuito.

Utilizando la designación (46.5), la fórmula (46.4) se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m,\ \mathbf{B}] \quad (\mathbf{p}_m \perp \mathbf{B}). \qquad (46.6)$$

Supongamos ahora que el sentido del vector $\mathbf{B}$ coincide con el de la normal positiva $\mathbf{n}$ al circuito y, por lo tanto, con el del vector $\mathbf{p}_m$ (fig. 46.2). En este caso las fuerzas que actúan sobre los

distintos elementos del circuito se encuentran en un plano, en el del circuito. La fuerza que actúa sobre el elemento $d\mathbf{l}$ del circuito se determina por la expresión (46.1). Calculemos el momento resultante de todas estas fuerzas con respecto a un punto O que se encuentre en el plano del circuito:

$$\mathbf{N} = \int d\mathbf{N} = \int [\mathbf{r},\ d\mathbf{F}] = I \oint [\mathbf{r},\ [d\mathbf{l}\ \mathbf{B}]]$$

($\mathbf{r}$ es el radio vector trazado desde el punto O hacia el elemento $d\mathbf{l}$). Transformamos la expresión subintegral según la fórmula «bac menos cab» (véase la fórmula (2.35) del tomo 1°). Como resultado obtenemos

$$\mathbf{N} = I \left\{ \oint (\mathbf{rB})\, d\mathbf{l} - \oint \mathbf{B}\, (\mathbf{r},\ d\mathbf{l}) \right\}.$$

La primera integral es nula debido a que los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares entre sí. El producto escalar bajo el signo de la segunda integral es igual a $r\,dr = {}^1/_2 d\,(r^2)$. Por eso la segunda integral se puede representar en la forma

$$^1/_2 \mathbf{B} \oint d\,(r^2).$$

Bajo el signo de integral se encuentra la diferencial total de la función r^2. La suma de los incrementos de una función sobre un camino cerrado es nula. Por lo tanto, el segundo sumando de la expresión de $\mathbf{N}$ también es nulo. De este modo, hemos demostrado que el momento resultante $\mathbf{N}$ con respecto a un punto cualquiera O que se encuentre en el plano del circuito, es nulo. Este mismo valor tiene el momento resultante con respecto a todos los otros puntos (véase más atrás).

Así, en el caso en que los vectores $\mathbf{p}_m$ y $\mathbf{B}$ tienen el mismo sentido, las fuerzas magnéticas que actúan sobre las distintas partes del circuito no tienden a hacerlo girar ni a moverlo de su sitio; estas fuerzas sólo tienden a extender el circuito en su plano. Si los vectores $\mathbf{p}_m$ y $\mathbf{B}$ tienen sentidos opuestos, las fuerzas magnéticas tienden a contraer el circuito.

Supongamos que las direcciones de los vectores $\mathbf{p}_m$ y $\mathbf{B}$ forman un ángulo arbitrario α (fig. 46.3). Descomponemos la inducción magnética $\mathbf{B}$ en dos componentes: $\mathbf{B}_{\parallel}$, paralela al vector $\mathbf{p}_m$, y $\mathbf{B}_{\perp}$, perpendicular a él, y analizamos la acción de cada componente por separado. La componente $\mathbf{B}_{\parallel}$ condicionará las fuerzas que extienden o comprimen el circuito. La componente $\mathbf{B}_{\perp}$, cuya magnitud es igual a B sen α, hace que aparezca un momento de rotación que puede calcularse por la fórmula (46.6):

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m,\ \mathbf{B}_{\perp}].$$

tica en el centro de la corriente circular tiene la magnitud

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{R^3}. \qquad (47.1)$$

En la fig. 47.1 se ve que el sentido del vector **B** coincide con el de la normal positiva al circuito, o sea, con el sentido del vector $\mathbf{p}_m$. Por eso la fórmula (47.1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}. \qquad (47.2)$$

Ahora hallamos **B** sobre el eje de la corriente circular a una distancia r del centro del circuito (fig. 47.2). Los vectores $d\mathbf{B}$ son perpendiculares a los planos que pasan por los respectivos elementos $d\mathbf{l}$ y por el punto en que buscamos el campo. Por lo tanto, forman un abanico cónico simétrico (fig. 47.2, *b*). Por las razones de simetría se puede deducir que el vector **B** resultante está dirigido a lo largo del eje del circuito. Cada uno de los componentes de los vectores $d\mathbf{B}$ hace al vector resultante la aportación $d\mathbf{B}_{\parallel}$, igual en módulo a dB sen $\beta = dB\,(R/b)$. El ángulo α entre $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{b}$ es recto, por lo que

$$dB_{\parallel}=dB\frac{R}{b}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{b^2}\frac{R}{b}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,dl}{b^3}.$$

Integrando a lo largo de todo el circuito y sustituyendo b por $\sqrt{R^2+r^2}$, obtenemos

$$B=\int dB_{\parallel}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{b^3}\oint dl=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{b^3}2\pi R=$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\,(I\pi R^2)}{(R^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{(R^2+r^2)^{3/2}}. \qquad (47.3)$$

Esta fórmula determina la magnitud de la inducción magnética sobre el eje de la corriente circular. Tomando en consideración que los vectores **B** y $\mathbf{p}_m$ tienen el mismo sentido, se puede escribir la fórmula (47.3) en forma vectorial:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+r^2)^{3/2}}. \qquad (47.4)$$

Esta expresión no depende del signo de r. Por consiguiente, en los puntos del eje simétricos respecto del centro de la corriente, **B** tiene la misma magnitud y dirección.

Cuando $r = 0$ la fórmula (47.4) se transforma, como debe ser, en la (47.2) de la inducción magnética en el centro de la corriente circular.

A grandes distancias del circuito, en el denominador se puede despreciar R^2 en comparación con r^2. Entonces la fórmula (47.4) toma la forma

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{r^3}\ \text{(sobre el eje de la corriente)} \qquad (47.5)$$

análoga a la expresión (9.9) de la intensidad del campo eléctrico sobre el eje de un dipolo.

Un cálculo, que rebasa los marcos de este libro, da, que a todo sistema de corrientes o de cargas en movimiento localizado en una parte limitada del espacio se le puede atribuir un momento magnético dipolar $\mathbf{p}_m$ (compárese con el momento eléctrico dipolar de un sistema de cargas). El campo magnético de este sistema a distancias grandes, en comparación con sus dimensiones, se determina mediante $\mathbf{p}_m$ por las mismas fórmulas que sirven para determinar el momento eléctrico dipolar del campo de un sistema de cargas a grandes distancias (véase el § 10). En particular el, campo de un circuito plano de forma cualquiera a grandes distancias tiene la forma

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}, \tag{47.6}$$

donde r es la distancia desde el circuito al punto dado, y ϑ, el ángulo entre la dirección del vector $\mathbf{p}_m$ y dirección desde el circuito al punto dado del campo (compárese con la fórmula (9.7)). Cuando $\vartheta=0$, la fórmula (47.6) da para el módulo del vector $\mathbf{B}$ el mismo valor que la fórmula (47.5).

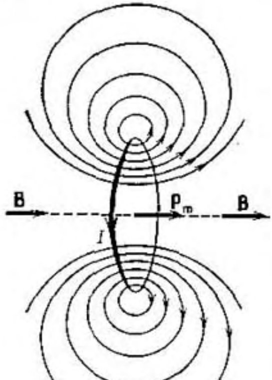


Fig. 47.3.

En la fig. 47.3 se representan las líneas de inducción magnética de una corriente circular. Se muestran solamente las líneas que se encuentran en uno de los planos que pasan por el eje de la corriente. Una figura semejante tiene lugar en cualquiera de estos planos.

De todo lo dicho en el párrafo anterior y en éste se infiere que el momento magnético dipolar es una característica muy importante de un circuito con corriente. Esta característica se determina tanto por el campo creado por el circuito como por el comportamiento del circuito en un campo magnético exterior.

§ 48. Trabajo realizado al desplazar una corriente en un campo magnético

Examinemos un circuito con corriente formado por dos conductores fijos y un puente móvil de longitud l que se desliza por ellos (fig. 48.1). Supongamos que este circuito se halla en un campo magnético exterior que consideraremos homogéneo y perpendicular al

plano del circuito. Si el sentido de la corriente y el del campo son los que se indican en la fig. 48.1, *a*, la fuerza **F** que actúa sobre el puente estará dirigida hacia la derecha y será

$$F = IBl.$$

Cuando el puente se traslada hacia la derecha a una distancia dh, esta fuerza realiza el trabajo positivo

$$dA = F\,dh = I\,Bl\,dh = IB\,dS, \qquad (48.1)$$

donde dS es el área rayada (véase la fig. 48.1, *a*).

Veamos cómo varía, al trasladar el puente, el flujo de inducción magnética Φ a través del área del circuito con corriente. Convenga-

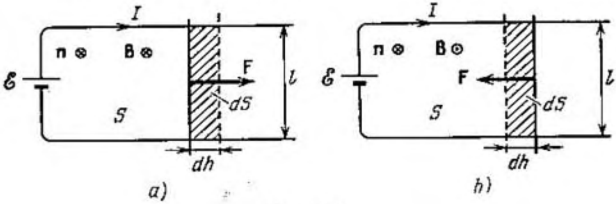


Fig. 48.1.

mos que al hacer el cálculo de dicho flujo siempre se tomará como n en la expresión

$$\Phi = \int \mathbf{Bn}\,dS$$

la normal positiva, es decir, la normal que forma con el sentido de la corriente en el circuito un sistema dextrógiro (véase el § 46). Entonces, en el caso representado en la fig. 48.1, *a*, el flujo será positivo e igual a BS (S es el área del circuito). Cuando el puente se traslada hacia la derecha, el área del circuito adquiere un incremento positivo dS. Como resultado el flujo también recibe un incremento positivo $d\Phi = B\,dS$. Por eso la expresión (48.1) se puede representar en la forma

$$dA = I\,d\Phi. \qquad (48.2)$$

Si la dirección del campo es hacia nosotros (fig. 48.1, *b*), la fuerza que actúa sobre el puente estará dirigida hacia la izquierda. Por eso, cuando el puente se traslada hacia la derecha a una distancia dh, la fuerza magnética realiza un trabajo negativo

$$dA = -I\,Bl\,dh = -IB\,dS. \qquad (48.3)$$

En este caso el flujo a través del circuito es $-BS$. Al aumentar el área del circuito en dS, el flujo recibe el incremento $d\Phi = -B\,dS$.

Por consiguiente, la expresión (48.3) también se puede escribir en la forma (48.2).

La magnitud $d\Phi$ en la expresión (48.2) se puede interpretar como el flujo a través de la superficie que describe el puente durante su movimiento. Respectivamente, se puede decir que el trabajo que realiza la fuerza magnética sobre un trozo de circuito con corriente es igual al producto de la intensidad de la corriente por la magnitud del flujo magnético a través de la superficie que describe dicho trozo al moverse.

Las fórmulas (48.1) y (48.3) se pueden unificar en una expresión vectorial. Para esto equiparamos el puente con un vector **l** que tiene

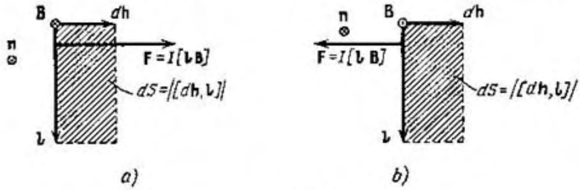


Fig. 48.2.

el sentido de la corriente (fig. 48.2). Independientemente del sentido que tenga el vector **B** (de nosotros hacia la figura o de ésta hacia nosotros), la fuerza que actúa sobre el puente se puede representar en la forma

$$\mathbf{F} = I\,[\mathbf{lB}].$$

Al trasladarse el puente una distancia $d\mathbf{h}$, la fuerza realiza el trabajo

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{h} = I\,[\mathbf{lB}]\,d\mathbf{h}.$$

Efectuamos en el producto mixto de vectores la permutación cíclica de los factores (véase la fórmula (2.34) del tomo 1°). Como resultado obtenemos

$$dA = I\mathbf{B}\,[d\mathbf{h},\,\mathbf{l}]. \tag{48.4}$$

En la fig. 48.2 se ve que el producto vectorial $[d\mathbf{h},\,\mathbf{l}]$ es igual en magnitud al área dS que describe el puente al moverse y tiene el sentido de la normal positiva **n**. Por lo tanto,

$$dA = I\mathbf{Bn}\,dS. \tag{48.5}$$

En el caso representado en la fig. 48.2, *a*, $\mathbf{Bn} = B$ y llegamos a la fórmula (48.1). Y en el caso que muestra la fig. 48.2, *b*, $\mathbf{Bn} = -B$ y se llega a la fórmula (48.3).

La expresión $\mathbf{Bn}\,dS$ determina el incremento del flujo magnético a través del circuito, condicionado por la traslación del puente. De

este modo, la fórmula (48.5) se puede escribir en la forma (48.2). Pero la fórmula (48.5) tiene ventaja frente a la (48.2) porque de ella se obtiene «automáticamente» el signo de $d\Phi$ y, por consiguiente, el signo de dA.

Consideremos un circuito rígido o deformable que, estando en un campo magnético, se traslada de cierta posición inicial a otra final que se diferencia infinitamente poco de la primera. La intensidad de la corriente I en el circuito admitiremos que es constante durante la traslación. Supongamos que un elemento $d\mathbf{l}$ del circuito sufre una traslación arbitraria que podemos figurárnosla como un desplazamiento paralelo a sí mismo en un espacio $d\mathbf{h}$, seguido del giro en un ángulo $d\varphi$ (fig. 48.3). En este caso el elemento $d\mathbf{l}$ describe un área igual a

$$|[d\mathbf{h},\ d\mathbf{l}]| + \frac{1}{2}\, dl^2\, d\varphi.$$

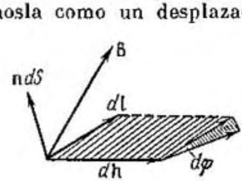


Fig. 48.3.

El segundo sumando es de orden de pequeñez más alto que el primero. El trabajo realizado sobre $d\mathbf{l}$ es proporcional al flujo magnético a través de la superficie descrita por $d\mathbf{l}$ (véase más atrás). Por eso el trabajo de giro del elemento $d\mathbf{l}$ es de un orden de pequeñez más alto que el trabajo de desplazamiento de avance, por lo que se puede despreciar.

De este modo, al calcular el trabajo se puede despreciar el giro del elemento $d\mathbf{l}$ en el ángulo $d\varphi$ y considerar que el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre el elemento de circuito es

$$dA_{\text{e}} = I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]\, d\underline{h} \tag{48.6}$$

Aquí $\mathbf{B}$ es la inducción magnética en el sitio en que se encuentra el elemento de circuito $d\mathbf{l}$.

Realizando en (48.6) la permutación cíclica de los factores, obtenemos

$$dA_{\text{el}} = I\mathbf{B}\,[d\bar{h},\ d\mathbf{l}]. \tag{48.7}$$

El módulo del producto vectorial $[d\underline{h},\ d\mathbf{l}]$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores $d\mathbf{h}$ y $d\mathbf{l}$, es decir, al área dS que describe el elemento $d\mathbf{l}$ al desplazarse. El sentido del producto vectorial coincide con el de la normal positiva a la superficie dS. Por consiguiente,

$$\mathbf{B}\,[d\mathbf{h},\ d\mathbf{l}] = \mathbf{B}\mathbf{n}\, dS = d\Phi_{\text{el}}, \tag{48.8}$$

donde $d\Phi_{\text{el}}$ es el incremento del flujo magnético a través del circuito, debido al desplazamiento del elemento $d\mathbf{l}$.

Teniendo en cuenta la igualdad (48.8), escribimos (48.7) en la forma

$$dA_{\text{el}} = I\, d\Phi_{\text{el}}. \tag{48.9}$$

Efectuando la suma de la expresión (48.9) extendida a todos los elementos del circuito, obtenemos la expresión del trabajo de las fuerzas magnéticas en una traslación arbitraria infinitesimal del circuito:

$$dA = \int dA_{el} = \int I\, d\Phi_{el} = I \int d\Phi_{el} = I\, d\Phi \qquad (48.10)$$

($d\Phi$ es el incremento total del flujo a través del circuito).

Para hallar el trabajo realizado en una traslación arbitraria, finita, del circuito, efectuamos la suma de la expresión (48.10) extendida a todos los desplazamientos elementales:

$$A_{12} = \int dA = I \int d\Phi = I\,(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (48.11)$$

Aquí Φ_1 y Φ_2 son los valores del flujo magnético a través del circuito en las posiciones inicial y final. Así, el trabajo que realizan las fuerzas magnéticas sobre el circuito es igual al producto de la intensidad de la corriente por el incremento del flujo magnético a través de dicho circuito.

En particular, al girar un circuito plano en un campo homogéneo desde la posición en que los vectores $\mathbf{p}_m$ y $\mathbf{B}$ tienen sentidos opuestos (en esta posición $\Phi = -BS$), hasta la posición en la cual estos vectores tienen el mismo sentido (en ella $\Phi = BS$), las fuerzas magnéticas realizan sobre el circuito el trabajo

$$A = I\,\{BS - (-BS)\} = 2IBS.$$

Este mismo resultado se obtiene valiéndose de la expresión (46.10) de la energía potencial del circuito en el campo magnético:

$$A = W_{\text{inic}} - W_{\text{fin}} = p_m B - (-p_m B) = 2p_m B = 2ISB$$

$(p_m = IS)$.

Advertimos que el trabajo (48.11) se realiza no a expensas de la energía del campo magnético exterior, sino a expensas de la fuente que mantiene invariable la corriente en el circuito. En el § 61 se demostrará que si se producen variaciones del flujo magnético que atraviesa el circuito, en este último surge una f.e.m. de inducción $\mathscr{E}_i = -(d\Phi/dt)$. Por consiguiente, la fuente, además del trabajo que se gasta en el desprendimiento del calor de Lentz-Joule, debe realizar un trabajo adicional contra la f.e.m. de inducción, el cual se determina por la expresión

$$A = \int dA = -\int \mathscr{E}_i I\, dt = \int \frac{d\Phi}{dt} I\, dt = \int I\, d\Phi = I\,(\Phi_2 - \Phi_1),$$

que coincide con (48.11).

§ 49. Divergencia y rotor de un campo magnético

La ausencia en la naturaleza de cargas magnéticas[1]) conduce a que las líneas del vector **B** no tengan principio ni fin. Por eso, de acuerdo con la fórmula (11.10), el flujo del vector **B** a través de una superficie cerrada debe ser nulo. De este modo, cualquiera que sea el campo magnético y la superficie cerrada arbitraria S, tiene lugar la condición

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0. \tag{49.1}$$

Esta fórmula expresa el *teorema de Gauss* para el vector **B**: *el flujo del vector inducción magnética a través de cualquier superficie cerrada es nulo.*

Sustituyendo, de acuerdo con (11.41), la integral de superficie de (49.1) por la de volumen, se obtiene que

$$\int_V \nabla\mathbf{B}\, dV = 0.$$

La condición a que hemos llegado debe cumplirse cualquiera que sea el volumen V elegido arbitrariamente. Esto sólo es posible en el caso en que la función subintegral sea nula en cada punto del campo. Por lo tanto, el campo magnético tiene la propiedad de que su divergencia es nula en todas partes:

$$\nabla\mathbf{B} = 0. \tag{49.2}$$

Ahora recurrimos a la circulación del vector **B**. Por definición, la circulación es igual a la integral

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l}. \tag{49.3}$$

Lo más fácil es calcular esta integral en el caso del campo de una corriente directa. Supongamos que un circuito cerrado se encuentra en un plano perpendicular a la corriente (fig. 49.1); la corriente es perpendicular al plano de la figura y está dirigida hacia detrás del dibujo). En cada punto del circuito el vector **B** es tangencial a la circunferencia que pasa por este punto. Sustituimos en la expresión de la inducción **B** $d\mathbf{l}$ por $B\, dl_B$ (dl_B es la proyección del elemento de circuito sobre la dirección del vector **B**). En la figura se ve que dl_B es igual a $b\, d\alpha$, siendo b la distancia desde el conductor con corriente hasta $d\mathbf{l}$, y $d\alpha$, el ángulo en que gira la recta radial al desplazarse a lo largo del circuito la distancia $d\mathbf{l}$. De este modo, y sustituyendo

[1]) P. Dirac expuso la hipótesis de que en la naturaleza deben existir cargas magnéticas (llamadas *monopolos de Dirac*). Las búsquedas de estas cargas aún no han dado ningún resultado, de modo que el problema de la existencia de los monopolos de Dirac sigue sin resolver.

B por su valor según la expresión (42.5), obtenemos

$$\mathbf{B}\,d\mathbf{l} = B\,dl_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}\,b\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\alpha. \qquad (49.4)$$

Teniendo en cuenta la igualdad (49.4), tenemos que

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\alpha. \qquad (49.5)$$

Al recorrer el circuito que abarca la corriente, la recta radial gira todo el tiempo en un sentido, por eso $\oint d\alpha = 2\pi$. De otro modo se plantea la cuestión si la corriente no es abarcada por el circuito

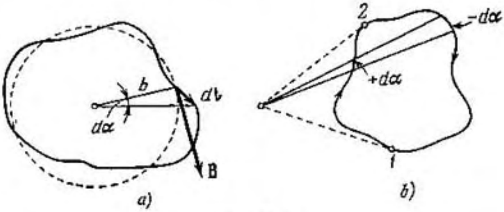


Fig. 49.1.

(fig. 49.1, b). En este caso al recorrer el circuito, la recta radial gira primero en un sentido (trozo 1—2) y luego en el opuesto (trozo 2—1), debido a lo cual $\oint d\alpha$ es nula. Teniendo en cuenta este resultado se puede escribir

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 I, \qquad (49.6)$$

donde por I debe entenderse la corriente abarcada por el circuito. Si el circuito no abarca la corriente, la circulación del vector **B** es nula.

El signo de la expresión (49.6) depende del sentido en que sea recorrido el circuito (en este mismo sentido se mide el ángulo α). Si el sentido del recorrido forma con el de la corriente un sistema dextrógiro, la magnitud (49.6) es positiva; en el caso contrario, negativa. El signo puede tenerse en cuenta suponiendo que I es una magnitud algebraica, en esto deberá considerarse positiva la corriente cuya dirección esté relacionada con el sentido en que sea recorrido el circuito por medio de la regla del sacacorchos; la corriente de sentido contrario será negativa.

Valiéndose de la relación (49.6) es fácil recordar la fórmula (42.5) para B del campo de la corriente directa. Figurémonos un circuito plano en forma de una circunferencia del radio b (fig. 49.2). En cada

punto de este circuito el vector **B** tiene la misma magnitud y su dirección es tangencial a la circunferencia. Por consiguiente, la circulación es igual al producto de **B** por la longitud de la circunferencia $2\pi b$, y la relación (49.6) tiene la forma

$$B \cdot 2\pi b = \mu_0 I.$$

De aquí, $B = \mu_0 I / 2\pi b$ (compárese con (42.5)).

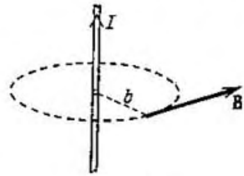


Fig. 49.2.

El caso de un circuito no plano (fig. 49.3) se diferencia del estudiado más arriba de circuito plano en que, al trasladarse a lo largo del circuito, la recta radial no sólo gira alrededor del conductor, sino que también se desplaza a lo largo de él. Todos los cálculos que nos condujeron a la fórmula (49.6) siguen siendo válidos si por $d\alpha$ se entiende el ángulo en que gira la proyección de la recta radial sobre un plano perpendicular a la corriente. El ángulo total de giro de esta proyección es igual a 2π, si el circuito abarca la corriente, y a cero en el caso contrario. Por lo tanto volvemos a la fórmula (49.6).

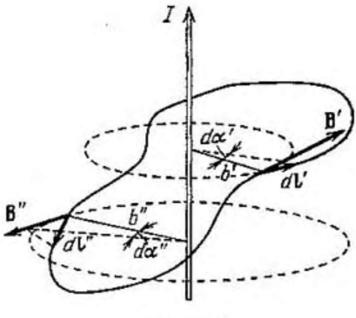


Fig. 49.3.

La fórmula (49.6) la hemos obtenido para el caso de una corriente directa. Se puede demostrar que es también válida para una corriente que pase por un conductor de forma arbitraria, por ejemplo, para una corriente circular.

Supongamos que cierto circuito abarca varios conductores con corriente. En virtud del principio de superposición (véase (40.1))

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \oint \left(\sum_k \mathbf{B}_k \right) d\mathbf{l} = \sum_k \oint \mathbf{B}_k\, d\mathbf{l}.$$

Cada una de las integrales de esta suma es igual a $\mu_0 I_k$. Por lo tanto,

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k I_k \tag{49.7}$$

(recordamos que I_k es una magnitud algebraica).

Si las corrientes pasan por todo el espacio en que se encuentra el circuito, la suma algebraica de las corrientes abarcadas por el

circuito se puede representar en la forma

$$\sum_k I_k = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{jn}\, dS. \qquad (49.8)$$

La integral se toma sobre una superficie arbitraria S extendida sobre el circuito. El vector $\mathbf{j}$ es la densidad de la corriente en el punto en que se encuentra la superficie dS, y $\mathbf{n}$, la normal positiva a esta superficie (es decir, la normal que forma con el sentido en que se recorre el circuito al calcular la circulación un sistema dextrógiro).

Sustituyendo en (49.7) la suma de las corrientes por la expresión (49.8), obtenemos

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Transformando el primer miembro según el teorema de Stokes, llegamos a la igualdad

$$\int_S [\nabla \mathbf{B}]\, d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

La igualdad obtenida debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S elegida sobre la cual se toma la integral. Esto sólo es posible si las funciones subintegrales tienen en cada punto los mismos valores. De este modo, llegamos a la conclusión de que el rotor del vector de inducción magnética es proporcional al vector de intensidad de corriente en el punto dado:

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}. \qquad (49.9)$$

El coeficiente de proporcionalidad en el SI es igual a μ_0.

Advertimos que las fórmulas (49.7) y (49.9) son válidas únicamente para un campo en el vacío en ausencia de campos eléctricos que varíen con el tiempo.

Así, pues, hemos hallado la divergencia y el rotor de un campo magnético en el vacío. Comparemos las fórmulas obtenidas con las análogas del campo electrostático en el vacío. Según (13.5), (12.3), (49.2) y (49.9)

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad\qquad [\nabla \mathbf{E}] = 0$$

(la divergencia de $\mathbf{E}$ es igual a ρ dividido por ε_0) (el rotor de $\mathbf{E}$ es nulo)

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \qquad\qquad [\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}$$

(la divergencia de $\mathbf{B}$ es nula) (el rotor de $\mathbf{B}$ es igual $\mathbf{j}$ multiplicada por μ_0).

La comparación de estas fórmulas muestra que los campos electrostático y magnético tienen caracteres esencialmente distintos.

El rotor del campo electrostático es nulo; por lo tanto el campo electrostático es irrotacional o de potencial y puede ser caracterizado por el potencial escalar φ. El rotor del campo magnético en aquellos puntos donde hay corriente es distinto de cero. Respectivamente, la circulación del vector **B** es proporcional a la corriente abarcada por el circuito. Por eso al campo magnético no puede atribuírsele un potencial escalar que esté ligado con **B** por medio de una relación análoga a (8.2). Este potencial no sería unívoco, a cada recorrido del circuito y retorno al punto de partida recibiría un incremento igual a $\mu_0 I$. Un campo cuyo rotor es distinto de cero se llama *rotacional* o *solenoidal*.

Como la divergencia del vector **B** es en todas partes nula, este vector puede representarse en forma de rotor de cierta función **A**:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] \tag{49.10}$$

(la divergencia de un rotor es siempre nula; véase (11.39)). La función **A** se denomina *potencial vectorial* o *potencial vector* del campo magnético. El estudio del potencial vectorial rebasa los límites de este libro.

§ 50. Campo de un solenoide y de un toroide

Un solenoide es un conductor arrollado a un armazón cilíndrico redondo. Las líneas **B** del campo del solenoide tienen aproximadamente el aspecto que muestra la fig. 50.1. Dentro del solenoide el sentido de las líneas forma con el de la corriente en las espiras un sistema dextrógiro.

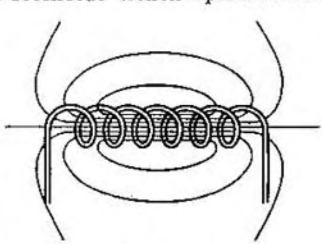


Fig. 50.1.

En un solenoide real existe una componente de la corriente a lo largo del eje. Además, la densidad lineal de la corriente j_{lin} (igual a la razón de la intensidad de la corriente dI al elemento de longitud del solenoide dl) varía periódicamente al desplazarse a lo largo del solenoide. El valor medio de esta densidad es

$$\langle j_{\text{lin}} \rangle = \left\langle \frac{dI}{dl} \right\rangle = nI, \tag{50.1}$$

donde n es el número de espiras del solenoide correspondientes a su unidad de longitud, e I, la intensidad de la corriente en el solenoide.

En el estudio del electromagnetismo desempeña un gran papel el solenoide imaginario de longitud infinita, en el cual no existe componente axial de la corriente y en el que, además, la densidad lineal

de la corriente j_{lin} es constante en toda su longitud. La causa de esto consiste en que el campo de dicho solenoide es homogéneo y está limitado por el volumen de éste (análogamente a como el campo eléctrico de un condensador plano infinito es homogéneo y está limitado por el volumen del condensador).

De acuerdo con lo dicho representamos el solenoide en forma de un cilindro infinito de paredes delgadas, alrededor de las cuales fluye una corriente de densidad lineal constante

$$j_{lin} = nI. \tag{50.2}$$

Dividimos el cilindro en corrientes circulares iguales, «espiras». En la fig. 50.2 se ve que cada par de espiras, situadas simétricamente

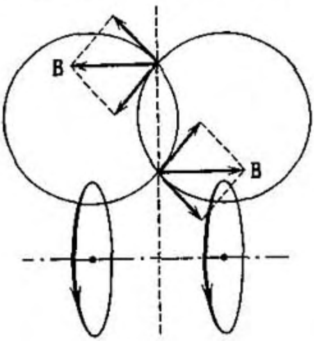


Fig. 50.2.

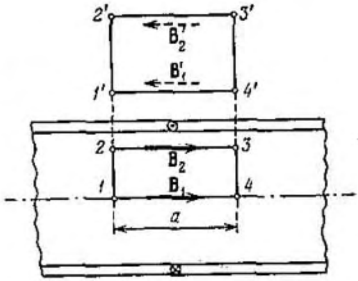


Fig. 50.3.

respecto de cierto plano perpendicular al eje del solenoide, crea en cualquier punto de dicho plano una inducción magnética paralela al eje. Por consiguiente, también el campo resultante en cualquier punto dentro o fuera del solenoide infinito puede tener solamente dirección paralela al eje.

De la fig. 50.1 se infiere que los sentidos del campo dentro y fuera del solenoide infinito son opuestos. Cuando aumenta la longitud del solenoide, los sentidos de los campos no varían y en el límite, cuando $l \to \infty$, siguen siendo opuestos. En el solenoide infinito, lo mismo que en el finito, el sentido del campo dentro de éste forma con el sentido en que fluye la corriente alrededor del cilindro un sistema dextrógiro.

Del paralelismo del vector **B** al eje se deduce que el campo, tanto dentro como fuera del solenoide infinito, debe ser homogéneo. Para demostrar esto, tomamos dentro del solenoide un contorno rectangular imaginario *1—2—3—4* (fig. 50.3; el trozo *4—1* va por el eje del

solenoide). Recorriendo el contorno en el sentido de las agujas del reloj, obtenemos que la circulación del vector **B** tiene el valor $(B_2 - B_1)\,a$. El contorno no abarca corrientes, por lo que la circulación debe ser nula (véase (49.7)). De aquí se sigue que $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. Situando la parte *2—3* del contorno a cualquier distancia del eje, cada vez obtenemos que la inducción magnética $\mathbf{B}_2$ a esta distancia es igual a la inducción $\mathbf{B}_1$ sobre el eje del solenoide. De este modo, la homogeneidad del campo dentro del solenoide está demostrada.

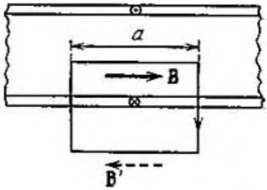


Fig. 50.4.

Recurramos ahora al contorno *1'—2'—3'—4'*. Hemos representado los vectores $\mathbf{B}'_1$ y $\mathbf{B}'_2$ con línea de trazos porque, como se aclarará más adelante, el campo fuera de un solenoide infinito es nulo. Por ahora sólo sabemos que el posible sentido del campo fuera del solenoide es contrario al del campo dentro de éste. El contorno *1'—2'—3'—4'* no abarca corrientes; por lo tanto la circulación del vector **B'** a lo largo de este contorno es igual a $(\mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}'_2)\,a$ y debe ser nula. De aquí se infiere que $\mathbf{B}'_1 = \mathbf{B}'_2$. Las distancias desde el eje del solenoide hasta los trozos *1'—4'* y *2'—3'* fueron tomadas arbitrariamente. Por lo tanto, el valor de **B'** a cualquier distancia del eje será, fuera del solenoide, el mismo. De esta forma resulta demostrada también la homogeneidad del campo fuera del solenoide.

La circulación a lo largo del contorno representado en la fig. 50.4 es igual a $a\,(B + B')$ (para el recorrido en sentido horario). Este contorno abarca una corriente positiva de magnitud $j_{\text{lin}}a$. De acuerdo con (49.7) debe cumplirse la igualdad

$$a\,(B + B') = \mu_0 j_{\text{lin}} a$$

o, después de simplificar por a y de sustituir j_{lin} por nI (véase (50.2)),

$$B + B' = \mu_0 nI. \qquad (50.3)$$

De esta igualdad se deduce que el campo, tanto dentro como fuera del solenoide infinito, es finito.

Tomemos un plano perpendicular al eje del solenoide (fig. 50.5). Debido a que las líneas **B** son cerradas, los flujos magnéticos a través de la parte interior S de este plano y a través de su parte exterior S' deben ser iguales. Como los campos son homogéneos y perpendiculares al plano, cada uno de los flujos es igual al producto del correspondiente valor de la inducción magnética por el área atravesada por el flujo. De este modo se obtiene la relación

$$BS = B'S'.$$

El primer miembro de esta igualdad es finito; el factor S' del segundo miembro es infinito. De aquí se sigue que $B' = 0$.

Así, hemos demostrado que, fuera de un solenoide infinitamente largo, la inducción magnética es nula. Dentro del solenoide el campo es homogéneo. Suponiendo en (50.3) $B' = 0$, llegamos a la fórmula de la inducción magnética dentro del solenoide:

$$B = \mu_0 n I. \tag{50.4}$$

El producto nI se llama número de amperio-vueltas por metro. Si $n = 1000$ vueltas por metro y la intensidad de la corriente es de

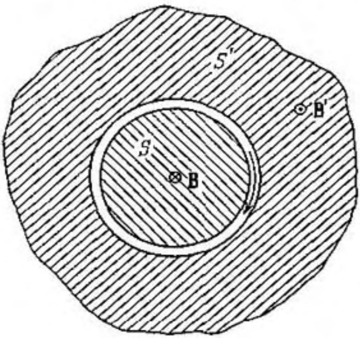


Fig. 50.5.

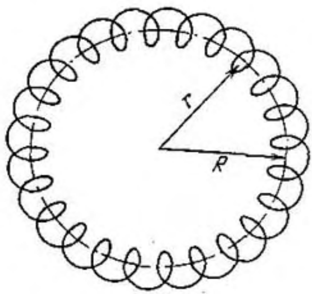


Fig. 50.6.

1 A, la inducción magnética dentro del solenoide es igual a $4\pi \times \times 10^{-4}$ T $= 4\pi$Gs.

A la inducción magnética sobre el eje del solenoide hacen la misma aportación las espiras dispuestas simétricamente (véase la fórmula (47.4)). Por eso, en el extremo de un solenoide semiinfinito, la inducción magnética sobre su eje es igual a la mitad del valor (50.4):

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 n I. \tag{50.5}$$

Prácticamente, si la longitud del solenoide es mucho mayor que su diámetro, la fórmula (50.4) será válida para los puntos de su parte media, y la (50.5), para los puntos sobre el eje próximos a sus extremos.

Un toroide es un conductor arrollado a un armazón en forma de toro (fig. 50.6). Tomemos un contorno en forma de circunferencia de radio r cuyo centro coincida con el del toroide. En virtud de la simetría, el vector **B** debe tener en cada punto dirección tangencial al

contorno. Por consiguiente, la circulación de **B** es igual a

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

(**B** es la inducción magnética en aquellos puntos por donde pasa el contorno).

Si el contorno pasa por dentro del toroide, abarca una corriente $2\pi RnI$ (R es el radio del toroide y n, el número de espiras por unidad de longitud de él). En este caso

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi RnI,$$

de donde

$$B = \mu_0 nI \frac{R}{r}. \tag{50.6}$$

Un contorno que pasa fuera del toroide no abarca corrientes, por lo que para éste $B \cdot 2\pi r = 0$. De este modo, fuera del toroide la inducción magnética es nula.

Para un toroide cuyo radio R sea mucho mayor que el radio de la espira, la relación R/r en todos los puntos del toroide diferirá poco de la unidad y en vez de (50.6) se obtiene una fórmula que coincide con la (50.4) del solenoide de longitud infinita. En este caso el campo se puede considerar homogéneo en cada una de las secciones del toroide. En distintas secciones el campo tiene diferente sentido, por lo que hablar de homogeneidad del campo dentro de los límites de todo el toroide sólo puede hacerse convencionalmente, teniendo en cuenta la igualdad del módulo de **B**.

En un toroide real existe una componente de la corriente a lo largo del eje. Esta componente crea, adicionalmente al campo (50.6), un campo análogo al de una corriente circular.

CAPÍTULO VII

CAMPO MAGNÉTICO EN UNA SUBSTANCIA

§ 51. Imanación de un material magnético

En el capítulo anterior se supuso que los conductores por los cuales pasaba la corriente que creaba el campo magnético se encontraban en el vacío. Si el conductor por el cual fluye la corriente se encuentra en un medio cualquiera, el campo magnético varía. Esto se explica porque toda substancia es un *matrial magnético*, es decir, capaz de, bajo la acción de un campo magnético, adquirir un momento magnético (imanarse). La substancia imanada crea un campo magnético $\mathbf{B}'$ que se superpone al campo $\mathbf{B}_0$ condicionado por las corrientes. Ambos campos sumados dan el campo resultante

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \tag{51.1}$$

(compárese con (17.2)).

El campo verdadero (microscópico) en un material magnético varía mucho dentro de los límites de las distancias intermoleculares. Se entiende por $\mathbf{B}$ el campo promediado (macroscópico) (véase el § 17).

Para explicar la imanación de los cuerpos supuso A.-M. Ampere que por las moléculas de la substancia circulan corrientes circulares (corrientes moleculares). Cada una de estas corrientes posee un momento magnético y crea en el espacio que la rodea un campo magnético. En ausencia de campo exterior, las corrientes moleculares están orientadas desordenadamente, por lo que el campo resultante que ellas condicionan es nulo. En virtud de la orientación caótica de los momentos magnéticos de las moléculas aisladas, el momento magnético total del cuerpo también es nulo. Bajo la acción de un campo, los momentos magnéticos de las moléculas adquieren una orrientación predominante en una dirección, a consecuencia de lo cual el material magnético se imana, es decir, su momento magnético total se hace distinto de cero. Los campos magnéticos de las corrientes moleculares aisladas no se compensan ya unos a otros en este caso y surge el campo $\mathbf{B}'$.

La imanación de un material magnético es natural que se caracterice por el momento magnético de la unidad de volumen. Esta magnitud se llama *imanación* y se representa con la letra $\mathbf{J}$. Si un material magnético está imanado no homogéneamente, la imanación en un punto dado se determina por la expresión siguiente:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m, \tag{51.2}$$

en la que ΔV es un volumen físicamente infinitesimal tomado en el entorno del punto considerado, y $\mathbf{p}_m$ es el momento magnético de una molécula aislada. La suma se extiende a todas las moléculas contenidas en el volumen ΔV (compárese con la fórmula 16.1)).

El campo $\mathbf{B}'$, lo mismo que el $\mathbf{B}_0$, no tiene manantiales. Por eso la divergencia del campo resultante (51.1) es nula:

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla \mathbf{B}_0 + \nabla \mathbf{B}' = 0. \tag{51.3}$$

De este modo la fórmula (49.2), y por lo tanto la (49.1), son válidas no sólo un campo en el vacío, sino también para el campo en una substancia.

§ 52. Intensidad del campo magnético

Escribamos la expresión del rotor del campo resultante (51.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = [\nabla \mathbf{B}_0] + [\nabla \mathbf{B}'].$$

De acuerdo con (49.9), $[\nabla \mathbf{B}_0] = \mu_0 \mathbf{j}$, siendo $\mathbf{j}$ la densidad de la corriente macroscópica. Análogamente, el rotor del vector $\mathbf{B}'$ debe ser proporcional a la densidad de las corrientes moleculares:

$$[\nabla \mathbf{B}'] = \mu_0 \mathbf{j}_{mol}.$$

Por consiguiente, el rotor del campo resultante se determina por la fórmula

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{mol}). \tag{52.1}$$

De (52.1) se infiere que al calcular el rotor del campo en los materiales magnéticos tropezamos con una dificultad análoga a la que encontramos al estudiar el campo eléctrico en los dieléctricos (véase la fórmula (19.1)): para determinar el rotor $\mathbf{B}$ hay que conocer la densidad, no sólo de las corrientes macroscópicas, sino también de las moleculares. Pero la densidad de las corrientes moleculares depende a su vez del valor del vector $\mathbf{B}$. El camino para salvar esta dificultad también es análogo al que utilizamos en el § 19. Resulta que se puede hallar una magnitud auxiliar tal, que su rotor esté determinado únicamente por la densidad de las corrientes macroscópicas.

Para establecer la forma de esta magnitud auxiliar vamos a intentar expresar la densidad de las corrientes moleculares $\mathbf{j}_{mol}$ por medio de la imanación $\mathbf{J}$ del material magnético[1]). Con este fin calculamos la suma algebraica de las corrientes moleculares abarcadas por cierto contorno Γ. Esta suma es igual a

$$\int_S \mathbf{j}_{mol}\, d\mathbf{S}, \tag{52.2}$$

donde S es la superficie extendida sobre el contorno.

[1]) En el § 19 expresamos la densidad de cargas ligadas por medio de la polarización del dieléctrico $\mathbf{P}$.

En la suma algebraica de las corrientes moleculares entran solamente aquellas corrientes moleculares que están «ensartadas» en el contorno (véase la corriente I'_{mol} en la fig. 52.1). Las corrientes no «ensartadas» en el contorno o no atraviesan la superficie extendida sobre dicho contorno, o la atraviesan dos veces, una en un sentido y otra en otro (véase la corriente I''_{mol} en la fig. 52.1). Como resultado, su aportación a la suma algebraica de las corrientes abarcadas por el contorno es nula.

En la fig. 52.2 se ve que el elemento de contorno dl, que forma con la dirección de la imanación **J** el ángulo α, ensarta aquellas corrientes moleculares, cuyos centros se encuentran dentro de un cilindro inclinado de volumen $S_{mol} \cos \alpha \, dl$ (S_{mol} es el área abarcada

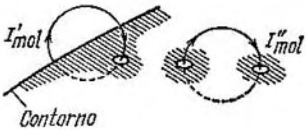


Fig. 52.1.

por una corriente molecular aislada). Si n es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen, la corriente total abarcada por el elemento dl es igual a $I_{mol} n S_{mol} \cos \alpha \, dl$. El producto $I_{mol} S_{mol}$ es igual al momento magnético p_m de una corriente molecular aislada. Por consiguiente, la expresión $I_{mol} S_{mol} n$ es el momento magnético de la unidad de volumen, es decir, da el módulo del vector **J** e $I_{mol} S_{mol} n \cos \alpha$, la proyección del vector **J** sobre la dirección del elemento dl. De este modo, la corriente molecular total abarcada por el elemento dl es igual a $\mathbf{J} \, d\mathbf{l}$, mientras que la suma de las corrientes moleculares abarcadas por todo el contorno (véase (52.2)), es igual a

$$\int_S \mathbf{j}_{mol} \, d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{J} \, d\mathbf{l}.$$

Después de transformar el segundo miembro según el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_S \mathbf{j}_{mol} \, d\mathbf{S} = \int_S [\nabla \mathbf{J}] \, d\mathbf{S}.$$

La igualdad a que hemos llegado debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S que se elija. Esto sólo es posible si las expresiones subintegrales son iguales en cada punto del material magnético:

$$\mathbf{j}_{mol} = [\nabla \mathbf{J}]. \qquad (52.3)$$

De este modo la densidad de las corrientes moleculares se determina conociendo el rotor de la imanación. En el caso en que $[\nabla \mathbf{J}] = 0$, las corrientes moleculares de las moléculas aisladas están orientadas de tal modo que su suma, en promedio, es nula.

La fórmula (52.3) permite la siguiente interpretación intuitiva. En la fig. 52.3 se representan los vectores de imanación $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$ en la proximidad inmediata a cierto punto P. El punto P y ambos vectores se encuentran en el plano de la figura. El contorno Γ, representado con línea de trazos, también se halla en el plano de la figura.

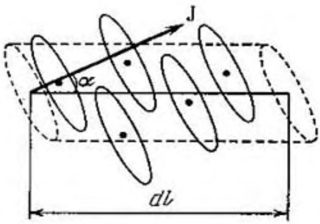


Fig. 52.2.

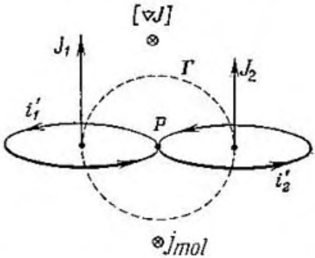


Fig. 52.3.

Si el carácter de la imanación es tal que los vectores $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$ tienen iguales los módulos, la circulación de $\mathbf{J}$ a lo largo del contorno Γ será nula. Respectivamente, $[\nabla \mathbf{J}]$ en el punto P también será nulo.

A las imanaciones $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$ se pueden equiparar las corrientes moleculares i'_1 e i'_2 que fluyen por los contornos representados en la fig. 52.3 con línea continua. Estos contornos se encuentran en un plano perpendicular al de la figura. Si los vectores $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$ tienen el mismo sentido, las corrientes i'_1 e i'_2 serán opuestas entre sí en el punto P. En virtud de que $J_1 = J_2$, las corrientes i'_1 e i'_2 son iguales en magnitud, a causa de lo cual la corriente molecular resultante en el punto P es, lo mismo que $[\nabla \mathbf{J}/]$, igual a cero: $\mathbf{j}_{mol} = 0$.

Supongamos ahora que $J_1 > J_2$. Entonces la circulación de $\mathbf{J}$ a lo largo del contorno Γ resulta ser distinta de cero. Respectivamente, el campo del vector $\mathbf{J}$ en el punto P se caracteriza por un vector $[\nabla \mathbf{J}]$ dirigido hacia detrás de la figura. A una imanación mayor corresponde una corriente molecular también mayor, por eso $i'_1 > i'_2$. En conclusión, en el punto P se observará una corriente resultante distinta de cero, caracterizada por la densidad $\mathbf{j}_{mol}$, dirigida en el mismo sentido que $[\nabla \mathbf{J}]$, es decir, hacia detrás de la figura. En el caso en que $J_1 < J_2$, los vectores $[\nabla \mathbf{J}]$ y $\mathbf{j}_{mol}$ no estarán dirigidos hacia detrás de la figura, sino hacia nosotros.

Así, pues, en los puntos en que el rotor de imanación es distinto de cero, también es distinta de cero la densidad de corrientes moleculares, y los vectores $[\nabla \mathbf{J}]$ y $\mathbf{j}_{mol}$ tienen el mismo sentido (véase (52.3)).

Sustituyamos la expresión (52.3) de la densidad de corrientes moleculares en la fórmula (52.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 [\nabla \mathbf{J}].$$

Dividiendo esta relación por μ_0 y juntando los rotores, obtenemos

$$\left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}\right)\right] = \mathbf{j}. \qquad (52.4)$$

De aquí se sigue que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \qquad (52.5)$$

es la magnitud que buscábamos, cuyo rotor está determinado únicamente por las corrientes macroscópicas. Esta magnitud se llama *intensidad del campo magnético*.

De acuerdo con (52.4)

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \qquad (52.6)$$

(el rotor del vector **H** es igual al vector de densidad de corrientes macroscópicas).

Tomamos un contorno arbitrario Γ con una superficie S extendida sobre él y formamos la expresión

$$\int_S [\nabla \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Según el teorema de Stokes, el primer miembro de esta igualdad equivale a la circulación del vector **H** a lo largo del contorno Γ. Por consiguiente,

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \qquad (52.7)$$

Si las corrientes macroscópicas pasan por conductores abarcados por el contorno, la relación (52.7) se puede escribir en la forma

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \sum_k I_k. \qquad (52.8)$$

Las fórmulas (52.7) y (52.8) expresan *el teorema de la circulación del vector* **H**: *la circulación del vector de intensidad del campo magnético a lo largo de un contorno es igual a la suma algebraica de las corrientes macroscópicas abarcadas por dicho contorno.*

La intensidad del campo magnético **H** es el análogo del desplazamiento eléctrico **D**. Al principio se supuso que en la naturaleza exis-

tían masas magnéticas semejantes a las cargas eléctricas y el estudio del magnetismo se desarrolló por analogía con el de la electricidad. En aquel tiempo fueron introducidas las denominaciones de «inducción magnética» para **B** e «intensidad del campo» para **H**. Después se aclaró que en la naturaleza no existen tales masas magnéticas y que la magnitud llamada inducción magnética es en realidad análoga no al desplazamiento eléctrico **D**, sino a la intensidad del campo eléctrico **E** (y, respectivamente, **H** no es análoga a **E**, sino a **D**). Pero la terminología ya establecida no se cambió, porque, además, a causa de la distinta naturaleza de los campos eléctrico y magnético (el campo eléctrico es de potencial y el magnético solenoidal[1])), las magnitudes **B** y **D** ponen de manifiesto mucha semejanza en su comportamiento (por ejemplo, las líneas **B**, lo mismo que las **D**, no sufren interrupción en el límite entre dos medios).

En el vacío $\mathbf{J} = 0$, por lo que **H** se convierte en $\mathbf{B}/\mu_0$ y las fórmulas (52.6) y (52.8) se transforman en las (49.9) y (49.7).

De acuerdo con (42.5), la intensidad del campo de una corriente directa en el vacío se determina por la expresión

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}, \tag{52.9}$$

de la cual se deduce que la dimensión de la intensidad del campo magnético es igual a la dimensión de la intensidad de la corriente dividida por la dimensión de la longitud. Por eso la unidad de intensidad del campo magnético en el SI recibe el nombre de *amperio por metro* (A/m).

En el sistema de Gauss se denomina intensidad del campo magnético la magnitud

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}. \tag{52.10}$$

De esta definición se sigue que, en el vacío, **H** coincide con **B**. De acuerdo con esto la unidad de **H** en el sistema de Gauss, llamada *oerstedio* u *oersted* (Oe), tiene la misma magnitud y dimensión que la unidad de inducción magnética, gaussio (Gs). En realidad oerstedio y gaussio son dos denominaciones distintas de una misma unidad. Si con esta unidad se mide **H**, se llama oerstedio, y si se mide **B**, gaussio.

Se admite ligar la imanación no con la inducción magnética, sino con la intensidad del campo. Se supone que en cada punto de un material magnético

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \tag{52.11}$$

donde χ es una magnitud característica del material magnético dado, denominada *susceptibilidad magnética*[2]). La experiencia demuestra

---

[1]) Se llama solenoidal el campo que no tiene manantiales. En cada punto de este campo la divergencia es nula.

[2]) En los medios anisótropos los sentidos de los vectores **J** y **H**, en general, no coinciden. En estos medios la relación entre los vectores **J** y **H** se efectúa por medio del *tensor de susceptibilidad magnética* (véase la observación que hay al pie de la pág. 67).

que para las substancias débilmente magnéticas (no ferromagnéticas) en campos no demasiado intensos, χ no depende de **H**. Según (52.5), la dimensión de **H** coincide con la de **J**. Por consiguiente, χ es una magnitud adimensional. Sustituyendo en la fórmula (52.5) **J** por su expresión (52.11), obtenemos

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\chi\mathbf{H},$$

de donde

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \tag{52.12}$$

La magnitud adimensional

$$\mu = 1+\chi \tag{52.13}$$

se llama *permeabilidad magnética relativa* o simplemente *permeabilidad magnética* de la substancia[1]).

A diferencia de la susceptibilidad dieléctrica $\varkappa$, que sólo puede tener valores positivos (la polarización **P** en un dieléctrico isótropo está siempre dirigida en el sentido del campo **E**), la susceptibilidad magnética χ puede ser tanto positiva como negativa. Por eso la permeabilidad magnética μ puede ser tanto mayor como menor que la unidad.

Teniendo en cuenta (52.13), a la fórmula (52.12) se le puede dar la forma

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}. \tag{52.14}$$

De este modo la intensidad del campo magnético **H** es un vector que tiene el mismo sentido que el **B**, pero cuyo módulo es $\mu_0\mu$ veces menor (en los medios anisótropos los vectores **H** y **B**, en general, no tienen el mismo sentido).

La relación (52.11) que liga los vectores **J** y **H** tiene exactamente la misma forma en el sistema de Gauss. Sustituyendo esta expresión en la fórmula (52.10), se obtiene

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\chi\mathbf{H},$$

de donde

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{1+4\pi\chi}. \tag{52.15}$$

La magnitud adimensional

$$\mu=1+4\pi\chi \tag{52.16}$$

se llama *permeabilidad magnética* de la substancia. Introduciendo esta magnitud en la fórmula (52.15), obtenemos

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}. \tag{52.17}$$

---

[1]) En electrotecnia se introduce la llamada permeabilidad magnética absoluta $\mu_a=\mu_0\mu$. Pero esta magnitud carece de sentido físico y nosotros no la utilizaremos.

El valor de μ en el sistema de Gauss coincide con el valor de μ en el SI. La comparación de las fórmulas (52.13) y (52.16) muestra que el valor de la susceptibilidad magnética en el SI es 4π veces mayor que el valor de χ en el sistema de Gauss:

$$\chi_{SI} = 4\pi\chi_{SG}. \qquad (52.18)$$

§ 53. Cálculo del campo en los materiales magnéticos

Examinemos el campo que crea una varilla redonda infinitamente larga. La imanación **J** la consideraremos igual en todas partes y dirigida a lo largo del eje de la varilla. Dividimos mentalmente la varilla en capas de espesor dl perpendiculares al eje. Cada capa la

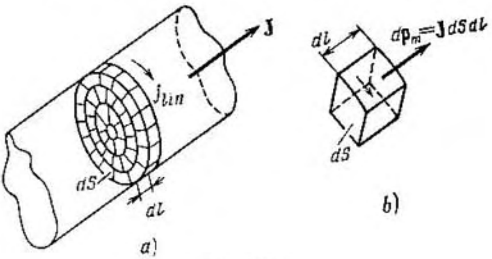


Fig. 53.1.

dividimos a su vez en pequeños elementos de cilindro, cuyas bases sean arbitrarias (fig. 53.1, *a*). Cada uno de estos elementos posee un momento magnético

$$dp_m = J\,dS\,dl, \qquad (53.1)$$

donde dS es el área de la base.

El campo $d\mathbf{B}'$ que crea un elemento a distancias grandes en comparación con sus dimensiones es equivalente al campo que crearía una corriente de intensidad $I = J\,dl$ que pasara rodeando el elemento por su superficie lateral (véase la fig. 53.1, *b*). En efecto, el momento magnético de esta corriente es $dp_m = I\,dS = J\,dl\,dS$ (compárese con 53.1)), y el campo magnético a grandes distancias viene determinado únicamente por la magnitud y la dirección del momento magnético (véase el § 47).

Las corrientes imaginarias que fluyen por la parte de superficie común a dos elementos contiguos son iguales en magnitud y tienen sentidos opuestos, por lo que su suma será nula. De este modo, al sumar las corrientes que pasan rodeando las superficies laterales de los elementos de una capa, resultan no compensadas únicamente las corrientes que fluyen por la superficie lateral de la capa.

De lo dicho se infiere que una capa de espesor dl de la varilla crea un campo equivalente al que crearía una corriente de intensidad $J\,dl$ que pasara rodeando la capa por su superficie lateral (la densidad lineal de esta corriente es $j_{lin} = J$). Toda la varilla infinita imanada crea un campo equivalente al de un cilindro rodeado por una corriente de densidad lineal $j_{lin} = J$. En el § 50 explicamos que fuera de este cilindro el campo es nulo, y dentro de él es homogéneo y su magnitud igual a $\mu_0 j_{lin}$.

Así, hemos aclarado el carácter del campo $\mathbf{B}'$ que crea una varilla redonda, de longitud infinita, imanada. Fuera de la varilla este campo es nulo. Dentro de ella el campo es homogéneo e igual a

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{53.2}$$

Supongamos que existe un campo homogéneo $\mathbf{B}_0$ creado por macrocorrientes en el vacío. Según (52.14), la intensidad de este campo será

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}. \tag{53.3}$$

Introduzcamos en este campo (que llamaremos exterior) una varilla redonda infinitamente larga, de material magnético homogéneo e isótropo, situándola a lo largo de la dirección de $\mathbf{B}_0$. De las razones de simetría se sigue que la imanación $\mathbf{J}$ que se produce en la varilla es colineal con el vector $\mathbf{B}_0$.

La varilla imanada crea dentro de ella el campo $\mathbf{B}'$, determinado por la fórmula (53.2). Como resultado, el campo dentro de la varilla será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}. \tag{53.4}$$

Sustituyendo este valor de $\mathbf{B}$ en la fórmula (52.5) obtenemos la intensidad del campo dentro de la varilla

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0$$

(véase (53.3)). De este modo, la intensidad del campo dentro de la varilla resulta que coincide con la intensidad del campo exterior.

Multiplicando $\mathbf{H}$ por $\mu_0\mu$, obtenemos la inducción magnética dentro de la varilla:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H} = \mu_0\mu\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu\mathbf{B}_0. \tag{53.5}$$

De aquí se deduce que la permeabilidad magnética μ indica las veces que se intensifica el campo en el material magnético (compárese con (20.2)).

Advertimos que, como el campo $\mathbf{B}'$ sólo es distinto de cero dentro de la varilla, el campo magnético fuera de ésta permanece invariable.

El resultado obtenido es válido en aquellos casos en que un material magnético homogéneo e isótropo llena el volumen limitado por las superficies que forman las líneas de intensidad del campo exterior [1]). En el caso contrario la intensidad del campo, determinada por la fórmula (52.5), no coincide con $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$.

Convencionalmente se supone que la intensidad del campo en el material magnético es

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{\ominus}, \tag{53.6}$$

donde $\mathbf{H}_0$ es el campo exterior, y $\mathbf{H}_{\ominus}$, el llamado *campo desimanante* o *desmagnetizante*, que se considera proporcional a la imanación:

$$\mathbf{H}_{\ominus} = N\mathbf{J}. \tag{53.7}$$

El coeficiente de proporcionalidad N se denomina *factor de desimanación*. Este factor depende de la forma del material magnético. Para un cuerpo cuya superficie no corte las líneas de intensidad del campo exterior, como hemos visto, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, es decir, el factor de desimanación es nulo. Para un disco delgado perpendicular al campo exterior, $N = 1$, y para una esfera, $N = {}^1/_3$.

El cálculo correspondiente da que, en el caso de un cuerpo magnético homogéneo e isótropo, de forma elipsoidal, situado en un campo exterior homogéneo e isótropo, el campo magnético dentro de él, aunque sea distinto del campo exterior, será también homogéneo. Esto mismo es válido para la esfera, como caso particular del elipsoide, y para una varilla larga o un disco delgado, que se pueden considerar como casos extremos del elipsoide.

Para terminar vamos a hallar la intensidad del campo de un solenoide infinitamente largo, lleno de material magnético homogéneo e isótropo (o sumergido en un material magnético homogéneo e isótropo i imitado). Aplicando al contorno representado en la fig. 50.4 el teorema de la circulación (véase (52.8)), se obtiene la relación $Ha = naI$. De aquí que

$$H = nI. \tag{53.8}$$

Así, pues, la intensidad del campo dentro de un solenoide infinitamente largo es igual al producto de la intensidad de la corriente por el número de espiras que hay en la unidad de longitud. Fuera del solenoide la intensidad del campo es nula.

---

[1]) Recordamos que en el caso de un campo eléctrico $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ a condición de que un dieléctrico homogéneo e isótropo llene el volumen limitado por las superficies equipotenciales, es decir, las superficies ortogonales a las líneas de intensidad del campo exterior.

§ 54. Condiciones en el límite entre dos materiales magnéticos

En las proximidades de la superficie de separación de dos materiales magnéticos, los vectores **B** y **H** deben satisfacer determinadas condiciones de frontera que se infieren de las relaciones

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \tag{54.1}$$

(véanse las fórmulas (51.3) y (52.6)). Consideramos campos estacionarios, o sea, campos que no varían con el tiempo.

Tomemos en el límite entre dos materiales magnéticos, de permeabilidades μ_1 y μ_2, una superficie cilíndrica imaginaria de altura

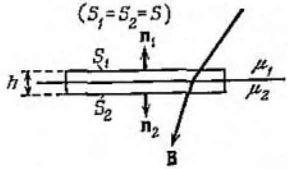


Fig. 54.1.

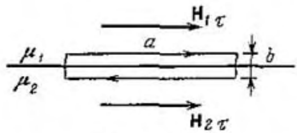


Fig. 54.2.

h y bases S_1 y S_2 situadas por ambos lados de la superficie de separación (fig. 54.1). El flujo del vector **B** a través de esta superficie es

$$\Phi_B = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{lat} \tag{54.2}$$

(compárese con (21.6)).

De acuerdo con que $\nabla \mathbf{B} = 0$, el flujo del vector **B** a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Igualando a cero la expresión (54.2) y efectuando el paso $h \to 0$, llegamos a la relación $B_{1n} = -B_{2n}$. Si $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ se proyectan sobre una misma normal, se obtiene la condición

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{54.3}$$

(compárese con (21.7)).

Sustituyendo, de acuerdo con (52.14), los componentes de **B** por los respectivos componentes del vector **H** multiplicados por $\mu_0\mu$, obtenemos la relación

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

de la que se sigue que

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{54.4}$$

Tomemos ahora en el límite entre los materiales magnéticos un contorno rectangular (fig. 54.2) y calculemos para él la circulación **H**.

Si las dimensiones del contorno son pequeñas, la circulación se puede representar en la forma

$$\oint H_l\,dl = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_l\rangle 2b, \tag{54.5}$$

donde $\langle H_l\rangle$ es el valor medio de H_l en los trozos de contorno perpendiculares al límite. Si por la superficie de separación no fluyen corrientes macroscópicas, $[\nabla\mathbf{H}]$ será nulo dentro de los límites del contorno. Por eso la circulación también será nula. Suponiendo la expresión (54.5) igual a cero y efectuando el paso al límite $b \to 0$, se llega a la relación

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \tag{54.6}$$

(compárese con (21.4)).

Sustituyendo los componentes de **H** por los respectivos componentes del vector **B** divididos por $\mu_0\mu$, obtenemos la relación

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2},$$

de la cual se deduce que

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{54.7}$$

Resumiendo se puede decir que al pasar a través del límite de separación de dos medios magnéticos, el componente normal del vector **B** y el componente tangencial del vector **H** varían de un modo continuo. En cambio, el componente tangencial del vector **B** y el componente normal del vector **H**, al pasar a través del límite de separación sufren una discontinuidad. Por lo tanto, al atravesar el límite de separación de los dos medios, el vector **B** se comporta de un modo análogo al vector **D**, y el vector **H**, de un modo análogo al vector **E**.

En la fig. 54.3 se muestra el comportamiento de las líneas **B** al cruzar el límite de separación entre dos materiales magnéticos. Designemos los ángulos entre las líneas **B** y la normal a la superficie de separación respectivamente por α_1 y α_2. La relación entre las tangentes de estos ángulos es

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

de aquí, teniendo en cuenta (54.3) y (54.7), se obtiene una ley análoga a la (21.9) de refracción de las líneas de inducción magnética:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{54.8}$$

Al pasar al material magnético de mayor μ, las líneas de inducción magnética se desvían de la normal hacia la superficie. Esto hace que dichas líneas se condensen. La condensación de las líneas **B**

en la substancia de mayor permeabilidad magnética de la posibilidad de formar haces magnéticos, es decir, de darles la forma y dirección necesarias. En particular, para efectuar la protección magnética de un volumen determinado, se rodea éste con una pantalla de hierro.

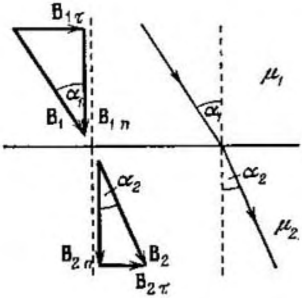


Fig. 54.3.

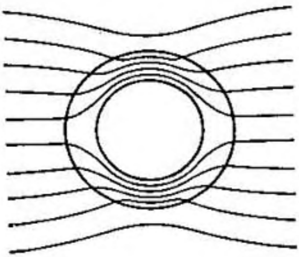


Fig. 54.4.

En la fig. 54.4 se ve que la condensación de las líneas de inducción magnética en el espesor de la pantalla hace que el campo se debilite dentro.

En la fig. 54.5 se da el esquema de un electroimán de laboratorio. Consta de un núcleo de hierro, sobre el cual asientan las bobinas alimentadas por la corriente. Las líneas de inducción magnética resultan concentradas fundamentalmente dentro del núcleo. Sólo en el estrecho espacio de aire pasan por un medio de μ pequeña. El vector **B** cruza el límite entre el espacio de aire y el núcleo siguiendo la normal a la superficie de separación. De aquí, según (54.3), se deduce que la inducción magnética en el espacio de aire y en el núcleo tiene la misma magnitud. Apliquemos el teorema de la circulación de **H** al contorno que pasa por el eje del núcleo. La intensidad del campo se puede considerar que es la misma en todos los puntos del hierro e igual a $H_{hier} = B/\mu_0\mu_{hier}$. En el aire $H_{aire} = B/\mu_0\mu_{aire}$. Designemos la longitud de la parte del contorno que se encuentra en el hierro por l_{hier} y la del espacio de aire por l_{aire}. Entonces la circulación se puede representar en la forma $H_{hier}l_{hier} + H_{aire}l_{aire}$. Según (52.8) esta circulación debe ser igual a NI,

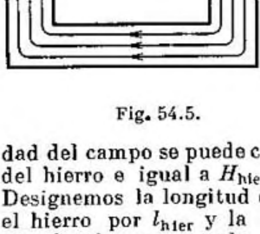


Fig. 54.5.

donde N es el número total de espiras de las bobinas del electroimán, e I, la intensidad de la corriente. De este modo,

$$\frac{B}{\mu_0\mu_{hier}} l_{hier} + \frac{B}{\mu_0\mu_{aire}} l_{aire} = NI.$$

De aquí

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\frac{l_{aire}}{\mu_{aire}} + \frac{l_{hier}}{\mu_{hier}}} \approx \mu_0 I \frac{N}{l_{aire} + \frac{l_{hier}}{\mu_{hier}}}$$

(μ_{aire} sólo difiere de la unidad en la quinta cifra después de la coma).

De ordinario l_{hier} suele ser del orden de 0,1 m; l_{hier}, del orden de 1 m y μ_{hier} alcanza un valor del orden de varios millares. Por eso el segundo sumando del denominador se puede despreciar y escribir que

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l_{aire}} \tag{54.9}$$

Por consiguiente, la inducción magnética en el espacio de aire del electroimán tiene la magnitud que tendría dentro de un toroide sin núcleo, en el cual se hubiera arrollado un número de espiras igual a N/l_{aire} por unidad de longitud (véase (50.6)). Aumentando el número total de espiras y disminuyendo el espacio de aire se pueden obtener campos con valor de B grande. En la práctica, valiéndose de electroimanes con núcleo de hierro se consiguen campos con B del orden de varias teslas (o varias decenas de millares de gaussios).

§ 55. Tipos de materiales magnéticos

La fórmula (52.11) determina la susceptibilidad magnética χ de la unidad de volumen de la substancia. Frecuentemente, en vez de esta susceptibilidad se utiliza la referida a un mol de substancia, llamada susceptibilidad molar (o atómica, para los cuerpos químicos simples) χ_m (χ_{at}). Es evidente que $\chi_m = \chi V_m$, donde V_m es el volumen de un mol de la substancia. Mientras que χ es una magnitud adimensional, χ_m se mide en m³/mol.

En dependencia del signo y de la magnitud de la susceptibilidad magnética, todos los materiales magnéticos se subdividen en tres grupos:

1) diamagnéticos, cuya χ es negativa y pequeña en valor absoluto ($|\chi_m| \sim 10^{-11} \ldots 10^{-10}$ m³/mol);

2) paramagnéticos, cuya χ es también pequeña, pero positiva ($\chi_m \sim 10^{-10} \ldots 10^{-9}$ m³/mol);

3) ferromagnéticos, cuya χ es positiva y alcanza valores muy grandes ($\chi_m \sim 1$ m³/mol). Además, a diferencia de los diamagnéticos y paramagnéticos, en los que χ no depende de H, la susceptibilidad

de los ferromagnéticos es función de la intensidad del campo magnético.

Así, en las substancias isótropas, la imanación **J** puede coincidir en dirección con **H** (en los para y ferromagnéticos) o tener sentido contrario a ella (en los diamagnéticos). Recordamos que en los dieléctricos isótropos la polarización tiene siempre el mismo sentido que **E**.

§ 56. Fenómenos magnetomecánicos

La naturaleza de las corrientes moleculares se hizo comprensible después de que con los experimentos de E. Rutherford quedó establecido que los átomos de todas las substancias están constituidos por un núcleo con carga positiva y electrones con carga negativa que se mueven alrededor de él.

El movimiento de los electrones en los átomos se subordina a las leyes cuánticas; en particular, el concepto de trayectoria es inaplicable a los electrones que se mueven en el átomo. No obstante, el diamagnetismo de las sibstancias se consigue explicar utilizando el simple modelo de Bohr, según el cual los electrones se mueven en los átomos siguiendo órbitas circulares estacionarias.

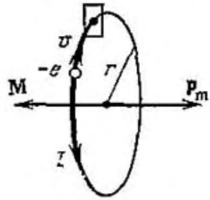


Fig. 56.1.

Supongamos que un electrón se mueve, con la velocidad v, por una órbita de radio r (fig. 56.1). A través de una superficie situada en cualquier punto del camino del electrón, se transportará en la unidad de tiempo la carga $e\nu$, siendo e la carga del electrón y ν el número de revoluciones por segundo. Por consiguiente, el electrón que se mueve por la órbita origina una corriente circular de intensidad $I = e\nu$. Como la carga del electrón es negativa, el sentido del movimiento del electrón será opuesto al de la corriente. El momento magnético de la corriente que crea el electrón será

$$p_m = IS = e\nu\pi r^2.$$

El producto $2\pi r\nu$ da la velocidad v del movimiento del electrón, por lo que se puede escribir que

$$p_m = \frac{evr}{2}. \qquad (56.1)$$

El momento (56.1) está condicionado por el movimiento del electrón por la órbita, a esto debe el nombre de *momento magnético orbital* del electrón. El sentido del vector $\mathbf{p}_m$ forma con el de la corriente un sistema dextrógiro, y con el del movimiento del electrón, un sistema levógiro (véase la fig. 56.1).

El electrón que se mueve por una órbita tiene el momento de impulso (cinético o angular)

$$M = mvr \tag{56.2}$$

(m es la masa del electrón). El vector **M** se llama *momento mecánico orbital* del electrón. Este vector forma con el sentido del movimiento del electrón un sistema dextrógiro. Por lo tanto, los vectores $\mathbf{p}_m$ y **M** tienen sentidos opuestos.

La razón del momento magnético de una partícula elemental a su momento mecánico se llama *relación magnetomecánica* o *giromagnética*). Para el electrón esta razón es

$$\frac{p_m}{M} = -\frac{e}{2m} \tag{56.3}$$

(m es la masa del electrón; el signo menos indica que los momentos tienen sentidos opuestos).

A consecuencia de la rotación alrededor del núcleo, el electrón resulta ser semejante a un trompo o peonza. Esta circunstancia sirve de base a los denominados *fenómenos magnetomecánicos*, que consisten en que la imanación de un material magnético hace que éste gire y, viceversa, la rotación de un material magnético ocasione su imanación. La existencia del primer fenómeno fue demostrada experimentalmente por A. Einstein y W. de Haas; la del segundo, por S. Barnett.

El experimento de Einstein y de Haas se basa en los razonamientos siguientes. Si se imana una varilla de material magnético, los momentos magnéticos de los electrones se orientan en la dirección del campo y sus momentos mecánicos, en sentido contrario al de éste. Como resultado, el momento mecánico total de los electrones $\sum \mathbf{M}_l$ se hace distinto de cero (inicialmente, debido a la orientación caótica de los momentos aislados, era nulo). El momento de impulso del sistema varilla + electrones debe permanecer invariable. Por eso la varilla adquiere un momento de impulso igual a $-\sum \mathbf{M}_l$ y, por lo tanto, entra en rotación. El cambio del sentido de la imanación hace que varíe el sentido de la rotación de la varilla.

Un modelo mecánico de este experimento se puede hacer sentando a una persona en una silla giratoria y poniendo en sus manos una rueda de gran masa en rotación. Si el eje de la rueda se pone hacia arriba, la persona empezará a girar en sentido contrario al de la rotación de la rueda. Cuando el eje de la rueda se pone hacia abajo, la persona comienza a girar en sentido opuesto al de antes.

La experiencia de Einstein y de Haas se efectuó del modo siguiente (fig. 56.2). Una varilla delgada de hierro se suspendió de un hilo elástico y se introdujo dentro de un solenoide. La torsión del hilo al imanarse la varilla por la acción del campo magnético continuo fue muy pequeña. Para reforzar el efecto se aplicó el método de la resonancia: el solenoide se alimentó con corriente alterna, cuya

frecuencia se eligió igual a la frecuencia propia de las oscilaciones mecánicas del sistema. En estas condiciones la amplitud de las oscilaciones alcanzó un valor que podía medirse observando los desplazamientos de un punto luminoso reflejado en un espejo sujeto al hilo. Con los datos del experimento se calculó la relación magnetomecánica, que resultó ser igual a $-(e/m)$. De este modo, el signo de la carga de los portadores que crean la corriente molecular coincidió con el signo de la carga del electrón. Pero el resultado obtenido fue dos veces mayor que el valor esperado de la relación magnetomecánica (56.3).

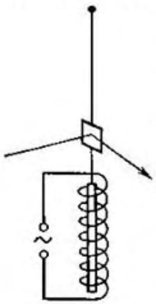


Fig. 56.2.

Para que pueda comprenderse la experiencia de Barnett recordaremos que si se quiere hacer que un giróscopo gire alrededor de una dirección determinada, el eje de dicho giróscopo girará de tal modo que los sentidos de sus rotaciones propia y forzada coincidan (véase el § 44 del tomo 1°). Si un giróscopo, montado en una suspensión cardánica, se coloca sobre el disco de una máquina centrífuga y se hace que éste gire, el eje del giróscopo tomará la posición vertical, de tal modo que el sentido de su rotación coincida con el de la rotación del disco. Si se cambia el sentido en que gira la máquina centrífuga, el eje del giróscopo efectuará un giro de 180°, es decir, tal, que el sentido de ambas rotaciones vuelva a coincidir.

Barnett hizo que una varilla de hierro girara muy rápidamente alrededor de su eje y midió la imanación que se producía en ella. De los resultados de este experimento, Barnett también obtuvo para la relación magnetomecánica una magnitud dos veces mayor que el valor (56.3).

Más tarde se aclaró que el electrón, además de los momentos orbitales (56.1) y (56.2), posee sus momentos mecánico M_s y magnético p_{ms} intrínsecos, para los cuales la relación magnetomecánica es

$$\frac{p_{ms}}{M_s} = -\frac{e}{m}, \qquad (56.4)$$

o sea, coincide con el valor obtenido en las experiencias de Einstein y de Haas y de Barnett. De aquí se sigue que las propiedades magnéticas del hierro no se deben al momento orbital de los electrones, sino a su momento magnético intrínseco.

La existencia de los momentos intrínsecos del electrón se intentó explicar inicialmente considerando esta partícula como una esferita cargada que gira sobre su eje. De acuerdo con esto, el momento mecánico intrínseco del electrón recibió el nombre de *espín* (del inglés *to spin*, girar). Pero pronto se descubrió que esta representación conduce a una serie de contradicciones y hubo que renunciar a la

hipótesis del electrón «giratorio». En la actualidad se admite que el momento mecánico intrínseco (espín) y el momento magnético intrínseco (de espín) son propiedades tan inseparables del electrón como su masa y su carga.

El espín posee no sólo el electrón, sino también otras partículas elementales. El espín [1]) de las partículas elementales resulta ser múltiplo entero o semientero de la magnitud $\hbar$, que es igual a la constante de Planck h dividida por 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 1{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s} \qquad (56.5)$$

En particular, para el electrón $M_s = {}^1/_2\hbar$, por lo que se dice que el espín del electrón es igual a ${}^1/_2$. De este modo, $\hbar$ es la unidad natural del momento de impulso, de un modo semejante a como la carga elemental e es la unidad natural de carga.

De acuerdo con (56.4) el momento magnético intrínseco del electrón es

$$p_m = -\frac{e}{m} M_s = \frac{e}{m}\frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \qquad (56.6)$$

La magnitud

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0{,}927 \cdot 10^{-23}\ \text{J/T} = 0{,}927 \cdot 10^{-20}\ \text{erg/Gs}\ ^{1)} \qquad (56.7)$$

se denomina *magnetón de Bohr*. Por consiguiente, el momento magnético intrínseco del electrón es igual a un magnetón de Bohr.

El momento magnético del átomo se compone de los momentos orbitales e intrínsecos de los electrones que entran en su composición y del momento magnético del núcleo (condicionado por los momentos magnéticos de las partículas elementales que lo forman, es decir, de los protones y neutrones). El momento magnético del núcleo es mucho menor que los momentos de los electrones, por lo que al resolver muchos problemas se puede despreciar aquél y considerar que el momento magnético del átomo es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de los electrones. El momento magnético de las moléculas también se puede considerar igual a la suma de los momentos magnéticos de los electrones que entran en su composición.

La determinación experimental de los momentos magnéticos de los átomos fue efectuada por O. Stern y W. Gerlach. En sus experiencias un haz de átomos se hacía pasar a través de un campo magnético fuertemente no homogéneo. La no homogeneidad del campo se conseguía de la forma especial de las piezas polares del electroimán

---

[1]) Más exactamente, el valor máximo de la proyección del espín sobre una dirección elegida del espacio, por ejemplo sobre la dirección del campo exterior.

[1]) Según la fórmula $W = -\mathbf{p}_m\mathbf{B}$, la dimensión del momento magnético es igual a la dimensión de la energía (julio o ergio) divididad por la dimensión de la inducción magnética (tesla o gaussio).

(fig. 56.3). Según la fórmula (46.11), sobre los átomos del haz debe actuar la fuerza

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

cuya magnitud y signo dependen del ángulo α que forma el vector $\mathbf{p}_m$ con la dirección del campo. Siendo caótica la distribución de los momentos de los átomos por las direcciones, en el haz hay partículas para las cuales los valores de α varían entre los límites de 0 a π. De acuerdo con esto se supuso que el estrecho haz de átomos, después de pasar por entre los polos, formaría en la pantalla una extensa huella continua, cuyos bordes corresponderían a los átomos orientados bajo los ángulos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ (fig. 56.4). Pero el experimento dio unos resultados inesperados. En vez de la extensa huella continua se obtuvieron rayas aisladas situadas simétricamente con respecto a la traza del haz obtenida en ausencia del campo.

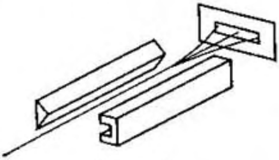


Fig. 56.3.

La experiencia de Stern y Gerlach demostró, que los ángulos bajo los cuales se orientan los momentos magnéticos de los átomos con respecto al campo magnético, sólo pueden tener valores discretos, es decir, que la proyección del momento magnético sobre la dirección del campo se cuantiza.

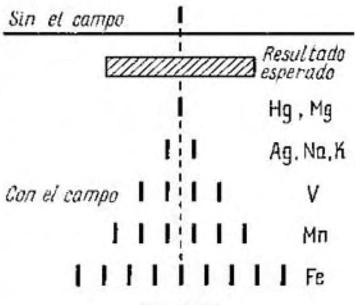


Fig. 56.4.

El número de valores posibles de la proyección del momento magnético sobre la dirección del campo magnético es distinto para átomos diferentes. Para los átomos de plata, aluminio, cobre y de los metales alcalinos es igual a dos; para los de vanadio, nitrógeno y de los halógenos, a cuatro; para el oxígeno, a cinco; para el manganeso, a seis; para el hierro, a nueve; para el cobalto, a diez, y así sucesivamente.

Las mediciones de los momentos magnéticos de los átomos dieron valores del orden de varios magnetones de Bohr. Ciertos átomos no manifestaron desviación (véanse, por ejemplo, las trazas de los átomos de mercurio y de magnesio en la fig. 56.4), lo que indica la ausencia de momento magnético en ellos.

§ 57. Diamagnetismo

El electrón que se mueve por una órbita se asemeja a un trompo. Por lo tanto deben serle propias todas las peculiaridades del comportamiento de los giróscopos bajo la acción de fuerzas exteriores; en particular, si se dan las condiciones correspondientes se debe producir la precesión de la órbita electrónica. Las condiciones necesarias para la precesión se dan si el átomo se encuentra en un campo magnético exterior **B** (fig. 57.1). En este caso sobre la órbita actúa el momento de rotación $\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$, que tiende a hacer que el momento magnético orbital del electrón $\mathbf{p}_m$ se oriente en el sentido del campo (al mismo tiempo su momento mecánico **M** se orienta en el sentido contrario a dicho campo). Bajo la acción del momento **N** los vectores $\mathbf{p}_m$ y **M** realizan una precesión, laredecor de la dirección del vector de inducción magnética **B**, cuya velocidad es fácil de hallar (véase el § 44 del tomo 1).

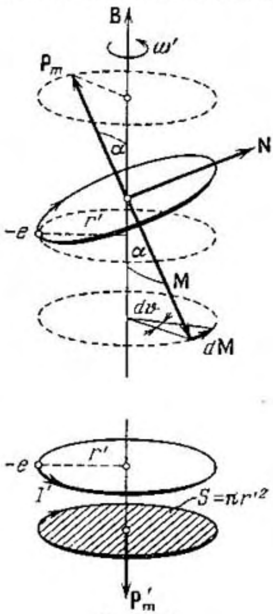


Fig. 57.1.

En el tiempo dt el vector **M** recibe el incremento $d\mathbf{M}$

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N}\, dt.$$

El vector $d\mathbf{M}$ lo mismo que el **N**, es perpendicular al plano que pasa por los vectores **B** y **M**; su módulo es

$$|\, d\mathbf{M}\, | = p_m B \operatorname{sen} \alpha\, dt,$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{p}_m$ y B.

En el tiempo dt el plano en que se encuentra el vector **M** gira alrededor de la dirección de **B** un ángulo

$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{M}|}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{p_m B \operatorname{sen} \alpha\, dt}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{p_m}{M} B\, dt.$$

Dividiendo este ángulo por el tiempo dt hallamos la velocidad angular de la precesión:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{M} B.$$

Sustituyendo la relación entre los momentos magnético y mecánico del electrón por su valor (56.3), se obtiene

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \tag{57.1}$$

La frecuencia (57.1) se llama *frecuencia de precesión de Larmor* o simplemente *frecuencia de Larmor*. Esta frecuencia no depende del ángulo de inclinación de la órbita con respecto a la dirección del campo magnético, ni del radio de la órbita o de la velocidad del electrón y, por lo tanto, es la misma para todos los electrones que entran en la composición del átomo.

La precesión de la órbita condiciona un movimiento adicional del electrón alrededor de la dirección del campo. Si la distancia r' del electrón al eje paralelo a **B** que pasa por el centro de la órbita no variase, este movimiento adicional del electrón se efectuaría siguiendo una circunferencia de radio r' (véase la circunferencia superior de la parte baja de la fig. 57.1). A este movimiento le correspondería una corriente circular (véase la circunferencia inferior, que limita el área rayada) $I' = e(\omega_L/2\pi)$, cuyo momento magnético

$$p'_m = I'S' = e\frac{\omega_L}{2\pi}\pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2}r'^2 \tag{57.2}$$

está dirigido en sentido opuesto a **B** (véase la figura). Este momento se denomina *momento magnético inducido*.

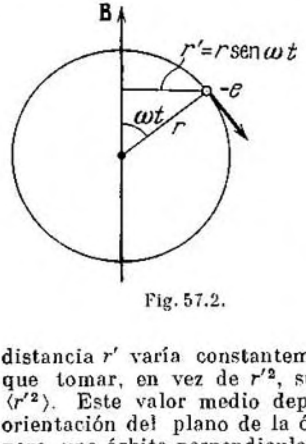


Fig. 57.2.

En realidad, debido al movimiento del electrón por la órbita, la distancia r' varía constantemente. Por eso en la fórmula (57.2) hay que tomar, en vez de r'^2, su valor medio con respecto al tiempo $\langle r'^2\rangle$. Este valor medio depende del ángulo α que caracteriza la orientación del plano de la órbita con respecto a **B**. En particular, para una órbita perpendicular al vector **B**, r' sería constante e igual al radio r de la órbita. Para una órbita, cuyo plano pasara por la dirección **B**, r' variaría de acuerdo con la ley $r' = r \operatorname{sen} \omega t$, en la que ω es la velocidad angular de rotación del electrón siguiendo la órbita (fig. 57.2; el vector **B** y la órbita se encuentran en el plano de la figura). Por consiguiente, $\langle r'^2\rangle = \langle r^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\rangle = {}^1/_2 r^2$ ($\langle \operatorname{sen}^2 \omega t\rangle = {}^1/_2$) Si se hace el promedio tomando todos los valores posible de α, y considerándolos igualmente probables, se obtiene

$$\langle r'^2\rangle = \frac{2}{3}r^2. \tag{57.3}$$

Sustituyendo en (57.2) ω_L por su valor (57.1) y $\langle r'^2 \rangle$ por el suyo (57.3), obtenemos para el valor medio del momento magnético inducido de un electrón la expresión siguiente:

$$\langle p'_m \rangle = -\frac{e^2}{6m} r^2 B \qquad (57.4)$$

(el signo menos refleja la circunstancia de que los vectores $\langle \mathbf{p}'_m \rangle$ y $\mathbf{B}$ tienen sentidos opuestos). Hasta ahora hemos supuesto que la órbita era circular. En el caso general (por ejemplo, para una órbita elíptica), en vez de r^2 debe tomarse $\langle r^2 \rangle$, es decir, el cuadrado medio de la distancia del electrón al núcleo.

Haciendo la suma, extendida a todos los electrones, de la expresión (57.4), hallamos el momento magnético inducido del átomo:

$$p'_{m\,\mathrm{at}} = \sum \langle p'_m \rangle = -\frac{e^2 B}{6m} \sum_{h=1}^{Z} \langle r_h^2 \rangle \qquad (57.5)$$

Z es el número atómico del elemento químico, igual al número de electrones que tiene el átomo).

Así, bajo la acción del campo magnético exterior se produce la precesión de las órbitas electrónicas con la misma velocidad angular (57.1) para todos los electrones. El movimiento adicional de los electrones condicionado por la precesión hace que se origine el momento magnético inducido del átomo (57.5), dirigido en sentido opuesto al del campo. La precesión de Larmor se produce en todas las substancias sin excepción. Pero en aquellos casos en que los átomos poseen de por sí el momento magnético, el campo magnético no sólo induce el momento (57.5), sino que también ejerce sobre los momentos magnéticos de los átomos una acción orientadora, que hace que se dispongan según la dirección del campo. El momento magnético positivo (es decir, dirigido en el sentido del campo) que surge en este caso es mucho mayor que el momento magnético inducido negativo. Por eso el momento resultante es positivo y la substancia se comporta como paramagnética.

El diamagnetismo sólo se manifiesta en aquellas substancias en las cuales los átomos no poseen momento magnético (la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones del átomo es nula). Si para una de estas substancias se multiplica la igualdad (57.5) por el número de Avogadro N_A, se obtiene el momento magnético de un mol de dicha substancia. Dividiendo éste por la intensidad del campo H, se halla la susceptibilidad magnética molar χ_m. La permeabilidad magnética de las substancias diamagnéticas es prácticamente igual a la unidad. Por eso se puede suponer que $B/H = \mu_0$. De este modo,

$$\chi_m = \frac{N_A p'_{m\,\mathrm{at}}}{H} = -\frac{\mu_0 N_A e^2}{6m} \sum_{h=1}^{Z} \langle r_h^2 \rangle. \qquad (57.6)$$

Advertimos que la teoría mecanocuántica rigurosa conduce a una expresión exactamente igual a ésta.

La sustitución en (57.6) de μ_0, N_A, e y m por sus valores numéricos da que

$$\chi_m = -3{,}55\cdot 10^9 \sum_{k=1}^{Z} \langle r_k^2 \rangle.$$

Los radios de las órbitas electrónicas tienen una magnitud del orden de 10^{-10} m. Por consiguiente, la susceptibilidad magnética molar que se obtiene es del orden de $10^{-11} \ldots 10^{-10}$, lo que concuerda bien con los datos experimentales.

§ 58. Paramagnetismo

Si el momento magnético p_m de los átomos es distinto de cero, la substancia es paramagnética. El campo magnético tiende a disponer los momentos magnéticos de los átomos a lo largo de **B**, y el movimiento térmico tiende a dispersarlos uniformemente en todas las direcciones. Como resultado se establece cierta orientación predominante de los momentos a lo largo del campo, tanto mayor cuanto mayor sea B y tanto menor cuanto más alta sea la temperatura.

P. Curie estableció experimentalmente la ley según la cual la susceptibilidad de una substancia paramagnética es

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \tag{58.1}$$

donde C es la *constante de Curie*, que depende del tipo de substancia, y T, la temperatura absoluta.

La teoría clásica del paramagnetismo fue desarrollada por P. Langevin en 1905. Nosotros nos limitaremos a exponer esta teoría para el caso en que los campos no son demasiado intensos y las temperaturas no son muy bajas.

De acuerdo con la fórmula (46.10), el átomo posee en el campo magnético la energía potencial $W = -p_m B \cos\vartheta$, que depende del ángulo ϑ entre los vectores p_m y B. Por eso la distribución en equilibrio de los momentos entre las direcciones debe subordinarse a la ley de Boltzmann (véase el § 100 del tomo 1º). Según esta ley, la probabilidad de que el momento magnético del átomo forme con la dirección del vector **B** un ángulo comprendido entre los límites de ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, es proporcional a

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{\frac{p_m B \cos\vartheta}{kT}}.$$

Introduciendo la designación

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \tag{58.2}$$

la expresión que determina la probabilidad se puede escribir en la forma

$$e^{a \cos \vartheta}. \tag{58.3}$$

En ausencia del campo todas las direcciones de los momentos magnéticos son igualmente probables. Por lo tanto, la probabilidad de que la dirección del momento forme con cierta dirección z un ángulo entre los límites de ϑ a $\vartheta + d\vartheta$ es

$$(dP_\vartheta)_{B=0} = \frac{d\Omega_\vartheta}{4\pi} = \frac{2\pi \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta. \tag{58.4}$$

Aquí $d\Omega_\vartheta = 2\pi \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta$ es el ángulo sólido comprendido entre los conos con ángulos de abertura ϑ y $\vartheta + d\vartheta$ (fig. 58.1).

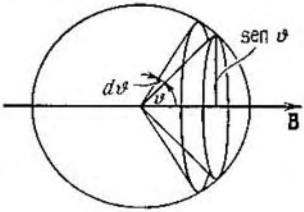


Fig. 58.1.

En presencia del campo en la expresión de la probabilidad aparece el factor (58.3):

$$dP_\vartheta = Ae^{a \cos \vartheta} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \tag{58.5}$$

(A es un factor de proporcionalidad desconocido por ahora).

El momento magnético del átomo tiene una magnitud del orden de un magnetón de Bohr, es decir, de $\sim 10^{-23}$ J/T (véase (56.7)). Con los campos que se alcanzan de ordinario, la inducción magnética suele ser del orden de 1 T (10^4 Gs). Por consiguiente, $p_m B$ es del orden de 10^{-23} J. La magnitud kT a la temperatura ambiente es aproximadamente igual a $4 \cdot 10^{-21}$ J. De este modo, $a = \frac{p_m B}{kT} \ll 1$ y $e^{a \cos \vartheta}$ se puede sustituir aproximadamente por $1 + a \cos \vartheta$. En esta aproximación la igualdad (58.5) toma la forma

$$dP_\vartheta = A(1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta.$$

El coeficiente A se puede hallar partiendo de que la suma de las probabilidades de todos los valores posibles del ángulo ϑ debe ser igual a la unidad:

$$1 = \int_0^\pi A(1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta = A.$$

De aquí $A = 1$, de manera que

$$dP_\vartheta = \frac{1}{2}(1 + a \cos \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta.$$

Supongamos que en la unidad de volumen de la substancia paramagnética hay n átomos. Entonces el número de átomos, cuyos momentos magnéticos forman con la dirección del campo ángulos desde ϑ hasta $\vartheta + d\vartheta$, será

$$dn_\vartheta = n dP_\vartheta = \frac{1}{2} n (1 + a \cos \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta.$$

Cada uno de estos átomos hace al momento magnético resultante una aportación igual a $p_m \cos \vartheta$. Por lo tanto, para el momento magnético de la unidad de volumen (es decir, para la imanación) se obtiene la expresión

$$J = \int_0^\pi p_m \cos \vartheta \, dn_\vartheta = \frac{1}{2} n p_m \int_0^\pi (1 + a \cos \vartheta) \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2} n p_m \frac{2a}{3} = \frac{n p_m a}{3}.$$

La sustitución de a por su valor (58.2) da

$$J = \frac{n p_m^2 B}{3kT}.$$

Finalmente, dividiendo J por H y suponiendo que $B/H = \mu_0$ (para los materiales diamagnéticos μ es prácticamente igual a la unidad), hallamos la susceptibilidad:

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}. \tag{58.6}$$

Sustituyendo n por el número de Avogadro N_A, se halla la expresión de la susceptibilidad molar:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT}. \tag{58.7}$$

Hemos llegado a la ley de Curie. La comparación de las fórmulas (58.1) y (58.7) da para la constante de Curie la expresión siguiente:

$$C = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3k}. \tag{58.9}$$

Recordamos que la fórmula (58.7) se ha obtenido suponiendo que $p_m B \ll kT$. En campos muy intensos y a temperaturas bajas se observa una desviación de la proporcionalidad entre la imanación J del material paramagnético y la intensidad del campo H; en particular, puede llegar el estado de saturación magnética, en el cual todos los $\mathbf{p}_m$ se alinean a lo largo del campo y el aumento ulterior de H no hace que crezca J.

Los valores de χ_m calculados por la fórmula (58.7) concuerdan bien en una serie de casos con los valores obtenidos en la experiencia.

La teoría cuántica del paramagnetismo tiene en cuenta el hecho de que sólo son posibles las orientaciones discretas del momento magnético del átomo con respecto al campo. Esta teoría llega a una expresión de χ_m análoga a la (58.7).

§ 59. Ferromagnetismo

Una clase especial de materiales magnéticos la forman las substancias capaces de tener imanación en ausencia de un campo magnético exterior. Como su representante más extendido es el hierro, estos materiales recibieron el nombre de *ferromagnéticos*. A esta clase, además del hierro, petenecen el níquel, cobalto, gadolinio, sus aleaciones y combinaciones así como ciertas aleaciones y combinacio-

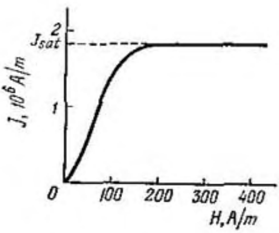


Fig. 59.1.

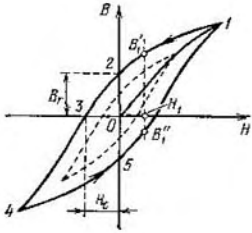


Fig. 59.2.

nes del manganeso y del cromo con elementos no ferromagnéticos. El ferromagnetismo es propio de todas estas substancias únicamente cuando están en estado cristalino.

Los ferromagnéticos son substancias fuertemente magnéticas. Su imanación es un enorme número de veces mayor (hasta 10^{10}) que la de los dia y paramagnéticos, que pertenecen a la categoría de las substancias débilmente magnéticas.

La imanación de las substancias débilmente magnéticas varía linealmente con la intensidad del campo. La imanación de los ferromagnéticos depende de H de un modo complejo. En la fig. 59.1 se da la curva de imanación de un material ferromagnético, cuyo momento magnético era inicialmente nulo (es la llamada *curva de primera imanación o virgen*). Ya en los campos del orden de varios oerstedios ($\sim$100 A/m) la imanación J alcanza la saturación. La curva de primera imanación en el diagrama $B - H$ se da en la fig. 59.2 (curva $O - 1$). Se recordará que $B = \mu_0 (H + J)$. Por eso, al llegar a la saturación, B sigue creciendo con H según la ley lineal $B = \mu_0 H + \text{const}$, en la que const $= \mu_0 J_{sat}$.

La curva de imanación del hierro la obtuvo y estudió detalladamente por vez primera el científico ruso A. G. Stoliétov. El método balístico de medición de la inducción magnética elaborado por él se sigue aplicando extensamente hasta hoy (véase el § 62).

Además de por la dependencia no lineal entre H y J (o entre H y B), los ferromagnéticos se caracterizan por tener *histéresis*. Si la imanación se hace llegar hasta la saturación (punto *1* en la fig. 59.2) y después se disminuye la intensid al del campo magnético, la inducción B sigue no la curva inicial 0 —1, sino que varía de acuerdo con la *1—2*. Como resultado, cuando la intensidad del campo exterior se hace igual a cero (punto *2*), la imanación no desaparece y se caracteriza por la magnitud B_r, llamada *inducción remanente*. La imanación tiene entonces el valor J_r, denominado *imanación remanente*.

La inducción B se anula únicamente bajo la acción de un campo H_c, cuyo sentido es inverso al del campo que produjo la imanación. La intensidad H_c recibe el nombre de *fuerza coercitiva*.

La existencia de la imanación remanente hace posible la fabricación de imanes permanentes, es decir, de cuerpos que, sin gastar energía en el mantenimiento de las corrientes macroscópicas, poseen momento magnético y crean en el espacio que las rodea un campo magnético. Un imán permanente conserva tanto mejor sus propiedades cuanto mayor sea la fuerza coercitiva del material de que está hecho.

Si sobre el material ferromagnético actúa un campo magnético alternativo, la inducción varía de auerdo con la curva *1—2—3—4—5—1* (fig. 59.2), llamada *ciclo, lazo o bucle de histéresis* (un bucle semejante se obtiene también en el diagrama J — H). Si los valores máximos de H son tales que la imanación llega a la saturación, se obtiene el denominado *ciclo de histéresis máximo* (lazo continuo en la fig. 59.2). Si en los valores de amplitud de H no se lllega a la saturación, se obtiene el bucle llamado *ciclo parcial* (lazo de trazos en la figura). Existe una infinidad de ciclos parciales y todos ellos están dentro del bucle de histéresis máximo.

La histéresis hace que la imanación del material ferromagnético no sea una función uniforme de H; esta imanación depende en gran medida de la «prehistoria» de la muestra, es decir, de los campos en que se ha encontrado anteriormente. Por ejemplo, en un campo de intensidad H_1 (fig. 59.2), la inducción puede tener cualquier valor entre los límites de B_1' a B_1''.

De todo lo dicho acerca de los materiales ferromagnéticos se sigue que, por sus propiedades, se parecen mucho a los ferroeléctricos (véase el § 23).

Debido a la no uniformidad de la dependencia de B respecto de H, el concepto de permeabilidad magnética sólo se aplica a la curva de primera imanación. La permeabilidad magnética de los materiales

ferromagnéticos μ (y, por consiguiente, la susceptibilidad magnética χ) es función de la intensidad del campo. En la fig. 59.2, *a* se representa una curva de primera imanación. Tracemos, desde el origen de coordenadas, una recta que pase por un punto cualquiera de la cura. La tangente del ángulo de inclinación de esta recta será proporcional a la relación B/H, es decir, a la permeabilidad magnética μ para el valor correspondiente de la intensidad del campo. Cuando H aumenta desde cero, el ángulo de inclinación (y, por lo tanto, μ) crece al principio. En el punto *2* llega al máximo (la recta $0-2$ es tangente a la curva) y después decrece. En la fig. 59.3, *b* se da la gráfica de la dependencia de μ respecto de H. En esta figura se ve que el valor máximo de la permeabilidad se alcanza un poco antes que el de saturación. Si H aumenta indefinidamente, la permeabilidad se aproxima asintóticamente a la unidad. Esto se deduce de que en la expresión $\mu = 1 + J/H$, J no puede superar el valor J_{sat}.

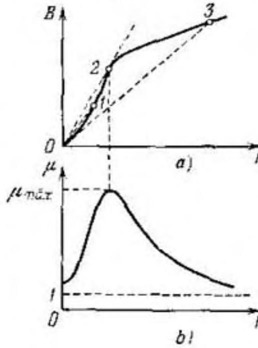


Fig. 59.3.

Las magnitudes B_r (o J_r), H_c y $\mu_{máx}$ son las características fundamentales de un material ferromagnético. Si la fuerza coercitiva H_c es grande, se dice que el material ferromagnético es *duro*. Para este material es característico un ciclo de histéresis ancho. El material ferromagnético, cuya H_c es pequeña (y, respectivamente, tiene el lazo de histéresis estrecho), se llama *blando*. En dependencia del uso a que se quiere destinar, se toma un material magnético de una u otra característica. Así, para los imanes permanentes se utilizan materiales ferromagnéticos duros, y para los núcleos de los transformadores, materiales ferromagnéticos blandos. En la tabla 59.1 se dan las características de varios materiales ferromagnéticos típicos.

Tabla 59.1

Material	Composición	$\mu_{máx}$	B_r, T	H_c, A/m
Hierro	99,9% Fe	5 000	—	80
Supermalloy	79% Ni, 5%, Mo, 16% Fe	800 000	—	0,3
Alnico	10% Al, 19% Ni, 18% Co, 53% Fe	—	0,9	52 000

Los fundamentos de la teoría del ferromagnetismo fueron sentados por Ya. I. Frénkel y K. Heisenberg en 1928. De los experimentos para el estudio de los fenómenos magnetomecánicos (véase el § 56) se deduce que los responsables de las propiedades magnéticas de los materiales ferromagnéticos son los momentos magnéticos intrínsecos (de espín) de los electrones. En determinadas condiciones, en los cristales pueden surgir fuerzas [1]) que hacen que los momentos magnéticos de los electrones se alineen paralelamente unos a otros. Como resultado aparecen *zonas de imanación espontánea* denominadas también *dominios*. Dentro de los límites de cada dominio el material ferromagnético está imanado espontáneamente hasta la saturación y posee un momento magnético determinado. Las orientaciones de estos momentos son diferentes en distintos dominios (fig. 59.4), de manera que, en ausencia de un campo magnético exterior, el momento total de todo el cuerpo es nulo. Las dimensiones de los dominios son del orden de 1. . .10 μm.

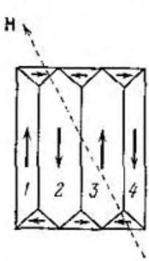


Fig. 59.4.

La acción del campo sobre los dominios resulta ser distinta en las diferentes etapas del proceso de imanación. Al principio, cuando los campos son débiles, se observa un desplazamiento de los límites de los dominios, del que resulta que aumentan aquellos dominios, cuyos momentos forman con **H** un ángulo menor, a expensas de los dominios en los cuales el ángulo ϑ entre los vectores $\mathbf{p}_m$ y **H** es mayor. Por ejemplo, los dominios *1* y *3* (fig. 59.4) aumentan a expensas de los dominios *2* y *4*. Al ir aumentando la intensidad del campo este proceso continúa hasta que los dominios con menor ϑ (que tienen menor energía en el campo magnético) absorben totalmente los dominios energéticamente menos convenientes. En la etapa siguiente se produce el giro de los momentos magnéticos de los dominios hacia la dirección del campo. Al mismo tiempo los momentos de los electrones dentro de los límites del dominio también giran sin alterar su riguroso paralelismo entre sí. Estos procesos (excepto los desplazamientos pequeños de los límites entre los dominios en campos muy débiless son irreversibles, lo cual es causa de la histéresis.

Para cada material ferromagnético existe una temperatura determinada T_C a la cual las zonas de imanación espontánea se disgregan y la substancia pierde sus propiedades ferromagnéticas. Esta temperatura se denomina *punto* o *temperatura de Curie*. Para el hierro es igual a 768 °C; para el níquel, 365 °C. A temperatura más alta que el punto de Curie el material ferromagnético se transforma en para-

[1]) Estas fuerzas se llaman *de intercambio* o *canje*. Su explicación sólo se da en la mecánica cuántica.

magnético ordinario, cuya susceptibilidad magnética se subordina a la *ley de Curie — Weiss*

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \qquad (59.1)$$

(compárese con la fórmula (58.1)). Cuando el material ferromagnético se enfría hasta más abajo de la temperatura de Curie, en él aparecen de nuevo los dominios.

En ciertos casos las fuerzas de intercambio hacen que aparezcan los materiales llamados *antiferromagnéticos* (cromo, manganeso y otros). La existencia de los antiferromagnéticos fue predicha por L. D. Landáu en 1933. En estos materiales los momentos magnéticos de los electrones están orientados antiparalelamente entre sí de un modo espontáneo. Esta orientación abarca de dos en dos los átomos vecinos. Como resultado de esto, los materiales antiferromagnéticos poseen susceptibilidad magnética extremadamente pequeña y se comportan como paramagnéticos muy débiles. Para los antiferromagnéticos también existe una temperatura T_N, a la cual desaparece la orientación antiparalela de los espines. Esta temperatura se denomina *punto* o *temperatura antiferromagnética de Curie* y *punto* o *temperatura de Néel*. Ciertos antiferromagnéticos (por ejemplo, el erbio, el disprosio, las aleaciones de manganeso y cobre) tienen dos de estas temperaturas (puntos superior e inferior de Néel), en cuyo caso las propiedades antiferromagnéticas sólo se observan a la temperaturas intermedias. Por encima del punto superior la substancia se comporta como paramagnética, y a temperaturas menores que el punto inferior de Néel se convierte en ferromagnética.

CAPITULO VIII

INDUCCIÓN ÉLECTROMAGNÉTICA

§ 60. Fenómeno de la inducción electromagnética

En 1831 descubrió M. Faraday que en un circuito conductor cerrado, si varía el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por él, se produce corriente eléctrica. Este fenómeno se llama *inducción electromagnética* y la corriente que se produce, *corriente inducida*.

El fenómeno de la inducción electromagnética evidencia que, cuando varía el campo magnético en el circuito, surge una *fuerza electromotriz inducida* $\mathscr{E}_i$. La magnitud $\mathscr{E}_i$ no depende del procedimiento, por el cual se efectúa la variación del flujo magnético Φ, y se determina únicamente por la velocidad con que varía Φ, es decir, por el valor de $d\Phi/dt$. Si varía el signo de $d\Phi/dt$ cambia también el sentido de $\mathscr{E}_i$.

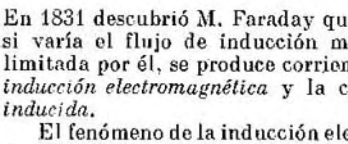


Fig. 60.1.

Consideremos el ejemplo siguiente. En la fig. 60.1 se representa un circuito *1*, en el cual la intensidad de la corriente I_1 se puede variar por medio de un reóstato. Esta corriente crea un campo magnético que atraviesa el circuito *2*. Si aumenta la corriente I_1, el flujo de inducción magnétifa Φ a través del circuito *2* crecerá. Esto hace que aparezca en este último circuito una corriente inducida I_2 que registra el galvanómetro. La disminución de la corriente I_1 condiciona el decrecimiento del flujo magnético a través del segundo circuito, lo que hace que aparezca en él una corriente inducida de sentido contrario al que tenía en el primer caso. La corriente inducida I_2 puede excitarse también acercando el circuito *2* al *1* o alejando el segundo circuito del primero. En ambos casos la corriente tiene sentidos opuestos. Finalmente, la inducción electromagnética puede excitarse, sin trasladar el circuito *2*, haciendo que éste gire de manera que varíe el ángulo entre la normal al circuito y la dirección del campo.

E. Lenz estableció la regla que permite hallar el sentido de la corriente inducida. *La regla o ley de Lenz dice que la corriente inducida tiene siempre un sentido tal, que se opone a la causa que la produce.* Si,

por ejemplo, la variación de Φ se debe a la traslación del circuito *2*, el sentido de la corriente inducida que se produce es tal, que la fuerza de interacción con el primer circuito se opone a que el circuito se mueva. Cuando el circuito *2* se acerca al *1* (fig. 60.1) se produce la corriente I'_2, cuyo momento magnético está dirigido en sentido contrario al del campo de la corriente I_1 (el ángulo α entre los vectores $\mathbf{p}'_m$ y $\mathbf{B}$ es igual a π). Por consiguiente, sobre el circuito *2* actuará una fuerza que lo repelerá del *1* (véase la fórmula (46.11)). Si el circuito *2* se aleja del *1*, surge una corriente I''_2, cuyo momento $\mathbf{p}''_m$ tiene el mismo sentido que el campo de la fuerza I_1 ($\alpha = 0$), de manera que la fuerza que actúa sobre el circuito *2* estará dirigida hacia el circuito *1*.

Supongamos que ambos circuitos están en reposo y que la corriente se induce en el circuito *2* variando la corriente I_1 en el circuito *1*. En este caso se produce una corriente I_2 de tal sentido, que el flujo magnético propio que ella crea tenderá a debilitar la variación del flujo exterior que hace que aparezca la corriente inducida. Cuando aumenta I_1, es decir, cuando crece el flujo magnético exterior dirigido hacia la derecha, se produce la corriente I'_2, que crea un flujo dirigido hacia la izquierda. Si disminuye I_1, surge la corriente I''_2, cuyo flujo magnético propio tiene el mismo sentido que el flujo exterior, y, por lo tanto, tiende a mantener invariable el flujo exterior.

§ 61. Fuerza electromotriz de inducción

En el párrafo anterior hemos explicado que la variación del flujo magnético Φ a través de un circuito hace que se produzca en éste una fuerza electromotriz inducida $\mathscr{E}_i$. Para hallar la relación

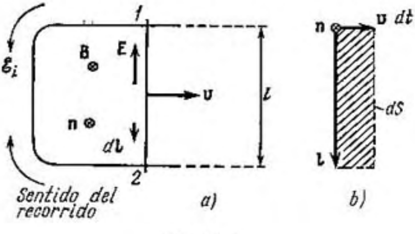


Fig. 61.1.

que existe entre $\mathscr{E}_i$ y la velocidad con que varía Φ, vamos a analizar el ejemplo siguiente.

Tomamos un circuito con un puente móvil de longitud l (fig. 61.1. *a*). Lo colocamos en un campo magnético homogéneo perpendicular al plano del circuito y dirigido hacia detrás de la figura.

Movemos el puente con la velocidad **v**. Con esta misma velocidad empezarán a trasladarse con respecto al campo los portadores de corriente (electrones) que hay en el puente. Como resultado, sobre cada electrón comienza a actuar la fuerza magnética, dirigida a lo largo del puente,

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -e\,[\mathbf{vB}] \tag{61.1}$$

(véase (43.3); la carga del electrón es igual a $-e$). La acción de esta fuerza equivale a la acción que sobre el electrón ejercería un campo eléctrico de intensidad

$$\mathbf{E} = [\mathbf{vB}].$$

Este campo es de procedencia no electrostática. Su circulación por el circuito da la magnitud de la f.e.m. que se induce en él:

$$\mathscr{E}_i = \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} = \int_1^2 [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} \tag{61.2}$$

(la función subintegral sólo es distinta de cero en el trozo *1—2* formado por el puente).

Para que por el signo de $\mathscr{E}_i$ sea posible juzgar el sentido en que actúa la f.e.m., supondremos que $\mathscr{E}_i$ es positiva en el caso en que su sentido forma con el de la normal al circuito un sistema dextrógiro.

La normal la elegimos como se indica en la fig. 61.1. Entonces, al calcular la inducción, hay que recorrer el circuito en sentido horario y, respectivamente, elegir el sentido de los vectores $d\mathbf{l}$. Si en (61.2) se saca fuera del signo de integral el vector constante $[\mathbf{vB}]$, obtenemos

$$\mathscr{E}_i = [\mathbf{vB}] \int_1^2 d\mathbf{l} = [\mathbf{vB}]\,\mathbf{l},$$

donde **l** es el vector que se muestra en la fig. 61.1, *b*. Efectuamos en la expresión obtenida la permutación cíclica de los factores y luego la multiplicamos y dividimos por dt

$$\mathscr{E}_i = \mathbf{B}\,[\mathbf{lv}] = \frac{\mathbf{B}\,[\mathbf{l},\ \mathbf{v}\,dt]}{dt} \tag{61.3}$$

En la fig. 61.1, *b* se ve que

$$[\mathbf{l},\ \mathbf{v}\,dt] = -\mathbf{n}\,dS,$$

donde dS es el incremento del área del circuito en el tiempo dt. Por la definición de flujo, la expresión $\mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \mathbf{Bn}\,dS$ es el flujo a través de la superficie dS, es decir, el incremento del flujo $d\Phi$ a través del circuito. De este modo,

$$\mathbf{B}\,[\mathbf{l},\ \mathbf{v}\,dt] = -\mathbf{Bn}\,dS = -d\Phi.$$

Teniendo esto en cuenta, a la expresión (61.3) se le puede dar la forma

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{61.4}$$

Hemos obtenido que $d\Phi/dt$ y $\mathscr{E}_i$ tienen signos opuestos. El signo del flujo y el de $\mathscr{E}_i$ están ligados con la elección del sentido de la normal al plano del circuito. Con la elección de la normal que hemos hecho (véase la fig. 61.1), el signo de $d\Phi/dt$ es positivo y el de $\mathscr{E}_i$, negativo. Si hubiéramos elegido la normal dirigida no hacia detrás de la figura, sino hacia nosotros, el signo de $d\Phi/dt$ sería negativo y el de $\mathscr{E}_i$, positivo.

La unidad de flujo de inducción magnética en el SI es el *weber* (Wb), que se define como el flujo a través de una superficie de 1 m², atravesada por las líneas normales a ella de un campo magnético con B igual a 1 T. Si la velocidad con que varía el flujo es igual a 1 Wb/s, en el circuito se induce una f.e.m. igual a 1 V.

En el sistema de Gauss la fórmula (61.4) tiene la forma

$$\mathscr{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{61.5}$$

La unidad de Φ en este sistema es el *maxwelio* (Mx), igual al flujo a través de una superficie de 1 cm² cuando $B = 1$ Gs. La fórmula (61.5) de $\mathscr{E}_i$ en unid. CGSE de potencial. Para obtener $\mathscr{E}_i$ en voltios hay que multiplicar el resultado obtenido por 300. Como $300/c = 10^{-8}$,

$$\mathscr{E}_i\,(V) = -10^{-8}\,\frac{d\Phi}{dt}\,\frac{(\mathrm{Mx})}{(\mathrm{s})}. \tag{61.6}$$

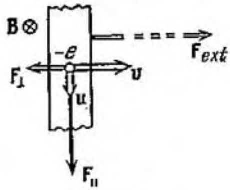


Fig. 61.2.

En los razonamientos que nos han conducido a la fórmula (61.4) el papel de las fuerzas exteriores que mantienen la corriente en el circuito, lo desempeñan las fuerzas magnéticas. El trabajo de estas fuerzas sobre una carga positiva unitaria, igual por definición a la f.e.m., resulta ser distinto de cero. Esta circunstancia está en aparente contradicción con la afirmación hecha en el § 43 acerca de que la fuerza magnética no puede efectuar trabajo sobre la carga. La contradicción se elimina si se tiene en cuenta que la fuerza (61.1) no es la fuerza magnética total que actúa sobre el electrón, sino únicamente la componente paralela al conductor de esta fuerza debida a la velocidad **v** (véase la fuerza $\mathbf{F}_\parallel$ en la fig. 61.2). Bajo la acción de esta componente el electrón se pone en movimiento a lo largo del conductor con la velocidad **u** y como resultado de esto aparece la componente de la fuerza magnética perpendicular al conductor

$$\mathbf{F}_\perp = -e\,[\mathbf{uB}]$$

(esta componente no hace aportación a la circulación porque es perpendicular a $d\mathbf{l}$).

La fuerza magnética total que actúa sobre el electrón es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

y el trabajo de esta fuerza sobre el electrón en el tiempo dt es

$$dA = \mathbf{F}_{\parallel}\ \mathbf{u}\,dt + \mathbf{F}_{\perp}\ \mathbf{v}\,dt = F_{\parallel}u\,dt - F_{\perp}v\,dt$$

(los vectores $\mathbf{F}_{\parallel}$ y $\mathbf{u}$ tienen el mismo sentido, y los $\mathbf{F}_{\perp}$ y $\mathbf{v}$, sentidos opuestos; véase la fig. 61.2). Sustituyendo las fuerzas por los valores de sus módulos: $F_{\parallel} = evB$ y $F_{\perp} = euB$, obtenemos que el trabajo de la fuerza magnética total es nulo.

La fuerza $\mathbf{F}_{\perp}$ está dirigida en sentido contrario al de la velocidad $\mathbf{v}$ del puente. Por eso, para que el puente se traslade con la velocidad $\mathbf{v}$ constante, hay que aplicarle una fuerza exterior $\mathbf{F}_{ext}$ que equilibre la suma de las fuerzas $\mathbf{F}_{\perp}$ aplicadas a todos los electrones que hay en él. A expensas del trabajo de esta fuerza se produce la energía que se libera en el circuito por la corriente inducida.

La explicación que hemos estudiado de la aparición de la f.e.m. inducida se refiere al caso en que el campo magnético es constante y varía la geometría del circuito. Pero el flujo magnético a través del circuito puede variar también a expensas de la variación de $\mathbf{B}$. En este caso la explicación del surgimiento de la f.e.m. es otra en esencia. El campo magnético que varía con el tiempo genera un campo eléctrico rotacional $\mathbf{E}$ (de esto se trata más detalladamente en el § 69). Bajo la acción del campo $\mathbf{E}$ se ponen en movimiento los portadores de corriente en el conductor y se produce la corriente inducida. La relación entre la f.e.m. inducida y las variaciones del campo magnético también la describe en este caso la fórmula (61.4).

Supongamos que el circuito en que se induce la f.e.m. consta no de una espira, sino de N espiras, por ejemplo, es un solenoide. Como las espiras están conectadas en serie, $\mathscr{E}_i$ será igual a la suma de las f.e.m. inducidas en cada una de las espiras por separado:

$$\mathscr{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum \Phi\right).$$

La magnitud

$$\Psi = \sum \Phi \tag{61.7}$$

se llama *flujo enlazado* o *flujo magnético total* y se mide en las mismas unidades que Φ. Si el flujo que atraviesa cada espira es el mismo,

$$\Psi = N\Phi. \tag{61.8}$$

La f.e.m. inducida en un circuito complejo se determina por la fórmula

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} \tag{61.9}$$

§ 62. Métodos para medir la inducción magnética

Supongamos que el flujo magnético total enlazado a cierto circuito varía desde el valor Ψ_1 hasta el Ψ_2. Hallemos la carga q que pasa entonces a través de cada sección del circuito. El valor instantáneo de la intensidad de la corriente en el circuito será

$$I=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}.$$

De aquí

$$dq=I\,dt=-\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}\,dt=-\frac{1}{R}\,d\Psi.$$

Integrando esta expresión hallamos la carga total:

$$q=\int dq=-\frac{1}{R}\int_1^2 d\Psi=\frac{1}{R}(\Psi_1-\Psi_2). \qquad (62.1)$$

La relación (62.1) sirve de base al procedimiento balístico elaborado por A.G. Stoliétov para medir la inducción magnética, que

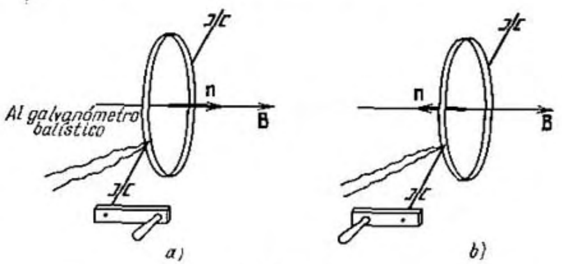


Fig. 62.1.

consiste en lo siguiente. En el campo que se investiga se coloca una bobina pequeña de N espiras. Esta bobina se sitúa de tal forma que el vector **B** resulte perpendicular al plano de las espiras (fig. 62.1, a). Entonces el flujo magnético total embragado a la bobina será

$$\Psi_1=NBS,$$

donde S es el área de una espira, que deberá ser tan pequeña que dentro de sus límites el campo se pueda considerar homogéneo.

Si la bobina gira 180° (fig. 62.1, b), el flujo enlazado se hace igual a $\Psi_2=-NBS$ (**n** y **B** tienen sentidos opuestos). Por consiguiente, la variación del flujo total que se produce al girar la bobina es $\Psi_1-\Psi_2=2NBS$. Si el giro se efectúa con suficiente rapidez, en el

sistema se produce un impulso de corriente con el cual pasa la carga

$$q=\frac{1}{R}2NBS \tag{62.2}$$

(véase la fórmula (62.1)).

La carga que pasa por un circuito con un breve impulso de corriente se puede medir valiéndose del llamado galvanómetro balístico, que es un galvanómetro con gran período de oscilaciones propias. Midiendo q y conociendo R, N y S, por la fórmula (62.2) se puede hallar B. En este caso se entiende por R la impedancia del circuito, en la que se incluye la resistencia de la bobina, la de los conductores de conexión y la del galvanómetro.

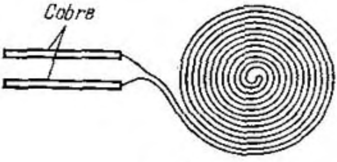


Fig. 62.2.

En vez de girar la bobina se puede conectar (o desconectar) el campo magnético que se estudia o invertir su sentido.

Para medir B se utiliza también la circunstancia de que la resistencia eléctrica del bismuto aumenta mucho bajo la acción del campo magnético (aproximadamente en un 5% por cada décima de tesla o por cada 1000 Gs). Por eso, colocando en el campo magnético una espiral de bismuto previamente graduada (fig. 62.2) y midiendo la variación relativa de su resistencia, se puede determinar la inducción magnética del campo.

La resistencia eléctrica de otros metales también aumenta en el campo magnético, pero en mucho menor grado. En el cobre, por ejemplo, el aumento de la resistencia es aproximadamente 10^4 veces menor que en el bismuto.

§ 63. Corrientes de Foucault

Las corrientes inducidas se pueden excitar también en conductores macizos. En este caso reciben el nombre de *corrientes de Foucault* o *corrientes en torbellino*. La resistencia eléctrica de un conductor macizo es pequeña, por lo que las corrientes de Foucault pueden alcanzar una intensidad muy grande.

De acuerdo con la ley de Lenz, las corrientes de Foucault siguen dentro del conductor los caminos y direcciones más convenientes para que con su acción oponerse lo más intensamente posible a la causa que las produce. Por eso los buenos conductores que se mueven en un campo magnético intenso experimentan un fuerte frenado, debido a la interacción de las corrientes de Foucault con el campo magnético. Esto se utiliza para amortiguar las partes móviles de los galvanómetros, sismógrafos y otros aparatos. En la parte móvil del

aparato se sujeta una lámina conductora (por ejemplo, de aluminio) en forma de sector (fig. 63.1) que se introduce en el espacio entre los polos de un imán permanente de gran fuerza. Al moverse la lámina surgen en ella fuerzas de Foucault que frenan el sistema. La ventaja de este dispositivo consiste en que el frenado sólo se produce cuando la lámina se mueve, y desaparece cuando la lámina está en reposo. Por eso el amortiguador electromagnético no dificulta en absoluto que el sistema entre exactamente en la posición de equilibrio.

La acción térmica de las corrientes de Foucault se aprovecha en los hornos de inducción. Un horno de este tipo consiste en una bobina alimentada por corriente de alta frecuencia y gran intensidad. Si dentro de la bobina se coloca un cuerpo conductor, se producen en él intensas corrientes en torbellino que pueden calentarlo hasta la fusión. Así se hace para fundir los metales en el vacío, lo que permite obtener materiales de pureza extraordinariamente alta.

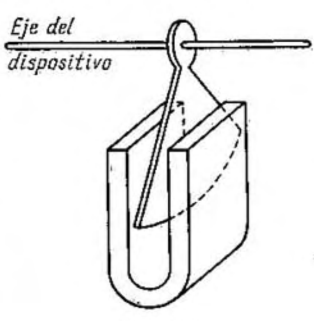


Fig. 63.1.

Valiéndose de las corrientes de Foucault se realiza también el calentamiento de las partes metálicas internas de las instalaciones de vacío para desgasificarlas.

En muchos casos las corrientes de Foucault son indeseables y hay que tomar medidas especiales para combatirlas. Así, por ejemplo, para evitar las pérdidas de energía en el calentamiento de los núcleos de los transformadores por las corrientes de Foucault, éstos se hacen de láminas delgadas separadas por capas aislantes. Las láminas se sitúan de tal modo que las posibles direcciones de las corrientes de Foucault sean perpendiculares a ellas. La aparición de las ferritas (materiales magnéticos semiconductores de gran resistencia eléctrica) ha hecho posible la fabricación de núcleos macizos.

Las corrientes de Foucault que se producen en los conductores por los cuales pasan corrientes alternas están dirigidas de manera que debilitan la corriente dentro del conductor y la intensifican cerca de la superficie. Resultado de esto es que la corriente de alternancia rápida no está distribuida uniformemente por la sección del conductor, sino que parece empujada hacia su superficie. Este fenómeno se denomina *efecto pelicular*. A este efecto se debe que la parte interna de los conductores de los circuitos de alta frecuencia sea inútil. Por eso en dichos circuitos se utilizan conductores en forma de tubos.

§ 64. Fenómeno de la autoinducción

La corriente eléctrica que fluye por cualquier circuito crea un flujo magnético Ψ que lo atraviesa. Las variaciones de I hacen que también varíe Ψ, a consecuencia de lo cual en el circuito se induce una f.e.m. Este fenómeno recibe el nombre de *autoinducción*.

De acuerdo con la ley de Biot—Savart, la inducción magnética B es proporcional a la intensidad de la corriente que excita el campo. De aquí se infiere que la corriente I que pasa por el circuito y el flujo magnético total Ψ a través de él que ella crea son proporcionales entre sí:

$$\Psi = LI. \tag{64.1}$$

El coeficiente de proporcionalidad L entre la intensidad de la corriente y el flujo magnético total se llama *inductancia* del circuito.

La dependencia lineal de Ψ respecto de I sólo se observa en el caso en que la permeabilidad magnética μ del medio que rodea el conductor no depende de la intensidad del campo H, es decir, en ausencia de materiales ferromagnéticos. En el caso contrario μ es una función compleja de I (mediante H; véase la fig. 59.3, *b*) y, como $B = \mu_0\mu H$, la dependencia de Ψ respecto de I también será bastante compleja. No obstante, la relación (64.1) se extiende a este caso considerando que la inductancia L es función de I. Si la intensidad de la corriente I permanece invariable, el flujo total Ψ puede variar a expensas de la variación de la forma y dimensiones del circuito.

De lo expuesto se deduce que la inductancia L depende de la geometría del circuito (o sea, de su forma y dimensiones) y de las propiedades magnéticas (μ) del medio que lo rodea. Si el circuito es rígido y cerca de él no hay materiales ferromagnéticos, la inductancia L es una magnitud constante.

Como unidad de inductancia del SI se toma la inductancia de un conductor en el cual, si la intensidad de la corriente es de 1 A, se produce un flujo total Ψ enlazado a él igual a 1 Wb. Esta magnitud se denomina *henrio*[1] (H).

[1] En el sistema de Gauss la inductancia tiene dimensión de longitud. De acuerdo con esto la unidad de inductancia de este sistema se llama *centímetro*. La inductancia de 1 cm la tiene un conductor con el cual, cuando la intensidad de la corriente es de 1 unid. CGSM (o sea, 10 A), enlaza un flujo igual a 1 μs (10^{-8} Wb).

Calculemos la inductancia de un solenoide. Sea un solenoide de tal longitud que, prácticamente, se pueda considerar infinito. Al pasar por él la corriente I, dentro del solenoide se excita un campo homogéneo, cuya inducción es $B = \mu_0\mu nI$ (véanse las fórmulas (50.4) y (53.5)). El flujo a través de cada una de las espiras es $\Phi =$

$= BS$, y el flujo magnético total, enlazado con el solenoide,

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0\mu n^2 lSI, \qquad (64.2)$$

donde l es la longitud del solenoide (que hemos supuesto muy grande) S, el área de la sección transversal, y n, el número de espiras por unidad de longitud (el producto nl da el número total de espiras N).

La comparación de las fórmulas (64.1) y (64.2) da para la inductancia de un solenoide muy largo la expresión

$$L = \mu_0\mu n^2 lS = \mu_0\mu n^2 V, \qquad (64.3)$$

en la que $V = lS$ es el volumen del solenoide.

De (64.3) se sigue que la dimensión de μ_0 es igual a la de la inductancia dividida por la dimensión de la longitud. De acuerdo con esto, μ_0 se mide en henrios por metro (véase (39.3)).

Cuando la intensidad de la corriente varía, en el circuito surge la f.e.m. de inducción

$$\mathscr{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \qquad (64.4)$$

Si durante las variaciones de la intensidad de la corriente permanece constante la inductancia (lo que sólo es posible en ausencia de materiales ferromagnéticos), la expresión de la f.e.m. autoinducida tiene la forma

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (64.5)$$

El signo menos en esta fórmula está condicionado por la ley de Lenz, según la cual la corriente inducida tiene siempre un sentido tal, que la opone a la causa que la produce. En el caso que estudiamos la causa que produce la $\mathscr{E}_s$ es la variación de la intensidad de la corriente en el circuito. Tomamos como positivo el recorrido en el sentido horario. Con esta condición la intensidad de la corriente será positiva si la corriente pasa por el circuito en el sentido horario, y negativo si la corriente fluye en el sentido antihorario. Análogamente, $\mathscr{E}_s$ será positiva si actúa en el sentido horario, y negativa si lo hace en el sentido inverso.

La derivada dI/dt es positiva en dos casos: si crece la corriente positiva o si decrece el módulo de la corriente negativa. De (64.5) se deduce que en estos casos $\mathscr{E}_s < 0$. Esto significa que la f.e.m. inducida está dirigida en el sentido antihorario y, por lo tanto, se opone a las variaciones indicadas de la corriente (es decir, al crecimiento de la corriente positiva o a la disminución de la negativa).

La derivada dI/dt es negativa también en dos casos: cuando decrece la corriente positiva o cuando crece el módulo de la negativa. En estos casos $\mathscr{E}_s > 0$ y, por consiguiente, se opone a las variaciones de la corriente (o sea, al decrecimiento de la corriente positiva o al crecimiento del módulo de la negativa).

La relación (64.5) da la posibilidad de determinar la inductancia como el factor de proporcionalidad entre la velocidad con que varía la intensidad de la corriente y la f.e.m. autoinducida que se produce como consecuencia de esto. Sin embargo, esta definición sólo es válida en el caso en que $L = \text{const}$. En presencia de materiales ferromagnéticos la inductancia L de un circuito indeformable será función de I (mediante H); por lo tanto, dL/dt se puede escribir como $(dL/dI)\,(dI/dt)$. Haciendo esta sustitución en la fórmula (64.4), obtenemos que

$$\mathscr{E}_s = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}. \tag{64.6}$$

De aquí queda claro que, en presencia de materiales ferromagnéticos, el factor de proporcionalidad entre dI/dt y $\mathscr{E}_s$ no es, ni mucho menos, igual a L.

§ 65. Corriente al abrir y cerrar un circuito

Por la ley de Lenz, las corrientes adicionales que se producen a consecuencia de la autoinducción tienen siempre un sentido tal, que se oponen a las variaciones de la corriente en el circuito. Esto conduce a que el establecimiento de la corriente al cerrar un circuito y su disminución al abrirlo no se produzcan instantáneamente, sino poco a poco.

Hallemos primero el carácter que tiene la variación de la corriente cuando se abre el circuito. Supongamos que en un circuito, en el cual

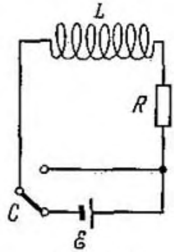


Fig. 65.1.

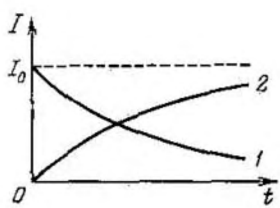


Fig. 65.2.

la inductancia L y la resistencia R sean independientes de I, está intercalada una fuente de f.e.m. $\mathscr{E}$ (fig. 65.1). Por el circuito pasará la corriente continua

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R} \tag{65.1}$$

(consideramos que la resistencia de la fuente de corriente es despreciable por su pequeñez). En un instante $t = 0$, desconectamos la

fuente y, al mismo tiempo, cortacircuitamos con el conmutador C. En cuanto la intensidad de la corriente empieza a decrecer se produce una f.e.m. autoinducida que se opone a este decrecimiento. La intensidad de la corriente en el circuito satisfará la ecuación

$$IR = \mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt},$$

o bien

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \qquad (65.2)$$

La expresión (65.2) es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Separando las variables, obtenemos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

De donde

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln \text{const}$$

(teniendo en cuenta las transformaciones ulteriores, hemos escrito la constante de integración en la forma ln const). La potenciación de esta relación da

$$I = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (65.3)$$

La expresión (65.3) es la solución general de la ecuación (65.2). El valor de const lo hallemos partiendo de las condiciones iniciales. Para $t = 0$ la intensidad de la corriente tenía el valor de (65.1). Por consiguiente, const $= I_0$. Sustituyendo este valor en (65.3) llegamos a la expresión

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (65.4)$$

Así, pues, una vez desconectada la fuente de f.e.m., la intensidad de la corriente en el circuito no se anula instantáneamente, sino que disminuye según la ley exponencial (65.4). La gráfica del decrecimiento de I se da en la fig. 65.2 (curva *1*). La velocidad de disminución viene determinada por la magnitud, con dimensión de tiempo,

$$\tau = \frac{L}{R}, \qquad (65.5)$$

denominada *constante de tiempo* del circuito. Sustituyendo en (65.4) R/L por $1/\tau$, se obtiene

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (65.6)$$

De acuerdo con esta fórmula, τ es el tiempo durante el cual la intensidad de la corriente disminuye e veces. Por (65.5) puede verse que

cuanto mayor sea la inductancia L del circuito y menor su resistencia R, tanto mayor será la constante de tiempo τ y tanto más lentamente disminuirá la corriente en el circuito.

Para simplificar los cálculos hemos supuesto que el circuito, en el instante de ser desconectada la fuente, se cortocircuitaba. Si simplemente se rompe un circuito de gran inductancia, la alta tensión inducida que se origina produce una chispa o un arco en el punto de ruptura.

Consideremos ahora el caso del cierre del circuito. Después de desconectar la fuente de f.e.m. y hasta que la intensidad de la corriente alcance su valor establecido (65.1), en el circuito, además de la f.e.m. $\mathcal{E}$ actuará una f.e.m. autoinducida. Por lo tanto, de acuerdo con la ley de Ohm,

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt},$$

o bien

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \tag{65.7}$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial lineal no homogénea que sólo difiere de la (65.2) en que, en su segundo miembro, en vez de cero figura en ella la magnitud constante $\mathcal{E}/L$. Por la teoría de las ecuaciones diferenciales sabemos que la solución general de una ecuación lineal no homogénea se puede obtener añadiendo cualquier solución parcial suya a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (véase el § 52 del tomo 1º). La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma (65.3). Es fácil cerciorarse de que $I = \mathcal{E}/R = I_0$ es una solución parcial de la ecuación (65.7). Por consiguiente, la solución general de la ecuación (65.7) será la función

$$I = I_0 + \text{const}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

En el instante inicial la intensidad de la corriente I es nula. De aquí, const $= -I_0$. De este modo,

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{65.8}$$

Esta función describe el aumento de la corriente en el circuito después de conectarle la fuente de f.e.m. La gráfica de la función (65.8) se da en la fig. 65.2 (curva *2*).

§ 66. Inducción mutua

Tomemos dos circuitos *1* y *2* próximos entre sí (fig. 66.1). Si por el circuito *1* pasa una corriente de intensidad I_1, ésta crea a través del circuito *2* el flujo magnético total, proporcional a I_1,

$$\Psi_2 = L_{21} I_1 \tag{66.1}$$

(el campo que crea este flujo se representa en la figura por medio de líneas continuas). Si varía la corriente I_1, en el circuito *2* se induce la f.e.m.

$$\mathscr{E}_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad (66.2)$$

(suponemos que cerca del circuito no hay materiales ferromagnéticos).

Análogamente, si por el circuito *2* pasa una corriente de intensidad I_2, se producirá el flujo enlazado con el circuito *1*,

$$\Psi_1 = L_{12}I_2 \qquad (66.3)$$

(el campo que crea este flujo se representa con líneas de trazos). Durante las variaciones de la corriente I_2, en el circuito *1* se induce la f.e.m.

$$\mathscr{E}_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (66.4)$$

Los circuitos *1* y *2* se llaman *acoplados* y el fenómeno de la aparición de la f.e.m. en uno de ellos durante las variaciones de la intensidad de la corriente en el otro, se denomina *inducción mutua.*

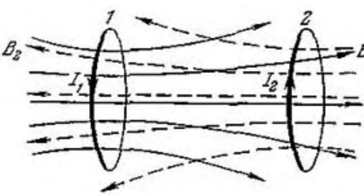


Fig. 66.1.

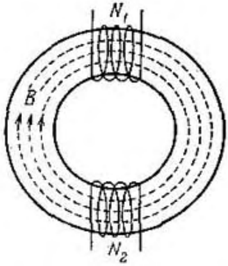


Fig. 66.2.

Los factores de proporcionalidad L_{12} y L_{21} reciben el nombre de *inductancia mutua* de los circuitos. El cálculo correspondiente da que, en ausencia de materiales ferromagnéticos, estos factores son siempre iguales entre sí:

$$L_{12} = L_{21}. \qquad (66.5)$$

Su aumento depende de la forma, dimensiones y disposición mutua de los circuitos, así como de la permeabilidad magnética del medio que los rodea. L_{12} se mide en las mismas unidades que la inductancia L.

Hallemos la inducción mutua de dos bobinas arrolladas sobre un núcleo toroidal común de hierro (fig. 66.2). Las líneas de inducción

magnética se concentran dentro del núcleo (véase el texto que sigue a la fórmula (54.8)), por lo que se puede considerar que el campo magnético excitado por cualquiera de las bobinas tendrá en todas partes dentro del núcleo la misma intensidad. Si la primera bobina tiene N_1 espiras y por ella pasa una corriente de intensidad I_1, de acuerdo con el teorema de la circulación (véase (52.8))

$$Hl = N_1 I_1 \tag{66.6}$$

(l es la longitud del núcleo).

El flujo magnético a través de la sección transversal del núcleo $\Phi = BS = \mu_0\mu HS$, donde S es el área de la sección transversal del núcleo. Sustituyendo aquí el valor de H, deducido de (66.6), y multiplicando por N_2 la expresión obtenida, resulta el flujo magnético total enlazado con el segundo devanado:

$$\Psi_2 = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2 I_1.$$

La comparación de esta expresión con la fórmula (66.1) da que

$$L_{21} = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2. \tag{66.7}$$

El cálculo del flujo Ψ_1 enlazado con el primer devanado en el caso en que por el segundo pasa una corriente de intensidad I_2, conduce a la expresión

$$L_{12} = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2, \tag{66.8}$$

que por su forma coincide con L_{21} (véase (66.7)). Pero en este caso no se puede afirmar que $L_{12} = L_{21}$. El factor μ, que figura en las expresiones de estos coeficientes, depende de la intensidad del campo H en el núcleo. Si $N_1 \neq N_2$, una misma corriente pasando una vez por el primer devanado y otra vez por el segundo, crea en el núcleo campos de distinta intensidad H. Respectivamente, los valores de μ en ambos casos serán diferentes, de manera que cuando $I_1 = I_2$ los valores numéricos de L_{12} y L_{21} no coinciden.

§ 67. Energía de un campo magnético

Sea el circuito representado en la fig. 67.1. Cuando el conmutador está cerrado, en el solenoide se establece la corriente I que condiciona un campo magnético enlazado con las espiras del solenoide. Si se abre el conmutador, a través de la resistencia R pasará durante cierto tiempo la corriente decreciente mantenida por la f.e.m. autoinducida que surge en el solenoide. El trabajo que realiza esta corriente

en el tiempo dt es

$$dA = \mathscr{E}_s I\,dt = -\frac{d\Psi}{dt} I\,dt = -I\,d\Psi. \tag{67.1}$$

Si la inductancia del solenoide no depende de I (L = const), $d\Psi = L\,dI$ y la expresión (67.1) toma la forma

$$dA = -LI\,dI. \tag{67.2}$$

Integrando esta expresión respecto de I entre los límites desde el valor inicial I hasta cero, obtenemos el trabajo realizado en el circuito durante todo el tiempo que tarda en desaparecer el campo magnético,

$$A = -\int_I^0 LI\,dI = \frac{LI^2}{2}. \tag{67.3}$$

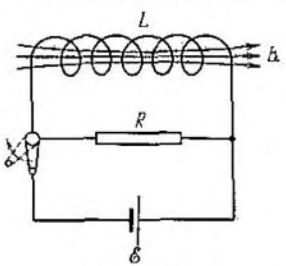


Fig. 67.1.

El trabajo (67.3) se gasta en incrementar la energía interna de la resistencia R, del solenoide y de los conductores de conexión (es decir, en su calentamiento). La realización de este trabajo va acompañada de la desaparición del campo magnético que existía inicialmente en el espacio entorno al solenoide. Como en los cuerpos que rodean el circuito eléctrico no se producen ningunas otras variaciones, llegamos a la conclusión de que el campo magnético es el portador de la energía, a cuyas expensas se realiza el trabajo (67.3). De este modo deducimos que un conductor, con inductancia L, por el cual pasa una corriente de intensidad I, posee la energía

$$W = \frac{LI^2}{2}, \tag{67.4}$$

que está localizada en el campo magnético excitado por la corriente (compárese esta fórmula con la expresión $CU^2/2$ de la energía de un condensador cargado; véase (29.2)).

La expresión (67.3) se puede interpretar como el trabajo que es necesario realizar contra la f.e.m. autoinducida durante el proceso de incremento de la corriente desde 0 hasta I y que se gasta en crear el campo magnético poseedor de la energía (67.4). En efecto, el trabajo realizado contra la f.e.m. autoinducida es

$$A' = \int_0^I (-\mathscr{E}_s)\,I\,dt.$$

Haciendo transformaciones análogas a las que nos condujeron a la expresión (67.2), obtenemos,

$$A' = \int_0^I LI\,dI = \frac{LI^2}{2}, \tag{67.5}$$

lo que coincide con (67.3). El trabajo (67.5) se efectúa al establecerse la corriente a expensas de la fuente de f.e.m. y se gasta totalmente en crear el campo magnético enlazado con las espiras del solenoide. La expresión (67.5) no tiene en cuenta el trabajo que la fuente de f.e.m. gasta, durante el proceso de establecimiento de la corriente, en calentar los conductores.

Expresemos la energía del campo magnético (67.4) por medio de las magnitudes que caracterizan el campo mismo. En el caso de un solenoide muy largo (prácticamente infinito)

$$L = \mu_0\mu n^2 V; \quad H = nI \quad \text{o} \quad I = \frac{H}{n}$$

(véanse las fórmulas (64.3) y (53.8)). Sustituyendo estos valores de L e I en la expresión (67.4) y haciendo transformaciones, se obtiene

$$W = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} V. \tag{67.6}$$

En el § 50 se demostró que el campo magnético de un solenoide infinitamente largo es homogéneo y distinto de cero solamente dentro del solenoide. Por lo tanto, la energía (67.6) está localizada dentro del solenoide y distribuida por su volumen con la densidad constante w, que puede hallarse dividiendo W por V. Haciendo esta división, obtenemos

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}. \tag{67.7}$$

Utilizando la relación (52.14), a la fórmula de la densidad de la energía del campo magnético se le puede dar la forma

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \tag{67.8}$$

Las expresiones que hemos obtenido para la densidad de la energía del campo magnético sólo difieren de la expresión (30.3) de la densidad de la energía del campo eléctrico en que en ellas las magnitudes eléctricas han sido sustituidas por las correspondientes magnéticas.

Conociendo la densidad de la energía del campo en cada punto, se puede hallar la energía del campo comprendido en cualquier volumen V. Para esto hay que calcular la integral

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\mu_0\mu H^2}{2}\,dV. \tag{67.9}$$

Se puede demostrar que en el caso de circuitos acoplados (en ausencia de materiales ferromagnéticos) la energía del campo se determina por la fórmula

$$W=\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}+\frac{L_{12}I_1I_2}{2}+\frac{L_{21}I_2I_1}{2}. \qquad (67.10)$$

Para la energía de N circuitos acoplados entre sí se obtiene la expresión análoga

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} L_{ik}I_iI_k, \qquad (67.11)$$

en la que $L_{ik}=L_{ki}$ es la inductancia mutua de los circuitos i-ésimo y k-ésimo, y $L_{ii}=L_i$ es la inductancia del circuito i-ésimo.

§ 68. Trabajo de inversión del magnetismo de un material ferromagnético

La variación de la corriente en un circuito va acompañada de la realización, contra la f.e.m. autoinducida, del trabajo

$$dA'=(-\mathscr{E}_s)\,I\,dt=\frac{d\Psi}{dt}\,I\,dt=I\,d\Psi. \qquad (68.1)$$

Si la inductancia L del circuito permanece constante (lo que sólo es posible en ausencia de materiales ferromagnéticos), este trabajo se gasta totalmente en crear la energía del campo magnético: $dA'=dW$. En presencia de materiales ferromagnéticos, como ahora veremos, la cuestión es distinta.

En el caso de un solenoide muy largo («infinito») $H=nI$ y $\Psi=nlBS$. Respectivamente,

$$I=\frac{H}{n}\quad \text{y}\quad d\Psi=nlS\,dB.$$

Sustituyendo estas expresiones en (68.1), obtenemos que

$$dA'=H\,dB\cdot V, \qquad (68.2)$$

donde $V=lS$ es el volumen del solenoide, es decir, el volumen en el cual se ha creado el campo magnético homogéneo.

Aclaremos si se puede identificar la expresión (68.2) con el incremento de la energía del campo magnético. Se recordará que la energía es una función de estado. Por lo tanto, la suma de sus incrementos para un ciclo es nula:

$$\oint dW=0.$$

Si el solenoide se llena con un material ferromagnético, la relación entre B y H se representa por la curva que muestra la fig. 68.1. La

expresión $H\,dB$ da el área de la zona rayada. Por consiguiente, la integral $\oint H\,dB$ calculada a lo largo del bucle de histéresis es igual al área S_b abarcada por el bucle. De este modo, la integral de la expresión (68.2), o sea, $\oint dA'$, es distinta de cero. De aquí se sigue que, en presencia de materiales ferromagnéticos, el trabajo (68.2) no se puede igualar al incremento de la energía del campo magnético. Una vez que termina el ciclo de inversión del magnetismo, H y B y, por lo tanto también la energía magnética, tendrán la magnitud inicial. Por consiguiente, el trabajo $\oint dA'$ no se gasta en crear la energía del campo magnético. La experiencia demuestra que este trabajo se gasta en aumentar la energía interna del material ferromagnético, es decir, en su calentamiento.

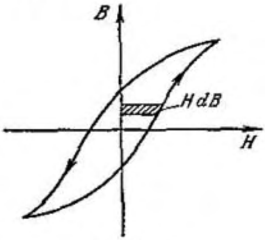


Fig. 68.1.

Así, al efectuar un ciclo de inversión del magnetismo de un material ferromagnético se gasta un trabajo, referido a la unidad de volumen, numéricamente igual al área del bucle de histéresis:

$$A'_{\text{unid. vol}} = \oint H\,dB = S_b. \tag{68.3}$$

Este trabajo se gasta en calentar el material ferromagnético.

En ausencia de materiales ferromagnéticos B es una función unívoca de H ($B = \mu_0\mu H$, donde $\mu = \text{const}$). Po eso la expresión $H\,dB = \mu_0\mu H\,dH$ es la diferencial total

$$dw = H\,dB, \tag{68.4}$$

que determina el incremento de la energía del campo magnético. La integración de la expresión (68.4) entre los límites de 0 a H conduce a la fórmula (67.7) de la densidad de la energía del campo (antes de efectuar la integración hay que transformar $H\,dB$ sustituyendo dB por $\mu_0\mu\,dH$).

CAPÍTULO IX

ECUACIONES DE MAXWELL

§ 69. Campo rotacional eléctrico

Estudiemos el caso de la inducción electromagnética cuando el circuito alámbrico en que se induce la corriente está en reposo y las variaciones del flujo magnético están condicionadas por las del campo magnético. La aparición de la corriente inducida evidencia que las variaciones del campo magnético hacen que se produzcan en el circuito fuerzas extrañas que actúan sobre los portadores de corriente. Estas fuerzas no están relacionadas con los procesos químicos ni térmicos que tienen lugar en el conductor; tampoco pueden ser fuerzas magnéticas, ya que estas últimas no efectúan trabajo sobre las cargas. Queda llegar a la conclusión de que la corriente inducida se debe al surgimiento de un campo eléctrico en el conductor. Designemos por $\mathbf{E}_B$ la intensidad de este campo (esta designación, lo mismo que la $\mathbf{E}_q$ que utilizaremos a continuación, es auxiliar y más tarde prescindiremos de los subíndices B y q). La fuerza electromotriz es igual a la circulación del vector $\mathbf{E}_B$ a lo largo del circuito dado:

$$\mathscr{E}_i = \oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l}. \tag{69.1}$$

La sustitución en la fórmula $\mathscr{E}_i = -d\Phi/dt$ de la expresión (69.1) para $\mathscr{E}_i$ y de la expresión $\int \mathbf{B} \, d\mathbf{S}$ para Φ, conduce a la relación

$$\oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l} = \quad \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S},$$

(la integral del segundo miembro de esta igualdad se toma sobre una superficie arbitraria que se apoye en el circuito). Como el circuito y la superficie están en reposo, la operación de derivación respecto del tiempo y la integración sobre la superficie pueden permutarse:

$$\oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S}. \tag{69.2}$$

Y como el vector $\mathbf{B}$ depende, en términos generales, tanto del tiempo como de las coordenadas, bajo el signo de integral hemos escrito el símbolo de derivada parcial respecto del tiempo (la integral $\int \mathbf{B} \, d\mathbf{S}$ es función del tiempo solamente).

El primer miembro de la igualdad (69.2) lo transformamos de acuerdo con el teorema de Stokes y obtenemos el resultado

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}_B]\, d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}.$$

En virtud de que la superficie de integración se elige arbitrariamente, debe cumplirse la igualdad

$$[\nabla \mathbf{E}_B] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{69.3}$$

El rotor del campo $\mathbf{E}_B$ en cada punto del espacio es igual a la derivada del vector **B** respecto del tiempo tomada con signo contrario.

J.C. Maxwell supuso que el campo magnético variable con el tiempo condiciona la aparición del campo $\mathbf{E}_B$ en el espacio, independientemente de la presencia en dicho espacio del circuito alámbrico. La existencia de este circuito sólo permite descubrir, por la aparición en él de la corriente inducida, la existencia del campo eléctrico en los puntos correspondientes del espacio.

Así, según la idea de Maxwell, el campo magnético variable con el tiempo origina un campo eléctrico. Este campo $\mathbf{E}_B$ se diferencia substancialmente del campo electrostático $\mathbf{E}_q$ que generan las cargas en reposo. El campo electrostático es de potencial y sus líneas de intensidad comienzan y finalizan en cargas. El rotor del vector $\mathbf{E}_q$ es nulo en cualquier punto:

$$[\nabla \mathbf{E}_q] = 0 \tag{69.4}$$

(véase la fórmula (12.3)). De acuerdo con (69.3), el rotor del vector $\mathbf{E}_B$ es distinto de cero. Por consiguiente, el campo $\mathbf{E}_B$, lo mismo que el campo magnético, es rotacional. Sus líneas de intensidad son cerradas.

De este modo, un campo eléctrico puede ser tanto de potencial ($\mathbf{E}_q$) como rotacional ($\mathbf{E}_B$). En el caso general el campo eléctrico puede estar compuesto del campo $\mathbf{E}_q$, creado por las cargas, y del campo $\mathbf{E}_B$, debido al campo magnético variable con el tiempo. Sumando las relaciones (69.4) y (69.3) obtenemos para el rotor de intensidad del campo total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$ la ecuación siguiente:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{69.5}$$

Esta ecuación es una de las fundamentales en la teoría electromagnética de Maxwell.

La existencia de la relación mutua entre los campos eléctrico y magnético (expresada, en particular, por la relación (69.5)) es causa de que el estudio separado de los campos eléctrico y magnético tenga solamente un sentido relativo. En efecto, un campo eléctrico es creado por un sistema de cargas en reposo. Pero si estas cargas están en reposo con respecto a cierto sistema inercial de referencia, con

respecto a otros sistemas inerciales estarán en movimiento y, por lo tanto, crearán no sólo el campo eléctrico, sino también un campo magnético. Un conductor en reposo con corriente continua crea en cada punto del espacio un campo magnético continuo. Pero con respecto a otros sistemas inerciales este conductor está en movimiento. Por eso el campo magnético creado por él en cualquier punto de coordenadas x, y, z dadas variará y, por consiguiente, generará un campo eléctrico rotacional. Así, un campo que con relación a cierto sistema de referencia es «puramente» eléctrico o «puramente» magnético, con respecto a otros sistemas de referencia será el conjunto de los campos eléctrico y magnético que forman el campo electromagnético único.

§ 70. Corriente de desplazamiento

En el caso de un campo electromagnético estacionario (es decir, que no varía con el tiempo), el rotor del vector **H** es igual en cada punto a la densidad de la corriente de conducción:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \tag{70.1}$$

(véase (52.6)). El vector **j** está ligado con la densidad de carga en un mismo punto por la ecuación de continuidad (32.3):

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{70.2}$$

El campo magnético sólo puede ser estacionario a condición de que la densidad de carga ρ y la densidad de corriente **j** no dependan del tiempo. En este caso, según (70.2), la divergencia de **j** es nula. Por eso las líneas de corriente (líneas del vector **j**) no tienen manantiales y son cerradas.

Veamos si la ecuación (70.1) es válida en el caso de campos que varíen con el tiempo. Consideremos el campo magnético creado por la corriente que fluye, al cargar un condensador, de una fuente de tensión continua U (fig. 70.1). Esta corriente no es continua con el tiempo (en el instante en que la tensión en el condensador se hace igual a U, la corriente cesa). Las líneas de corriente de conducción sufren una interrupción en el espacio entre las armaduras del condensador (en la figura las líneas de corriente dentro de las armaduras se muestran con rayas de trazos).

Tomemos un contorno circular Γ que abarque el conductor por el cual pasa la corriente al condensador, e integremos la relación (70.1) sobre la superficie S_1, que corta al conductor, limitada por el contorno:

$$\int_{S_1} [\nabla \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Después de transformar el primer miembro según el teorema de Stokes, obtenemos la circulación del vector **H** a lo largo del contorno Γ:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = I \qquad (70.3)$$

(I es la intensidad de la corriente que carga el conductor). Haciendo los mismos cálculos para la superficie S_2, que no corta el conductor con corriente (véase la fig. 70.1), llegamos a la relación claramente falsa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = 0. \qquad (70.4)$$

El resultado obtenido indica que en el caso de campos que varían con el tiempo, la relación (70.1) deja de ser válida. Se impone la

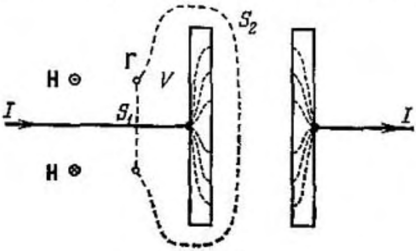


Fig. 70.1.

conclusión de que en esta ecuación falta un sumando dependiente de los campos derivados respecto del tiempo. Para los campos estacionarios este sumando se anula.

La invalidez de la ecuación (70.1) en el caso de campos no estacionarios se infiere también de los siguientes razonamientos. Tomemos la divergencia de los dos miembros de la relación (70.1):

$$\nabla [\nabla \mathbf{H}] = \nabla \mathbf{j}.$$

La divergencia de un rotor tiene que ser necesariamente igual a cero (véase (11.39)). Por lo tanto llegamos a la conclusión de que la divergencia del vector **j** también debe ser siempre nula. Pero esta conclusión contradice la ecuación de continuidad (70.2). Efectivamente, en los procesos no estacionarios ρ puede variar con el tiempo (esto, en particular, ocurre con la densidad de carga en las armaduras de un condensador cargado). En este caso, según (70.2), la divergencia de **j** es distinta de cero.

Para poner de acuerdo las ecuaciones (70.1) y (70.2), Maxwell introdujo en el segundo miembro de la ecuación (70.1) un sumando

adicional. Como es natural, este sumando debía tener la dimensión de corriente. Maxwell le dio el nombre de densidad de *corriente de desplazamiento*. De este modo, según Maxwell, la ecuación (70.1) debe tener la forma

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{despl}}. \tag{70.5}$$

La suma de la corriente de conducción y de la corriente de desplazamiento se denomina *corriente total*. La densidad de la corriente total es

$$\mathbf{j}_{\text{total}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{despl}}. \tag{70.6}$$

Suponiendo que la divergencia de la corriente de desplazamiento es igual a la divergencia de la corriente de conducción tomada con signo contrario,

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = -\nabla \mathbf{j}, \tag{70.7}$$

la divergencia del segundo miembro de la ecuación (70.5), lo mismo que la divergencia de su primer miembro, será siempre igual a cero.

Sustituyendo en (70.7) $\nabla \mathbf{j}$, según (70.2), por $\partial\rho/\partial t$, obtenemos la siguiente expresión de la divergencia de la corriente de desplazamiento:

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{70.8}$$

Para tomar la corriente de desplazamiento con las magnitudes que caracterizan la variación del campo eléctrico con el tiempo, utilizamos la relación (19.8), según la cual la divergencia del vector de desplazamiento eléctrico es igual a la densidad de cargas extrañas:

$$\nabla \mathbf{D} = \rho.$$

Tomando la diferencial de esta relación respecto del tiempo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Ahora cambiamos en el segundo miembro el orden de diferenciación respecto del tiempo y de las coordenadas. Como resultado llegamos a la siguiente expresión de la derivada de ρ respecto de t:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (70.8). da

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = \nabla\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

De aquí

$$\mathbf{j}_{\text{despl}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{70 9}$$

Sustituyendo la expresión (70.9) en la fórmula (70.5), se llega a la ecuación

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad (70.10)$$

que, lo mismo que la ecuación (69.5), es una de las fundamentales de la teoría de Maxwell.

Subrayamos que el término «corriente de desplazamiento» es puramente convencional. En esencia una corriente de desplazamiento es un campo eléctrico variable con el tiempo. Como base para llamar «corriente» a la magnitud (70.9) sirve únicamente el hecho de que la dimensión de esta magnitud coincide con la dimensión de la densidad de corriente. De todas las propiedades físicas propias de una corriente real, la corriente de desplazamiento sólo posee una, es decir, la capacidad de crear un campo magnético.

La introducción de la corriente de desplazamiento, definida por la expresión (70.9), establecía la «igualdad de derechos» de los campos eléctrico y magnético. Del fenómeno de la inducción electromagnética se infiere que un campo magnético variable origina un campo eléctrico. De la ecuación (70.10) se sigue que un campo eléctrico variable genera un campo magnético.

La corriente de desplazamiento existe en todas las partes en que hay un campo eléctrico variable con el tiempo. En particular, existe dentro de los conductores por los cuales pasa corriente eléctrica alterna. Pero dentro de los conductores la corriente de desplazamiento suele ser despreciable por su pequeñez en comparación con la corriente de conducción.

Advertimos que la igualdad (70.3) es aproximada. Para hacerla completamente rigurosa hay que añadir a su segundo miembro un sumando que tenga en cuenta la corriente de desplazamiento debida al campo eléctrico débilimente disperso que existe en los alrededores de la superficie S_1.

Cerciorémonos de que la integral de superficie del segundo miembro de la ecuación (70.5) tiene el mismo valor para las superficies S_1 y S_2 (véase la fig. 70.1). A través de la superficie S_1 «fluye» tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento condicionada por el campo eléctrico que existe fuera del condensador. Por consiguiente, para la primera superficie tenemos que

$$\mathrm{Int}_1 = \int_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = I + \frac{d}{dt} \Phi_{1\,\mathrm{entr}}$$

(en el segundo sumando se ha cambiado el orden de las operaciones de diferenciación respecto del tiempo y de integración respecto de las coordenadas). La magnitud designada por la letra I es la intensidad de la corriente que pasa por el conductor a la armadura izquierda del condensador, y $\Phi_{1\mathrm{entr}}$ es el flujo del vector $\mathbf{D}$ que entra en el

volumen V limitado por las superficies S_1 y S_2 (véase la fig. 70.1).

Para la superficie segunda $\mathbf{j} = 0$, por lo tanto,

$$\mathrm{Int}_2 = \frac{d}{dt}\int_{S_2} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\Phi_{2\,\mathrm{sal}},$$

donde $\Phi_{2\mathrm{sal}}$ es el flujo del vector $\mathbf{D}$ que sale del volumen V a través de la superficie S_2.

La diferencia de integrales

$$\mathrm{Int}_2 - \mathrm{Int}_1 = \frac{d}{dt}\Phi_{2\,\mathrm{sal}} - \frac{d}{dt}\Phi_{1\,\mathrm{entr}} - I.$$

La intensidad de la corriente I se puede representar como dq/dt, donde q es la carga que hay en la armadura del condensador. El flujo que entra a través de la superficie S_1 es igual al flujo, tomado con signo contrario, que sale a través de esta misma superficie. Sustituyendo $\Phi_{1\mathrm{entr}}$ por $-\Phi_{1\mathrm{sal}}$, mientras que I por dq/dt, obtenemos

$$\mathrm{Int}_2 - \mathrm{Int}_1 = \frac{d}{dt}(\Phi_{2\,\mathrm{sal}} + \Phi_{1\,\mathrm{sal}}) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\Phi_D - q), \quad (70.11)$$

donde Φ_D es el flujo del vector $\mathbf{D}$ a través de la superficie cerrada que forman las superficies S_1 y S_2. Según (19.10), este flujo debe ser igual a la carga comprendida dentro de dicha superficie cerrada. En nuestro caso ésta será la carga q que hay en la armadura del condensador. De este modo, el segundo miembro de la relación (70.11) es nulo. De aquí se deduce que la magnitud de la integral de superficie del vector densidad de la corriente total no depende de la superficie que se elija para calcular la integral.

Para la corriente de desplazamiento, lo mismo que para la de conducción, se pueden construir las líneas de corriente. Según la fórmula (20.4), el desplazamiento eléctrico en el espacio entre las armaduras del condensador es igual a la densidad superficial de carga en la armadura: $D = \sigma$. De aquí

$$\dot{D} = \dot{\sigma}.$$

El primer miembro da la densidad de la corriente de desplazamiento en el espacio entre las armaduras del condensador, y el segundo, la densidad de la corriente de conducción dentro de las armaduras. La igualdad de estas densidades significa que en el límite de las armaduras las líneas de corriente de conducción se transforman ininterrumpidamente en líneas de corriente de desplazamiento. Por lo tanto, las líneas de corriente total resultan cerradas.

§ 71. Ecuaciones de Maxwell

El descubrimiento de la corriente de desplazamiento permitió a Maxwell crear un teoría unificada de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Esta teoría explicó todos los hechos experimentales conocidos hasta entonces y predijo una serie de nuevos fenómenos, cuya existencia se confirmó después. La consecuencia más importante de la teoría de Maxwell fue la conclusión acerca de la existencia de las ondas electromagnéticas, que se propagan con la velocidad de la luz. El análisis teórico de las propiedades de estas ondas condujo a Maxwell a la creación de la teoría electromagnética de la luz.

La base de esta teoría la forman las *ecuaciones de Maxwell*. En el estudio del electromagnetismo estas ecuaciones desempeñan un papel semejante al de las leyes de Newton en la mecánica o los principios (leyes) fundamentales en la termodinámica.

El primer par de ecuaciones de Maxwell lo forman las ecuaciones (69.5) y (51.3):

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{71.1}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \tag{71.2}$$

La primera de estas ecuaciones relaciona los valores de **E** con las variaciones del vector **B** con el tiempo y es en esencia la expresión de la ley de la inducción electromagnética. La segunda ecuación indica la ausencia de fuentes del campo magnético, es decir, de cargas magnéticas.

El segundo par de ecuaciones de Maxwell lo constituyen las ecuaciones (70.10) y (19.8):

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{71.3}$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \tag{71.4}$$

La primera de ellas establece la relación entre las corrientes de conducción y de desplazamiento y el campo magnético que ellas generan. La segunda indica que de fuentes del vector **D** sirven las cargas extrañas.

Las ecuaciones (71.1)—(71.4) son las *ecuaciones de Maxwell en forma diferencial*. Advertimos que en el primer par de ecuaciones intervienen solamente las características fundamentales del campo: **E** y **B**. En el segundo figuran únicamente las magnitudes auxiliares **D** y **H**.

Cada una de las ecuaciones vectoriales (71.1) y (71.3) equivale a las tres ecuaciones escalares que relacionan las componentes de los vectores que se encuentran en los miembros primero y segundo de estas igualdades. Aplicando las fórmulas (11.14) y (11.25)—(11.27),

podemas representar las ecuaciones de Maxwell en forma escalar:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{t}, \tag{71.5}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{71.6}$$

(primer par de ecuaciones),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=j_x+\frac{\partial D_x}{\partial t},\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j_y+\frac{\partial D_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=j_z+\frac{\partial D_z}{\partial t}, \tag{71.7}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho \tag{71.8}$$

(segundo par de ecuaciones).

En total se obtienen 8 ecuaciones en las que figuran 12 funciones (tres componentes de los vectores **E**, **B**, **D** y **H** en cada una). Como el número de ecuaciones es menor que el de funciones incógnitas, las ecuaciones (71.1)—(71.4) son insuficientes para hallar los campos a partir de las distribuciones de las cargas y de las corrientes dadas. Para poder calcular los campos hay que completar las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones que relacionan **D** y **j** con **E** y también **H** con **B**. Estas ecuaciones tienen la forma

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \tag{71.9}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}, \tag{71.10}$$

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E} \tag{71.11}$$

(véanse (19.6), (52.14) y (34.3)).

El conjunto de las ecuaciones (71.1)—(71.4) y (71.9)—(71.11) constituye la base de la electrodinámica de los medios en reposo.

Las ecuaciones

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int_{S}\mathbf{B}\,d\mathbf{S}, \tag{71.12}$$

$$\oint_{S}\mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0 \tag{71.13}$$

(primer par) y

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int_{S} \mathbf{D}\, d\mathbf{S}, \qquad (71.14)$$

$$\int_{S} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_{V} \rho\, dV \qquad (71.15)$$

(segundo par) son las *ecuaciones de Maxwell en forma integral.*

La ecuación (71.12) se obtiene integrando la relación (71.1) sobre una superficie arbitraria S y transformando después su primer miembro, según el teorema de Stokes, en la integral a lo largo del contorno Γ que limita la superficie S. La ecuación (71.14) se obtiene, del mismo modo, de la relación (71.3). Las (71.13) y (71.15) se consiguen integrando las relaciones (71.2) y (71.4) sobre un volumen arbitrario V y transformando luego su primer miembro, según el teorema de Ostrogradski—Gauss, en la integral sobre la superficie cerrada S que limita el volumen V.

CAPÍTULO X

MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS CARGADAS EN LOS CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

§ 72. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético homogéneo

Imaginémonos una carga e' que se mueva en un campo magnético homogéneo con la velocidad **v**, perpendicular a **B**. La fuerza magnética le comunicará a la carga la aceleración, perpendicular a la velocidad

$$w_n = \frac{F}{m} = \frac{e'}{m} vB \tag{72.1}$$

(véase la fórmula (43.3); el ángulo entre **v** y **B** es recto). Esta aceleración varía solamente la dirección de la velocidad, cuya magnitud

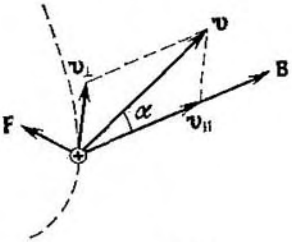


Fig. 72.2.

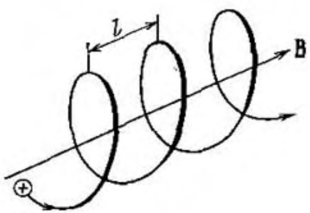


Fig. 72.1.

permanece invariable. Por consiguiente, la aceleración (72.1) también será constante por su magnitud. En estas condiciones la partícula cargada se mueve uniformemente siguiendo una circunferencia, cuyo radio está determinado por la relación $w_n = v^2/R$. Sustituyendo aquí el valor de (72.1) para w_n y despejando R en la ecuación resultante, obtenemos

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \tag{72.2}$$

Así, en el caso de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético homogéneo perpendicular al plano en que tiene lugar el movimiento, la trayectoria de la partícula es una circunferencia. El radio de esta circunferencia depende de la velocidad de la partícula, de la inducción magnética del campo y de la razón de la carga e' de la partícula a su masa m. La relación e'/m se llama *carga específica*.

Hallemos el tiempo T que tarda la partícula en dar una vuelta. Para esto dividimos la longitud de la circunferencia $2\pi R$ por la velocidad de la partícula v. Como resultado obtenemos

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \qquad (72.3)$$

De (72.3) se sigue que el período de revolución de la partícula no depende de su velocidad, sino que está determinado únicamente por la carga específica de la partícula y por la inducción magnética del campo.

Veamos el carácter que tiene el movimiento de la partícula cargada en el caso en que su velocidad forma con la dirección del campo magnético homogéneo un ángulo α distinto del recto. Descomponemos el vector $\mathbf{v}$ en dos componentes: $\mathbf{v}_\perp$, perpendicular a $\mathbf{B}$, y $\mathbf{v}_\parallel$, paralelo a $\mathbf{B}$ (fig. 72.1). Los módulos de estos componentes son:

$$v_\perp = v \operatorname{sen} \alpha, \quad v_\parallel = v \cos \alpha.$$

La fuerza magnética tiene el módulo

$$F = e'vB \operatorname{sen} \alpha = e'v_\perp B$$

y se encuentra en un plano perpendicular a $\mathbf{B}$. La aceleración creada por esta fuerza es normal al componente $\mathbf{v}_\perp$. La componente de la fuerza magnética en la dirección $\mathbf{B}$ es nula; por lo tanto, ésta fuerza no puede influir en la magnitud $\mathbf{v}_\parallel$. De este modo el movimiento de la partícula se puede representar como la superposición de dos movimientos: uno, de traslación a lo largo de la dirección $\mathbf{B}$ con la velocidad constante $v_\parallel = v \cos \alpha$ y otro, uniforme, siguiendo una circunferencia en un plano perpendicular al vector $\mathbf{B}$. El radio de esta circunferencia se determina por la fórmula (72.2) sustituyendo v por $v_\perp = v \operatorname{sen} \alpha$. La trayectoria del movimiento es una línea helicoidal, cuyo eje coincide con la dirección $\mathbf{B}$ (fig. 72.2). El paso l de la línea helicoidal se puede hallar multiplicando $v_\parallel$ por el período de revolución T, determinado por la fórmula (72.3):

$$l = v_\parallel T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v \cos \alpha. \qquad (72.4)$$

El sentido en que se arrolla la trayectoria depende del signo de la carga de la partícula. Si la carga es positiva, la trayectoria se arrolla en sentido antihorario. La trayectoria que sigue una partícula con carga negativa se arrolla en el sentido horario (suponiendo que miramos la trayectoria a lo largo de la dirección $\mathbf{B}$; la partícula se aleja de nosotros cuando $\alpha < \pi/2$ y se acerca a nosotros cuando $\alpha > \pi/2$).

§ 73. Desviación de las partículas con carga en movimiento por los campos eléctricos y magnéticos

Consideremos un haz estrecho de partículas cargadas iguales (por ejemplo, de electrones) que, en ausencia de los campos, incide sobre una pantalla perpendicular a él en el punto O (fig. 73.1). Determinemos el desplazamiento de la traza del haz producido por un campo eléctrico homogéneo perpendicular a dicho haz que actúa en un espacio de longitud l_1. Sea la velocidad inicial de las partículas igual a $\mathbf{v}_0$. Al entrar en la región del campo cada partícula se moverá con la aceleración $w_\perp = (e'/m)\, E$ (e'/m es la carga específica de una partícula), de magnitud y dirección constante, perpendicular

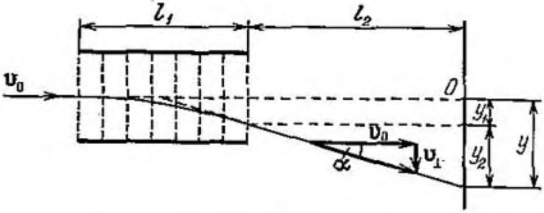


Fig. 73.1.

a $\mathbf{v}_0$. El movimiento bajo la acción del campo dura el tiempo $t = l_1/v_0$. En este tiempo las partículas se desplazan la distancia

$$y_1 = \frac{1}{2} w_\perp t^2 = \frac{1}{2} \frac{e'}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2} \tag{73.1}$$

y adquieren la velocidad componente, perpendicular a $\mathbf{v}_0$,

$$v_\perp = w_\perp t = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0}.$$

Luego las partículas siguen una trayectoria rectilínea, cuya dirección que forma con el vector $\mathbf{v}_0$ el ángulo α, se determina por la correlación

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_\perp}{v_0} = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \tag{73.2}$$

Como resultado, además del desplazamiento (73.1), el haz recibe el desplazamiento

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{e'}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

donde l_2 es la distancia desde el límite de la región en que existe el campo, hasta la pantalla.

De este modo, el desplazamiento de la traza del haz respecto del punto O será

$$y=y_1+y_2=\frac{e'}{m}E\frac{l_1}{v_0^2}\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right). \tag{73.3}$$

Tomando en consideración la fórmula (73.2), a la expresión del desplazamiento se le puede dar la forma

$$y=\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

De aquí se infiere que las partículas, al salir del campo, lo hacen como si partieran del centro del condensador que crea dicho campo, bajo el ángulo α que determina la fórmula (73.2).

Supongamos ahora que en un espacio de longitud l_1 del camino recorrido por las partículas se inserta un campo magnético homogéneo perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}_0$ (fig. 73.2; el campo es perpendicular al plano del dibujo y la región abarcada por él está rodeada

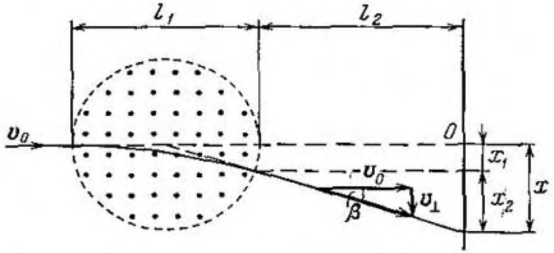


Fig. 73.2.

por la circunferencia de trazos). Bajo la acción del campo cada partícula recibe la aceleración $w_\perp = (e'/m)\, v_0 B$, de magnitud constante. Limitándonos al caso en que la desviación del haz por el campo es pequeña, se puede considerar que la aceleración $\mathbf{w}_\perp$ tiene dirección constante y es perpendicular a $\mathbf{v}_0$. Entonces, para calcular el desplazamiento se pueden aplicar las fórmulas antes obtenidas, sustituyendo en ellas la aceleración $w_\perp = (e'/m)\, E$ por el valor $w_\perp = (e'/m)\, v_0 B$. Como resultado, para el desplazamiento, que ahora designaremos con la letra x, se obtiene la expresión

$$x=\frac{e'}{m}B\frac{l_1}{v_0}\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right). \tag{73.4}$$

El ángulo en que el haz es desviado por el campo magnético se determina por la relación

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{e'}{m}B\frac{l_1}{v_0}. \tag{73.5}$$

Teniendo en cuenta (73.5), la fórmula (73.4) se puede representar en la forma

$$x=\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right)\operatorname{tg}\beta.$$

Por consiguiente, cuando las desviaciones son pequeñas, las partículas, al salir del campo, lo hacen como si partieran del centro de la región en que existe el campo desviador, bajo un ángulo β, cuya magnitud se determina por la expresión (73.5).

Por las fórmulas (73.3) y (73.4) se ve que tanto la desviación producida por el campo eléctrico como la debida al campo magnético es proporcional a la carga específica de las partículas.

La desviación de un haz de electrones por un campo eléctrico o magnético se utiliza en los tubos catódicos. Dentro del tubo con

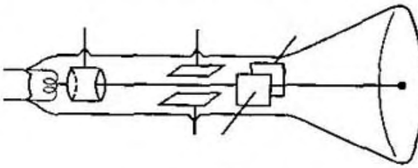


Fig. 73.3.

desviación eléctrica (fig. 73.3), además del llamado proyector de electrones que crea el estrecho haz de electrones rápidos (haz electrónico), se encuentran dos pares de placas de desviación perpendiculares entre sí. Haciendo llegar tensión a cualquiera de los pares de placas se puede suscitar un desplazamiento del haz electrónico, proporcional a ella, en dirección perpendicular a dichas placas. La pantalla del tubo se recubre con un compuesto fluorescente. Por eso en el punto de incidencia del haz electrónico sobre la pantalla surge una macha luminosa.

Los tubos catódicos se emplean en los oscilógrafos, aparatos que permiten estudiar procesos de evolución rápida. A un par de placas de desviación se hace llegar una tensión variable linealmente con el tiempo (tensión de exploración), y al otro par, la tensión que se investiga. En virtud de que la inercia del haz electrónico es insignificante, su desviación sigue prácticamente sin retraso las variaciones de las tensiones en los dos pares de placas de desviación, y el haz traza en la pantalla del oscilógrafo la gráfica de la dependencia de la tensión que se estudia, respecto del tiempo. Muchas magnitudes no eléctricas se pueden transformar, por medio de dispositivos especiales (captadores), en tensiones eléctricas. Por eso, valiéndose de oscilógrafos se estudian los procesos más diversos.

El tubo catódico es parte imprescindible de los aparatos de televisión. En televisión se suelen utilizar tubos con control magnético del haz electrónico. En estos tubos, en vez de las placas de desviación, hay dos sistemas de bobinas, perpendiculares entre sí y colocados fuera del tubo, los cuales crean cada uno un campo magnético perpendicular al haz. Las variaciones de la corriente en las bobinas hacen que se desplace la macha luminosa que crea el haz electrónico en la pantalla.

§ 74. Determinación de la carga y la masa del electrón

La carga específica del electrón (es decir, la relación e/m) la midió por vez primera J. J. Thomson, en 1897, valiéndose del tubo de descarga representado en la fig. 74.1. El haz electrónico que salía por el orificio A del ánodo (rayos catódicos; véase el § 85) pasaba entre las placas de un condensador plano e incidía sobre una pantalla fluorescente, creando en ella una macha luminosa. Haciendo llegar tensión

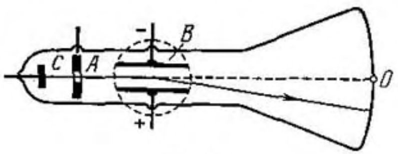


Fig. 74.1.

a las placas del condensador se podía influir sobre el haz con un campo eléctrico prácticamente homogéneo. El tubo se ponía entre los polos de un electroimán, con cuya ayuda se podía crear, en esta misma parte de la trayectoria de los electrones, un campo magnético homogéneo perpendicular al eléctrico (la región de este campo magnético está rodeada en la fig. 74.1 por una circunferencia de trazos). Cuando los campos estaban desconectados, el haz incidía sobre la pantalla en el punto O. Cada uno de los campos por separado producía un desplazamiento del haz en dirección vertical. Las magnitudes de los desplazamientos se determinan por medio de las fórmulas (73.3) y (73.4) obtenidas en el párrafo anterior.

Después de conectar el campo magnético y de medir el desplazamiento de la traza del haz que él producía

$$x=\frac{e}{m}B\frac{l_1}{v_0}\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right), \qquad (74.1)$$

Thomson conectaba también el campo eléctrico y elegía su valor de tal modo que el haz volviera a incidir sobre el punto O. En este caso los campos eléctrico y magnético actuaban sobre los electrones

del haz simultáneamente y con fuerzas de igual magnitud, pero de sentidos opuestos. Al ocurrir esto se cumplía la condición

$$eE = ev_0B. \tag{74.2}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (74.1) y (74.2), Thomson calculó e/m y v_0.

V. Busch utilizó para determinar la carga específica de los electrones el método del enfoque magnético. La esencia de este método consiste en lo siguiente. Supongamos que a un campo magnético homogéneo llega de cierto punto un haz de electrones de igual velocidad v, ligeramente divergente y simétrico con respecto a la dirección

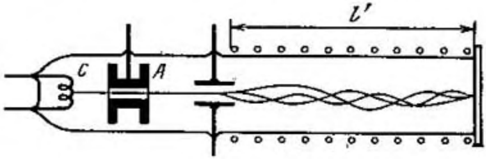


Fig. 74.2.

del campo. Las direcciones que siguen los electrones forman con la dirección **B** ángulos α pequeños. En el § 72 se explicó que en este caso los electrones se mueven por trayectorias helicoidales efectuando en igual tiempo

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

una vuelta completa y desplazándose a lo largo de la dirección del campo la distancia l,

$$l = v \cos \alpha \cdot T. \tag{74.3}$$

En virtud de la pequeñez de los ángulos α, las distancias (74.3) resultan ser prácticamente iguales para los distintos electrones e iguales a vT (para ángulos pequeños $\cos \alpha \approx 1$). Por consiguiente, el haz ligeramente divergente se enfoca en un punto que se encuentra del de salida de los electrones a la distancia

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \tag{74.4}$$

En el experimento de Busch los electrones emitidos por el cátodo incandescente K (fig. 74.2) se aceleran al pasar por la diferencia de potencial U aplicada entre el cátodo y el ánodo A. Como resultado adquieren la velocidad v, cuyo valor se puede hallar valiéndose de la

relación

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \qquad (74.5)$$

Saliendo después por el orificio que hay en el ánodo, los electrones forman un haz estrecho dirigido a lo largo del eje de un tubo evacuado colocado dentro de un solenoide. A la entrada del solenoide se encuentra un condensador al que se hace llegar una tensión variable. El campo que crea el condensador desvía, del eje del aparato, los electrones del haz ángulos α pequeños variables con el tiempo. Esto hace que el haz se «arremoline» y que los electrones empiecen a moverse por distintas trayectorias helicoidales. A la salida del solenoide se coloca una pantalla fluorescente. Si la inducción magnética B se elige de tal modo que la distancia l' desde el condensador hasta la pantalla satisfaga la condición

$$l' = nl \qquad (74.6)$$

(l es el paso de la hélice, y n, n número entero), el punto de intersección de las trayectorias de los electrones caerá sobre la pantalla, el haz electrónico estará enfocado en este punto y producirá una nítida mancha luminosa. Si la condición (74.6) no se cumple, la mancha luminosa sobre la pantalla estará difuminada. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (74.4), (74.5) y (74.6) se pueden hallar e/m y v.

El valor más exacto de la carga específica del electrón, establecido teniendo en cuenta los resultados obtenidos por los distintos métodos, es

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ unid. CGSE/g}. \qquad (74.7)$$

La magnitud (74.7) da la razón de la carga del electrón a su masa en reposo m. En los experimentos de Thomson, Busch y otros análogos se determinaba la razón de la carga a la masa relativista

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c}} \qquad (74.8)$$

En las experiencias de Thomson la velocidad de los electrones era aproximadamente de 0,1 c. A esta velocidad la masa relativista es un 0,5% mayor que la masa en reposo. En experimentos posteriores la velocidad de los electrones alcanzó valores muy grandes. En todos los casos se puso de manifiesto una disminución de los valores medidos de e/m al crecer v, que se efectúa en completo acuerdo con la fórmula (74.8).

La carga del electrón fue determinada muy exactamente por R. A. Millikan en 1909. En el espacio cerrado entre las dos placas horizontalmente dispuestas de un condensador (fig. 74.3) introducía

Millikan gotas pequeñísimas de aceite. Al ser pulverizadas, las gotitas se electrizaban y se podían mantener suspendidas e inmóviles eligiendo la magnitud y el signo de la tensión en el condensador. El equilibrio se producía con la condición de que

$$P' = e'E; \qquad (74.9)$$

aquí e' es la carga de la gotita y P', la resultante de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de Arquímedes,

$$P' = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)\, g \qquad (74.10)$$

(ρ es la densidad de la gotita; r, su radio, y ρ_0, la densidad del aire).

Por las fórmulas (74.9) y (74.10) y conociendo r, se podía hallar e. Para determinar el radio se medía la velocidad v_0 de la caída libre uniforme de la gotita en ausencia del campo. El movimiento uniforme de la gotita se establece a condición de que la fuerza P' se equilibre con la fuerza de resistencia $F = 6\pi\eta rv$ (véase la fórmula (78.1) del tomo 1°; η es la viscosidad del aire):

$$P' = 6\pi\eta rv_0. \qquad (74.11)$$

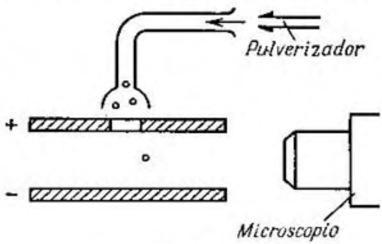


Fig. 74.3.

El movimiento de la gotita se observaba con un microscopio. Para medir v_0 se determinaba el tiempo que tardaba la gotita en recorrer la distancia entre dos hilos distinguibles en el campo visual del microscopio.

Fijar exactamente el equilibrio de la gotita es muy difícil. Por eso, en vez del campo correspondiente a la condición (74.9), se conectaba un campo bajo cuya acción la gotita empezaba a moverse con pequeña velocidad hacia arriba. La velocidad estacionaria de elevación v_E se determinaba partiendo de la condición de que la suma de las fuerzas P' y $6\pi\eta rv$ equilibra la fuerza $e'E$:

$$P' + 6\pi\eta rv_E = e'E. \qquad (74.12)$$

Eliminando P' y r en las ecuaciones (74.10), (74.11) y (74.12) obtenemos la expresión de e':

$$e' = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{(\rho - \rho_0)\, g}}\, \frac{v_0 + v_E}{E}$$

(en esta fórmula introdujo Millikan una corrección que tiene en cuenta que las dimensiones de las gotitas eran comparables con el recorrido libre de las moléculas del aire).

Así, midiendo la velocidad de caída libre v_0 de la gotita y su velocidad de elevación v_E en un campo eléctrico E conocido, era posible hallar la carga e' de la gotita. Al medir la velocidad v_E para un valor determinado de la carga e', Millikan ionizaba el aire irradiando el espacio entre las placas con rayos X. Algunos iones se adherían a la gotita y variaban su carga, con lo que la velocidad v_E también cambiaba. Después de medir el nuevo valor de la velocidad, volvía a irradiar el espacio entre las placas y así sucesivamente.

Las variaciones de la carga de la gotita $\Delta e'$ y la misma carga e' resultaban ser cada vez múltiplos enteros de una misma magnitud e. Por lo tanto quedó demostrado experimentalmente el carácter discreto de la carga eléctrica, es decir, el hecho de que toda carga se compone de cargas elementales de igual magnitud.

El valor de la carga elemental establecido teniendo en cuenta las mediciones de Millikan y los datos obtenidos por otros métodos es

$$e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 4{,}80\cdot 10^{-10}\ \text{unid. CGSE.} \tag{74.13}$$

Esta misma magnitud tiene la carga del electrón.

De (74.7) y (74.13) se obtiene para la masa en reposo del electrón el valor

$$m = 0{,}91\cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} = 0{,}91\cdot 10^{-27}\ \mathrm{g}, \tag{74.14}$$

aproximadamente 1840 veces menor que la masa del átomo más ligero, el de hidrógeno.

En el descubrimiento de la naturaleza discreta de la electricidad desempeñaron un gran papel las leyes de la electrólisis, establecidas empíricamente por M. Faraday en 1836. Según estas leyes la masa m de substancia que se desprende al pasar la corriente por el electrólito [1]) es proporcional a la carga q transportada por la corriente:

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{z}q. \tag{74.15}$$

Aquí M es la masa de un mol de la substancia que se desprende; z, la valencia de esta substancia, y F, la *constante* o *número de Faraday*,

$$F = 96{,}5\cdot 10^{3}\ \mathrm{C/mol}. \tag{74.16}$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad (74.15) por la masa del ion, obtenemos

$$N = \frac{1}{F}\frac{N_A}{z}q$$

[1]) Se llaman electrólitos las soluciones de sales, álcalis o ácidos en agua y algunos otros líquidos, y también las sales fundidas que en estado sólido son cristales iónicos. En los electrólitos, cuando la corriente pasa por ellos, se producen transformaciones químicas. Estas substancias se llaman *conductores de segunda especie*, para diferenciarlas de los *conductores de primera especie*, en los cuales el paso de la corriente no va acompañado de transformaciones químicas.

(N_A es el número de Avogadro, y N, el número de iones que hay en la masa m). De aquí se obtiene para la carga de un ion el valor

$$e' = \frac{q}{N} = \frac{F}{N_A} z.$$

Por consiguiente, la carga del ion resulta ser un múltiplo entero de la magnitud

$$e = \frac{F}{N_A}, \qquad (74.17)$$

que es la carga elemental.

De este modo, del análisis de las leyes de la electrólisis se infiere el carácter discreto de las cargas que pueden tener los iones en los electrólitos.

La sustitución en (74.17) del valor de F (74.16) y del valor de N_A hallado en los experimentos de J. B. Perrin (véase el § 101 del tomo 1°) da para e una magnitud que concuerda bien con el valor hallado por Millikan.

Como la exactitud con que se determina la constante de Faraday F y la exactitud del valor de e obtenida por Millikan es mucho mayor que la exactitud de los experimentos de Perrin para hallar N_A, la relación (74.17) se ha utilizado para determinar el número de Avogadro, tomando el valor de F hallado en los experimentos de electrólisis y el valor de e obtenido por Millikan.

§ 75. Determinación de la carga específica de los iones. Espectrógrafos de masa

Los métodos para determinar la carga específica descritos en el párrafo anterior son válidos en el caso de que todas las partículas del haz tengan la misma velocidad. Todos los electrones que forman el haz son acelerados por la misma diferencia de potencial, aplicada entre el cátodo, del cual se desprenden, y el ánodo; por eso la dispersión de los valores de las velocidades de los electrones en el haz es muy pequeña. Si esto no fuera así, el haz electrónico daría en la pantalla una mancha muy difuminada y las mediciones serían imposibles.

Los iones se forman a expensas de la ionización de las moléculas de un gas que tiene lugar en un volumen de extensión apreciable. Apareciendo en distintos puntos de este volumen, los iones pasan después por diferencias de potencial no iguales, por lo que sus velocidades suelen ser distintas. A esto se debe que los métodos con que se determinó la carga específica de los electrones no sean aplicables a los iones. En 1907 ideó Thomson el «método de las parábolas», que permitió eludir las dificultades antes indicadas.

En el experimento de Thomson un haz estrecho de iones posi-

tivos atravesaba una región, en la cual actuaban simultáneamente sobre él un campo eléctrico y otro magnético paralelos entre sí (fig. 75.1). Ambos campos eran prácticamente homogéneos y formaban con la dirección inicial del haz un ángulo recto. Estos campos hacían que se desviasen los iones: el magnético, en la dirección del eje x, y el eléctrico, a lo largo del eje y. Según las fórmulas (73.4) y (73.3) estas desviaciones son:

$$x=\frac{e'}{m}B\frac{l_1}{v}\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right),\quad y=\frac{e'}{m}E\frac{l_1}{v^2}\left(\frac{1}{2}l_1+l_2\right),\qquad (75.1)$$

donde v es la velocidad de un ion dado, cuya carga específica es e'/m; l_1, la extensión de la región, en la cual los campos actúan sobre

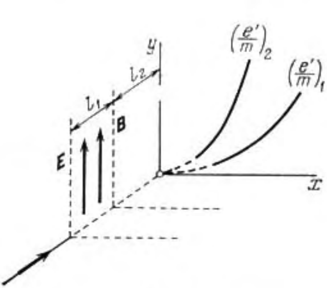


Fig. 75.1.

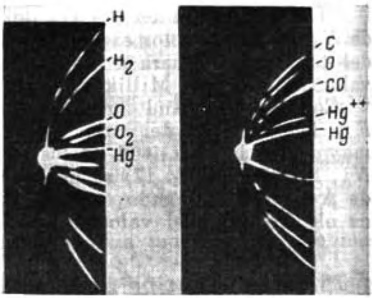


Fig. 75.2.

el haz, y l_2, la distancia desde el límite de esta región hasta la placa fotográfica que registra los iones que inciden sobre ella.

Las expresiones (75.1) son las coordenadas del punto de la placa en que incide el ion que tiene los valores dados de e'/m y de la velocidad v. Los iones con igual carga específica, pero con velocidades distintas, incidían en puntos diferentes de la placa. Eliminando de las fórmulas (75.1) la velocidad v, obtenemos la ecuación de la curva, a lo largo de la cual se encontraban las huellas de los iones que tenían el mismo valor de e'/m:

$$y=\frac{E}{B^2l_1(0,5l_1+l_2)}\frac{m}{e'}x^2.\qquad (75.2)$$

De (75.2) se sigue que los iones con igual e'/m y distinta v dejaban sobre la placa una traza en forma de parábola. Los iones con distintas e'/m se disponían a lo largo de parábolas diferentes. Conociendo los parámetros del aparato (es decir, E, B, l_1 y l_2) y midiendo los desplazamientos x e y, se podía, valiéndose de la fórmula (75.2),

hallar la carga específica de los iones correspondientes a cada parábola. Cambiando el sentido de uno de los campos, la coordenada correspondiente trocaba su signo por el contrario, de manera que se obtenían parábolas simétricas a las iniciales. Dividiendo por la mitad la distancia entre los puntos análogos de las parábolas simétricas era posible hallar x e y. La traza que dejaba en la placa el haz estando desconectados los campos daba el origen de coordenadas. En la fig. 75.2 se muestran las primeras parábolas obtenidas por Thomson.

Haciendo experimentos con neón químicamente puro, Thomson descubrió que este gas daba dos parábolas, correspondientes a masas

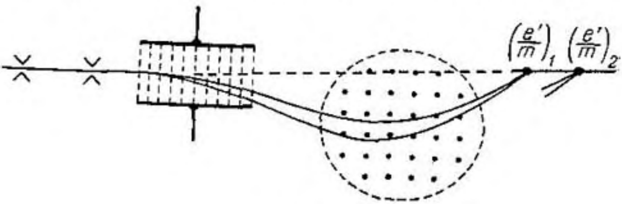


Fig. 75.3.

atómicas relativas iguales a 20 y 22. Este resultado sirvió de base para suponer que existen dos variedades químicamente indistinguibles de átomos de neón (según la terminología moderna, dos *isótopos* del neón). La demostración de la realidad de esta suposición la hizo F. W. Aston, que perfeccionó el método para determinar la carga específica de los iones.

El aparato de Aston, llamado por él *espectrógrafo de masas*, tenía la estructura siguiente (fig. 75.3). Un haz de iones, separado por un sistema de rendijas, se hacía pasar sucesivamente a través de un campo eléctrico y otro magnético dirigidos de tal forma que desviaban los iones en sentidos opuestos. Al pasar por el campo eléctrico, los iones con un valor dado de e'/m se desviaban tanto más fuertemente cuanto menor era la velocidad con que se movían. Por eso los iones salían del campo eléctrico formando un haz divirgente. En el campo magnético las trayectorias de los iones también se torcían tanto más cuanto menor era su velocidad. Y como los sentidos en que los campos desviaban los iones eran opuestos, después de salir del campo magnético los iones formaban un haz convergente en un punto.

Los iones con otros valores de la carga específica se enfocaban en otros puntos (en la fig. 75.3 sólo se muestran las trayectorias de los iones para un valor dado de e'/m). El cálculo correspondiente da que los puntos en que convergen los haces formados por los iones

con distintos valores de e'/m se encuentran aproximadamente en una recta (en la figura se representa por una línea de trazos). Colocando a lo largo de esta recta una placa fotográfica, Aston obtenía en ella una serie de rayas, correspondientes cada una a un valor determinado de e'/m. La semejanza de la imagen que se obtenía en esta

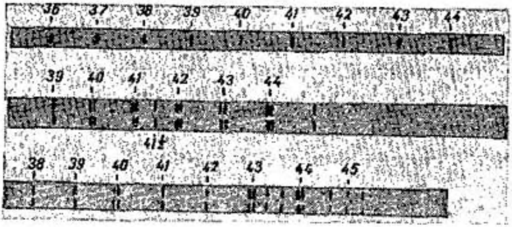


Fig. 75.4.

placa con la fotografía de un espectro de rayas fue la causa de que Aston le diera el nombre de espectrograma de masas, y a su aparato, el de espectrógrafo de masas. En la fig. 75.4 se dan los espectrogramas de masas obtenidos por Aston (frente a las rayas se indican los números másicos de los iones).

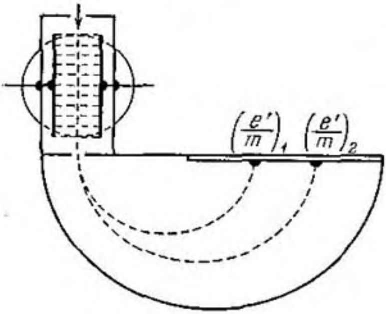


Fig. 75.5.

K. T. Bainbridhe creó un aparato de otro tipo. En el espectrógrafo de Bainbridhe (fig. 75.5) el haz de iones pasa al principio a través del llamado selector (o filtro) de velocidades, que separa del haz los iones con un valor determinado de la velocidad. En el selector se someten los iones a la acción simultánea de un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí, los cuales desvían los iones en sentidos opuestos. Por la rendija de salida del selector sólo pasan aquellos iones, para los cuales las acciones de los campos eléctrico y magnético se compensan mutuamente. Esto ocurre a condición de que $e'E = e'vB$. Por consiguiente, las velocidades de los iones salidos del selector, independientemente de su masa y carga, tienen el mismo valor, $v = E/B$.

Al salir del selector los iones entran en la región de un campo magnético homogéneo de inducción B', perpendicular a su velocidad. En este campo los iones se mueven siguiendo circunferencias, cuyos radios dependen de e'/m:

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}$$

(véase (72.2)). Después de describir una semicircunferencia, los iones inciden sobre una placa fotográfica a distancias de la rendija iguales a $2R$. Por lo tanto, los iones de cada especie (con un valor determinado de e'/m) dejan en la placa una huella en forma de raya estrecha. Conociendo los parámetros del aparato se pueden calcular las cargas específicas de los iones. Como estas cargas son múltiplos enteros de la carga elemental e, por los valores hallados de e'/m se pueden determinar las masas de los iones.

En la actualidad existen muchos tipos de espectrógrafos de masas perfeccionados. También se han creado aparatos en los que los iones no se registran en una placa fotográfica, sino por medio de un dispositivo eléctrico. Estos últimos se denominan *espectrómetros de masas*.

§ 76. Aceleradores de partículas con carga

En la física del núcleo atómico y de las partículas elementales desempeñan un gran papel los experimentos en que se utilizan haces de partículas cargadas de altas energías. Los dispositivos que se emplean para obtener estos haces se llaman *aceleradores de partículas con carga*. Existen muchos tipos de dispositivos de esta clase. Vamos a estudiar los principios de funcionamiento de algunos de ellos.

Generador de Van de Graaff. En 1929 propuso Van de Graaff la construcción de un generador electrostático basado en que las cargas excesivas se sitúan en la superficie externa del conductor. El esquema de este generador se muestra en la fig. 76.1. Una esfera metálica hueca, llamada conductor, descansa sobre una columna aislada. Dentro de la esfera se introduce una cinta sin fin móvil, de seda o de material cauchotado, que pasa sobre una polea. En la base de la columna, junto a la cinta, hay un peine de agudas puntas de las cuales pasa a la cinta la carga excitada por un generador de tensión (GT) de varias decenas de kilovoltios. Dentro del conductor va montado un segundo peine, a cuyas puntas pasa la carga de la cinta. Este peine está unido con el conductor, de manera que la carga recogida de la cinta pasa inmediatamente a su superficie externa. A medida que aumentan las cargas en el conductor, su potencial aumenta hasta que la fuga de carga se haga igual a la carga que se le suministra. La fuga se produce fundamentalmente a expensas de la

ionización del gas que hay en las proximidades de la superficie del conductor. El paso de la corriente a través del gas debido a este fenómeno se llama descarga por efecto corona (véase el § 87). Para disminuir el efecto corona la superficie del conductor se rectifica cuidadosamente.

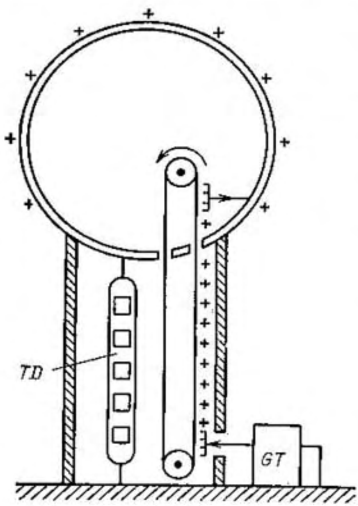


Fig. 76.1.

El potencial, hasta el cual se puede cargar el conductor, está limitado por el hecho de que cuando la intensidad del campo es de 3MV/m (30 kV/cm), en el aire a la presión atmosférica se produce la descarga. Para una esfera $E = \varphi/r$. Por eso, para obtener grandes diferencias de potencial hay que hacer un conductor de grandes dimensiones (de hasta 10 m de diámetro). La diferencia de potencial límite que se puede lograr prácticamente por medio del generador de Van de Graaff es de alrededor de 10 MV (10^7 V).

La aceleración de las partículas se efectúa en un tubo de descarga (*TD*), a cuyos electrodos se aplica la diferencia de potencial que se obtiene en el generador. A veces el generador de Van de Graaff se construye en forma de dos columnas iguales próximas entre sí, cuyos conductores se cargan con electricidades de signos contrarios. En este caso el tubo de descarga se intercala entre los conductores.

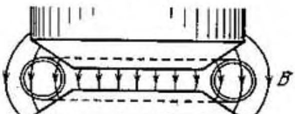


Fig. 76.2.

Advertimos que la cinta del generador, el conductor, el tubo de descarga y la tierra forman un circuito cerrado de corriente continua. Dentro del tubo se mueven las cargas bajo la acción del campo electrostático. El transporte de las cargas desde la tierra hasta el conductor lo efectúan las fuerzas exteriores, cuyo papel lo desempeñan las fuerzas mecánicas que mueven la cinta del generador.

Betatrón. Se llama así un acelerador de electrones por inducción en el que la aceleración se efectúa por un campo eléctrico rotacional.

Este aparato consta de una cámara toroidal, en la cual se practica el vacío, situada entre los polos de un electroimán de forma especial (fig. 76.2). El devanado del electroimán se alimenta con corriente alterna, cuya frecuencia es del orden de 100 Hz. El campo magnético alternativo que se produce en estas condiciones cumple dos funciones: primera, crea el campo eléctrico rotacional que acelera los electrones y, segunda, mantiene los electrones en una órbita que coincide con el eje de la cámara.

Para mantener los electrones en una órbita de radio constante es necesario, a medida que crece su velocidad, aumentar la inducción magnética del campo (según la fórmula (72.2), el radio de la órbita es proporcional a v/B). Por eso, para la aceleración sólo se pueden utilizar los cuartos 2° y 4° de período de la corriente, al comienzo de los cuales es nula la corriente en el devanado del electroimán. De este modo, el betatrón funciona en régimen impulsional. Al principio del impulso se hace llegar a la cámara, procedente de un cañón electrónico, un haz de electrones que es arrastrado por el campo eléctrico rotacional y empieza a moverse por la órbita circular con velocidad cada vez mayor. Durante el tiempo en que aumenta el campo magnético ($\sim 10^{-3}$ s) los electrones dan hasta un millón de vueltas y adquieren una energía que puede alcanzar varios centenares de MeV. Con esta energía la velocidad de los electrones es casi igual a la velocidad de la luz c.

Para que el electrón que se acelera se mueva por una órbita circular de radio r_0, entre la inducción magnética del campo en la órbita y dentro de ella debe cumplirse la sencilla relación que ahora vamos a deducir. El campo eléctrico rotacional está dirigido tangencialmente a la órbita, por la cual se mueve el electrón. Por lo tanto, la inducción del vector **E** por esta órbita es igual a $2\pi r_0 E$. Al mismo tiempo, de acuerdo con (71.12), la circulación del vector **E** es igual a $-(d\Phi/dt)$, donde Φ es el flujo magnético a través de la superficie abarcada por la órbita. El signo menos indica el sentido de **E**. A nosotros nos va a interesar únicamente el módulo de la intensidad del campo, por lo que omitimos el signo menos. Igualando ambas expresiones de la circulación, hallamos que

$$E=\frac{1}{2\pi r_0}\frac{d\Phi}{dt}.$$

El campo magnético es perpendicular al plano de la órbita. Por eso se puede suponer $\Phi=\pi r_0^2\langle B\rangle$, siendo $\langle B\rangle$ el valor medio de la inducción magnética respecto del área de la órbita. Entonces tenemos

$$E=\frac{1}{2\pi r_0}\frac{d}{dt}(\pi r_0^2\langle B\rangle)=\frac{r_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle. \qquad (76.1)$$

Escribimos la ecuación relativista del movimiento del electrón por la órbita:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=-e\mathbf{E}-e\,[\mathbf{v}\mathbf{B}_{\text{órb}}] \qquad (76.2)$$

($B_{\text{órb}}$ es la inducción magnética del campo en la órbita).

La velocidad del electrón que se mueve por la circunferencia de radio r_0 se puede representar en la forma $\mathbf{v}=\omega r_0\boldsymbol{\tau}$, donde ω es la velocidad, con que gira el radio vector del electrón, y $\boldsymbol{\tau}$, el versor tangencial a la órbita en el punto en que se encuentra el electrón. El vector $\mathbf{E}$ se puede representar en la forma

$$\mathbf{E}=E\boldsymbol{\tau}=\frac{r_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle\cdot\boldsymbol{\tau}$$

(véase (76.1)). Finalmente, el producto $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ se puede representar en la forma $vB\mathbf{n}=\omega r_0B\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el versor normal a la órbita en el punto en que se halla el electrón. Teniendo en cuenta lo dicho, escribimos la ecuación (76.2) del modo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}\right)=-\frac{er_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle\cdot\boldsymbol{\tau}-e\omega r_0B_{\text{órb}}\cdot\mathbf{n}. \qquad (76.3)$$

La derivada respecto del tiempo del versor $\boldsymbol{\tau}$ es $\dot{\boldsymbol{\tau}}=\omega\mathbf{n}$ (véase la fórmula (2.56) del tomo 1°; la velocidad angular de rotación del versor coincide con la velocidad angular del radio vector del electrón). Por consiguiente, tomando la diferencial del primer miembro de la ecuación (76.3), llegamos a la igualdad

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}\right)\cdot\boldsymbol{\tau}+\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}\,\omega\mathbf{n}=$$
$$=\frac{er_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle\cdot\boldsymbol{\tau}-e\omega r_0B_{\text{órb}}\cdot\mathbf{n}.$$

Igualando los factores de los versores análogos de los miembros primero y segundo, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}\right)=-\frac{er_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle, \qquad (76.4)$$

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}=-er_0B_{\text{órb}}. \qquad (76.5)$$

De (76.4) se deduce que

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2/c^2}}=-\frac{er_0}{2}\langle B\rangle \qquad (76.6)$$

(ω y $\langle B\rangle$ al comienzo del impulso son nulas).

La comparación de las expresiones (76.5) y (76.6) conduce a la relación buscada:

$$B_{\text{órb}}=\frac{1}{2}\langle B\rangle.$$

Así, pues, para que el electrón se mueva todo el tiempo por la órbita circular, la inducción magnética en la órbita debe ser igual a la

mitad del valor medio de la inducción magnética dentro de la órbita. Esto se consigue haciendo las piezas polares en forma de conos truncados (véase la fig. 76.2).

Al final del ciclo de aceleración se conecta un campo magnético adicional que desvía los electrones acelerados de la órbita estacionaria y los dirige sobre un blanco especial situado dentro de la cámara. Al incidir en el banco los electrones emiten una radiación electromagnética dura (rayos γ, rayos X).

Los betatrones se emplean principalmente en las investigaciones nucleares. Aceleradores pequeños, para energía de hasta 50 MeV, se utilizan en la industria como fuentes de rayos X duros para la detección de defectos en piezas de gran masa.

Ciclotrón. Como base del acelerador así llamado sirve la dependencia del período de revolución de una partícula cargada, en un campo magnético homogéneo, respecto de su velocidad (véase (72.3)). Este aparato consta de dos electrodos en forma de las dos mitades de una caja cilíndrica baja (fig. 76.3) que, por su forma, reciben el nombre de electrodos en D o simplemente «des». Estas «des» se encuentran en una cámara de vacío, entre los polos de un gran electroimán. El campo que crea dicho electroimán es homogéneo y perpendicular al plano de las «des». A éstas se hace llegar la tensión alterna excitada por un generador de alta frecuencia.

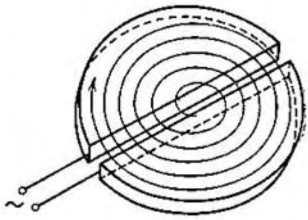


Fig. 76.3

En el espacio entre los electrodos en D (apertura aceleradora) se introduce una partícula con carga en el instante en que la tensión alcanza su valor máximo. La partícula es arrastrada por el campo eléctrico y atraída hacia el interior de una de las «des». El espacio dentro de la «de» es equipotencial, por lo que la partícula se encontrará en ella únicamente bajo la acción del campo magnético. En estas condiciones la partícula se mueve por una circunferencia, cuyo radio es proporcional a la velocidad de la partícula (véase (72.2)). La frecuencia con que varía la tensión entre las «des» se elije de tal forma que en el instante en que la partícula, después de recorrer una semicircunferencia, llega a la apertura, la diferencia de potencial entre ellas cambie de signo y alcance su valor de amplitud. Entonces la partícula volverá a acelerarse y penetrará en la segunda «de» con una energía dos veces mayor que aquella con que se movía por la primera «de». Teniendo mayor velocidad, la partícula se moverá en la segunda «de» por una circunferencia de radio mayor ($R \sim v$), pero el tiempo que tarda en recorrer la semicircunferencia

será el mismo que antes. Por eso, en el instante en que la partícula entra en el espacio entre las «des», la tensión entre ellas vuelve a cambiar de signo y toma el valor de amplitud.

De este modo, la partícula se mueve siguiendo una curva próxima a la espiral y adquiere cada vez que pasa por la apertura una porción adicional de energía igual a $e'U_m$ (e' es la carga de la partícula y U_m, la amplitud de la tensión que produce el generador). Disponiendo de una fuente de tensión alterna de magnitud relativamente pequeña ($U_m \sim 10^5$ V) se puede, valiéndose del ciclotrón, acelerar protones hasta energías del orden de 25 MeV. A energías más altas empieza a manifestarse la dependencia de la masa de los protones respecto de la velocidad, el período de revolución aumenta (según (72.3) es proporcional a m) y el sincronismo entre el movimiento de las partículas y las variaciones del campo acelerador se infringe.

Para evitar la infracción del sincronismo y obtener partículas con grandes energías se hace variable la frecuencia de la tensión que alimenta las «des» o la inducción del campo magnético. El aparato en el cual durante el proceso de aceleración de cada porción de partículas disminuye convenientemente la frecuencia de la tensión aceleradora, se llama *fasotrón* (o *sincrociclotrón*). El acelerador en que la frecuencia permanece constante y la inducción magnética varía de tal modo que la relación m/B sea constante, se denomina *sincrotrón* (los aceleradores de este tipo sólo se utilizan para acelerar electrones).

En el acelerador llamado *sincrofasotrón* o *sincrotrón de protones* varían la frecuencia de la tensión aceleradora y la inducción del campo magnético. En el sincrofasotrón las partículas que se aceleran no se mueven por una espiral, sino por una trayectoria circular. A medida que aumentan la velocidad y la masa de las partículas, la inducción del campo magnético crece de tal modo que el radio definido por la fórmula (72.2) permanece constante. Con esto el período de revolución varía tanto a causa del crecimiento de la masa de la partícula como debido al aumento de B. Para que la tensión aceleradora esté sincronizada con el movimiento de las partículas, la frecuencia de dicha tensión se hace variable según la ley correspondiente. En el sincrofasotrón no hay «des» y la aceleración de las partículas se efectúa en determinadas partes de la trayectoria por medio del campo eléctrico creado por unos generadores de tensión de frecuencia variable.

El acelerador más potente que existe en la actualidad (en 1981) es el sincrotrón de protones puesto en funcionamiento el año 1974 en el laboratorio Fermi de Batavia (cerca de Chicago). Acelera los protones hasta energías de 500 GeV ($5 \cdot 10^{11}$ eV). La velocidad de los protones que poseen esta energía difiere de la velocidad de la luz en el vacío en menos de un 0,0002% ($v = 0{,}9999982\ c$).

CAPÍTULO XI

TEORÍA CLÁSICA DE LA CONDUCTIBILIDAD ELÉCTRICA DE LOS METALES

§ 77. Naturaleza de los portadores de corriente en los metales

Para esclarecer la naturaleza de los portadores de corriente en los metales se hicieron una serie de experimentos. Ante todo citaremos el experimento de C. Riecke efectuado en 1901. Este tomó tres cilindros, dos de cobre y uno de aluminio, cuidadosamente rectificados por sus extremos. Después de pesados, estos cilindros se acoplaron sucesivamente así: uno de cobre, el de aluminio, y el otro de cobre. A través de este conductor compuesto se hizo pasar continuamente, durante un año, corriente en una misma dirección. Durante todo este tiempo pasó a través de los cilindros una carga igual a a $3{,}5\cdot 10^6$ C. Una nueva pesada demostró que el paso de la corriente no había ejercido influencia alguna sobre el peso de los cilindros. Al analizar los extremos que habían estado en contacto, observándolos al microscopio, no se descubrió penetración de un metal en otro. Los resultados de este experimento evidenciaron que el transporte de carga en los metales no lo efectúan los átomos, sino ciertas partículas que entran en la composición de todos los metales. Estas partículas podían ser los electrones, descubiertos por Thomson en 1897.

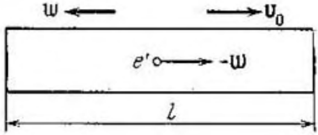


Fig. 77.1.

Para identificar los portadores de corriente en los metales con los electrones había que determinar el signo y el valor numérico de la carga específica de los portadores. Los experimentos hechos con este fin se basaron en los razonamientos siguientes. Si en los metales existen partículas cargadas capaces de desplazarse, al frenar el conductor eléctrico estas partículas deberán seguir moviéndose por inercia durante cierto tiempo, lo que hará que en el conductor surja un impulso de corriente y que sea transportada cierta carga.

Supongamos que el conductor se mueve inicialmente con la velocidad $\mathbf{v}_0$ (fig. 77.1). Empezamos a frenarlo con la aceleración $\mathbf{w}$. Al continuar moviéndose por inercia, los portadores de corriente adquieren, con respecto al conductor, la aceleración $-\mathbf{w}$. Esta misma aceleración se puede comunicar a los portadores en un conductor en reposo creando en él un campo eléctrico de tensión $\mathbf{E} =$

$= -m\mathbf{w}/e'$, es decir, aplicando a los extremos del conductor una diferencia de potencial

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_1^2 \frac{m\mathbf{w}}{e'}\, d\mathbf{l} = -\frac{mwl}{e'}$$

(m y e' son la masa y la carga del portador, y l, la longitud del conductor). En este caso por el conductor pasará la corriente $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$, donde R es la resistencia del conductor (I se considera positiva si la corriente pasa en el sentido del movimiento del conductor). Por consiguiente, durante un tiempo dt pasará a través de cada sección del conductor la carga

$$dq = I\, dt = -\frac{mwl}{e'R}\, dt = -\frac{ml}{e'R}\, dv.$$

La carga que pasa durante todo el tiempo que dura el frenado será

$$q = \int dq = -\int_{v_0}^{0} \frac{ml}{e'R}\, dv = \frac{m}{e'}\, \frac{lv_0}{R} \qquad (77.1)$$

(la carga es positiva si se traslada en el sentido del movimiento del conductor). De este modo, midiendo l, v_0 y R, así como la carga q que pasa por el circuito al frenar el conductor, se puede hallar la carga específica de los portadores. El sentido del impulso de la corriente da el signo de éstos.

El primer experimento con conductores en movimiento acelerado fue hecho en 1913 por L. I. Mandelshtam y N. D. Papalexi. Estos sometieron una bobina de alambre a vibraciones torsionales rápidas alrededor de su eje. A los extremos de la bobina conectaban un teléfono, en el que se oía el sonido condicionado por los impulsos de corriente.

El resultado cuantitativo lo obtuvieron Tolman y Stuart en 1916. Ellos hicieron girar una bobina de alambre de 500 m de longitud de tal modo, que la velocidad lineal de las espiras era de 300 m/s. Luego frenaban bruscamente la bobina y, por medio de un galvanómetro balístico, medían la carga que pasaba por el circuito durante el frenado. El valor obtenido de la carga específica de los portadores, calculado por la fórmula (77.1), era muy próximo a e/m para los electrones. De esta forma se demostró experimentalmente que los portadores de corriente en los metales son los electrones.

La corriente en los metales puede ser producida por una diferencia de potencial extremadamente pequeña. Esto da motivo para considerar que los portadores de corriente, los electrones, se desplazan por el metal libremente. A esta misma conclusión conducen también los resultados del experimento de Tolman y Stuart.

La existencia de electrones libres en los metales se puede explicar por el hecho de que, al formarse la red cristalina, de los átomos del metal se desprenden los electrones más débilmente ligados (los de

valencia), que se convierten en «propiedad colectiva» de todo el trozo de metal. Si de cada átomo se desprende un electrón, la concentración de electrones libres (es decir, su número n en la unidad de volumen) será igual a la cantidad de átomos por unidad de volumen. El número de átomos por unidad de volumen es igual a $(\delta/M)N_A$, donde δ es la densidad del metal; M, la masa del mol, y N_A, el número de Avogadro. Para los metales los valores de δ/M se encuentran entre los límites de $2\cdot10^4$ mol/m³ (para el potasio) a $2\cdot10^5$ mol/m³ (para el berilio). Por lo tanto, para la concentración de electrones libres (o, como se suelen llamar, electrones de conducción) se obtienen valores del orden de

$$n = 10^{28} \ldots 10^{29} \text{ m}^{-3} \ (10^{22} \ldots 10^{23} \text{ cm}^{-3}). \qquad (77.2)$$

§ 78. Teoría clásica elemental de los metales

Partiendo de las ideas sobre los electrones libres, P. Drude creó la teoría clásica de los metales, que más tarde fue perfeccionada por H. A. Lorentz. Drude supuso que los electrones de conducción se comportan en el metal de un modo semejante a las moléculas de un gas perfecto. En los intervalos entre las colisiones se mueven en completa libertad recorriendo en promedio cierto espacio λ. Es cierto que, a diferencia de las moléculas del gas, cuyo recorrido está determinado por las colisiones entre sí, los electrones chocan principalmente no unos con otros, sino con los iones que forman la red cristalina del metal. Estos choques hacen que se establezca el equilibrio térmico entre el gas electrónico y la red cristalina.

Suponiendo que al gas electrónico se pueden extender los resultados de la teoría cinética de los gases, la valoración de la velocidad media del movimiento térmico de los electrones se puede hacer por la fórmula

$$\langle v\rangle = \sqrt{8kT/\pi m} \qquad (78.1)$$

véase la fórmula (98.26) del tomo 1°). Para la temperatura ambiente ($\sim$300 K) el cálculo por esta fórmula conduce al valor siguiente:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300}{3{,}14\cdot0{,}91\cdot10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ m/s}.$$

Cuando se conecta el campo, al movimiento térmico caótico, que se efectúa con la velocidad $\langle v\rangle$, se superpone el movimiento ordenado de los electrones, con cierta velocidad media $\langle u\rangle$. La magnitud de esta última velocidad es fácil de valorar partiendo de la fórmula

$$j = ne\langle u\rangle \qquad (78.2)$$

(véase (34.4)). La densidad de corriente máxima que permiten las normas técnicas para los conductores de cobre es, aproximadamente, de 10^7 A/m² (10 A/mm²). Tomando para n el valor 10^{29} m⁻³, obtenemos

$$\langle u\rangle = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{29}} \approx 10^{-3}\ \text{m/s}.$$

De este modo, incluso si las densidades de corriente son muy grandes, la velocidad media del movimiento ordenado de las cargas $\langle u\rangle$ es aproximadamente 10^8 veces menor que la velocidad media del movimiento térmico $\langle v\rangle$. Por eso, al hacer los cálculos, el módulo de la velocidad resultante $|\mathbf{v}+\mathbf{u}|$ se puede sustituir por el módulo de la velocidad del movimiento térmico $|\mathbf{v}|$.

Hallemos la variación del valor medio de la energía cinética de los electrones producida por el campo. El cuadrado medio de la velocidad resultante es

$$\langle(\mathbf{v}+\mathbf{u})^2\rangle = \langle\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{vu} + \mathbf{u}^2\rangle = \langle\mathbf{v}^2\rangle + 2\langle\mathbf{vu}\rangle + \langle\mathbf{u}^2\rangle. \quad (78.3)$$

Dos sucesos, consistentes en que la velocidad del movimiento térmico del electrón toma el valor $\mathbf{v}$ y la velocidad del movimiento ordenado, el valor $\mathbf{u}$, son independientes estadísticamente. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de la multiplicación de probabilidades (véase la fórmula (93.4) del tomo 1º), $\langle\mathbf{vu}\rangle = \langle\mathbf{v}\rangle\ \langle\mathbf{u}\rangle$. Pero $\langle\mathbf{v}\rangle$ es igual a cero, de manera que en (78.3) el segundo sumando desaparece y la fórmula toma la forma

$$\langle(\mathbf{v}+\mathbf{u})^2\rangle = \langle\mathbf{v}^2\rangle + \langle\mathbf{u}^2\rangle.$$

De aquí se infiere que el movimiento ordenado aumenta la energía cinética de los electrones en un valor medio de

$$\langle\Delta\varepsilon_k\rangle = \frac{m\langle u^2\rangle}{2}. \quad (78.4)$$

Ley de Ohm. Drude consideró que al chocar un electrón con un ion de la red cristalina, la energía adicional (78.4) adquirida por el electrón se transmite al ion y, por consiguiente, la velocidad u se anula a consecuencia del choque. Supongamos que el campo que acelera los electrones es homogéneo. Entonces, bajo la acción de este campo, el electrón recibe una aceleración constante igual a eE/m, y al final del recorrido la velocidad del movimiento ordenado alcanza en promedio el valor

$$u_{\text{máx}} = \frac{eE}{m}\tau, \quad (78.5)$$

donde τ es el tiempo medio entre dos choques consecutivos del electrón con los iones de la red.

Drude no tenía en cuenta la distribución de los electrones por velocidades y atribuía a todos ellos un mismo valor v de la velocidad. En esta aproximación

$$\tau = \lambda/v$$

(recordamos que $|\mathbf{v}+\mathbf{u}|$ es prácticamente igual a $|\mathbf{v}|$). Sustituyendo este valor de τ en la fórmula (78.5), obtenemos

$$u_{\text{máx}} = \frac{eE\lambda}{mv}. \tag{78.6}$$

La velocidad u varía linealmente durante el tiempo que dura el recorrido. Por eso su valor medio durante el recorrido es igual a la mitad del máximo:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\text{máx}} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (78.2), da

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

La densidad de la corriente resulta ser proporcional a la intensidad del campo. Por lo tanto, hemos llegado a la ley de Ohm. Según (34.3) el coeficiente de proporcionalidad entre j y E es la conductividad

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \tag{78.7}$$

Si los electrones no chocaran con los iones de la red, la longitud del recorrido libre y, por consiguiente, la conductividad, serían magnitudes infinitas. De este modo, de acuerdo con las ideas clásicas, la resistencia eléctrica de los metales se debe a las colisiones de los electrones libres con los iones que se encuentran en los nudos de la red cristalina del metal.

Ley de Joule—Lenz. Al final del recorrido libre el electrón adquiere una energía cinética adicional, cuyo valor medio es

$$\langle \Delta\varepsilon_k \rangle = \frac{mu^2_{\text{máx}}}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2} E^2, \tag{78.8}$$

(véanse las fórmulas (78.4) y (78.6)). Al chocar con un ion, el electrón, por la suposición hecha, transmite toda la energía adicional que ha adquirido a la red cristalina. Esta energía se invierte en aumentar la energía interna del metal y se manifiesta en su calentamiento. Cada electrón sufre en promedio cada segundo $1/\tau = v/\lambda$ colisiones y cada vez comunica a la red la energía (78.8). Por lo tanto, en la unidad de volumen deberá desprenderse, por unidad de tiempo, el calor

$$Q_{\text{esp}} = n \frac{1}{\tau} \langle \Delta\varepsilon_k \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2$$

(n es el número de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen).

La magnitud Q_{esp} no es más que la potencia térmica específica (véase el § 38). El factor de E^2 coincide con el valor (78.7) de σ. Pasando en la expresión σE^2 de σ y E a ρ y j, llegamos a la fórmula $Q_{\text{esp}} = \rho j^2$, que expresa la ley de Joule—Lenz (véase la fórmula (38.4)).

Ley de Wiedemann—Franz. Por experiencia sabemos que, además

de por su alta conductibilidad eléctrica, los metales se distinguen por su gran conductibilidad térmica. G. Wiedemann y R. Franz establecieron en 1853 una ley empírica según la cual la razón del coeficiente de conductibilidad térmica $\varkappa$ al coeficiente de conductibilidad eléctrica σ es aproximadamente igual para todos los metales y varía proporcionalmente a la temperatura absoluta. Por ejemplo, para el aluminio a la temperatura ambiente esta razón es igual a $5{,}8\cdot 10^{-6}$, para el cobre, $6{,}4\cdot 10^{-6}$ y para el plomo $7{,}0\cdot 10^{-6}$ J·Ω/(s·K).

También tienen capacidad para conducir el calor los cristales no metálicos. Pero la conductibilidad térmica de los metales es mucho mayor que la de los dieléctricos. De esto se sigue que la transmisión del calor en los metales la efectúan, principalmente, no la red cristalina, sino los electrones libres. Considerando estos electrones como un gas monoatómico se puede tomar para el coeficiente de conductibilidad la expresión de la energía cinética de los gases:

$$\varkappa = \frac{1}{3} nmv\lambda c_V$$

(véase la fórmula (131.7) del tomo 1°; ρ se ha sustituido por el producto nm, y en vez de $\langle v\rangle$ se ha tomado v). El calor específico de un gas monoatómico es $c_V = {}^3/_2\,(R/M) = {}^3/_2\,(k/m)$. Sustituyendo este valor en la expresión de $\varkappa$, obtenemos

$$\varkappa = \frac{1}{2} nkv\lambda.$$

Dividiendo $\varkappa$ por la expresión (78.7) de σ y sustituyendo luego ${}^1/_2 mv^2$ por ${}^3/_2 kT$, llegamos a la relación

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{kmv^2}{e^2} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T, \tag{78.9}$$

que expresa la ley de Wiedemann—Franz.

La sustitución en (78.9) de los valores numéricos de k y e, da

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = 2{,}23\cdot 10^{-8} T.$$

Con $T = 300$ K se obtiene para $\varkappa/\sigma$ el valor $6{,}7\cdot 10^{-6}$ J·Ω·(s·K), que concuerda bien con los datos experimentales (véanse los valores de $\varkappa/\sigma$ citados anteriormente para el Al, Cu y Pb). Sin embargo, más tarde se aclaró que esta coincidencia tan buena fue casual, ya que cuando Lorentz precisó los cálculos, tomando en consideración la distribución de los electrones por velocidades, para la relación $\varkappa/\sigma$ se obtuvo el valor $2\,(k/e)^2 T$, que concuerda peor con los datos de la experiencia.

Así, la teoría clásica pudo explicar las leyes de Ohm y de Joule—Lenz y dio una explicación cualitativa de la ley de Wiedemann—Franz. Pero, al mismo tiempo esta teoría tropezó con dificultades importantes. De ellas, las principales son dos. De la fórmula (78.7) se infiere que la resistencia de los metales (es decir, la magnitud

recíproca de σ) debe aumentar como la raíz cuadrada de T. En realidad no existe ningún fundamento para suponer que las magnitudes n y λ dependan de la temperatura. En cambio, la velocidad del movimiento térmico es proporcional a la raíz de T. Esta conclusión de la teoría contradice los datos experimentales, según los cuales la resistencia eléctrica de los metales aumenta proporcionalmente a la primera potencia de T, o sea, más de prisa que $\sqrt{T}$ (véase la fórmula (34.5)).

La segunda dificultad de la teoría clásica consiste en que el gas electrónico debe tener una capacidad calorífica molar igual a $^3/_2R$. Añadiendo esta magnitud a la capacidad calorífica de la red, que es $3R$ (véase la fórmula (114.1) del tomo 1°), se obtiene para la capacidad calorífica molar del metal el valor $^9/_2R$. De este modo, según la teoría electrónica clásica, la capacidad calorífica molar de los metales debe ser 1,5 veces mayor que la de los dieléctricos. En realidad, la capacidad calorífica de los metales no se diferencia apreciablemente de la de los cristales no metálicos. La explicación de este desacuerdo sólo pudo darla la teoría cuántica de los metales.

§ 79. Efecto Hall

Si una placa metálica, a lo largo de la cual pasa una corriente eléctrica continua, se sitúa en un campo magnético perpendicular a ella, entre las caras paralelas a las direcciones de la corriente y del campo surge una diferencia de potencial $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$ (fig. 79.1). Este fenómeno fue descubierto por E. H. Hall en 1879 y se denomina *efecto Hall* o *fenómeno galvanomagnético*.

La diferencia de potencial de Hall se determina por la expresión

$$U_H = RbjB. \tag{79.1}$$

Aquí b es la anchura de la placa; j, la densidad de la corriente; B, la inducción magnética del campo, y R, un coeficiente de proporcionalidad que recibe el nombre de *constante de Hall*.

El efecto Hall se explica fácilmente por la teoría electrónica. En ausencia del campo magnético la corriente en la placa está condicionada por el campo eléctrico $\mathbf{E}_0$ (fig. 79.2). Las superficies equipotenciales de este campo forman un sistema de planos paralelos perpendiculares al vector $\mathbf{E}_0$. Dos de ellos se representan en la figura por medio de líneas rectas continuas. En todos los puntos de cada una de estas superficies, y, por consiguiente, en los puntos *1* y *2*, el potencial es el mismo. Los portadores de corriente, es decir, electrones, tienen carga negativa, por lo que la velocidad de su movimiento ordenado $\mathbf{u}$ tiene sentido contrario al del vector densidad de la corriente $\mathbf{j}$. Cuando se conecta el campo magnético, cada portador resulta sometido a la acción de una fuerza magnética $\mathbf{F}$, dirigida a lo largo del lado $\mathbf{b}$ de la placa y cuyo módulo es

$$F = euB. \qquad (79.2)$$

Como resultado surge una componente de la velocidad de los electrones dirigida hacia la cara superior (en la figura) de la placa. Junto

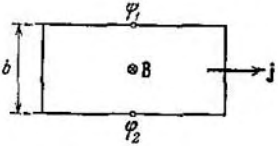


Fig. 79.1.

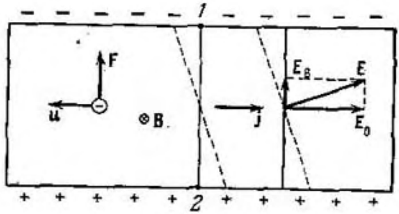


Fig. 79.2.

a esta cara se produce un exceso de cargas negativas y, respectivamente, junto a la cara inferior, un exceso de cargas positivas. Por consiguiente, aparece un campo eléctrico transversal $\mathbf{E}_B$ adicional. Cuando la intensidad de este campo alcanza un valor tal que su acción sobre las cargas equilibra la fuerza (79.2), se establece una distribución estacionaria de las cargas en dirección transversal. El valor correspondiente de E_B viene determinado por la condición $eE_B = euB$. De aquí

$$E_B = uB.$$

El campo $\mathbf{E}_B$ se suma al $\mathbf{E}_0$ en el campo resultante $\mathbf{E}$. Las superficies equipotenciales son perpendiculares al vector intensidad del campo. Por lo tanto, giran y ocupan la posición representada con línea de trazos en la fig. 79.2. Los puntos *1* y *2*, que antes se encontraban en una misma superficie equipotencial, tienen ahora potenciales distintos. Para hallar la tensión que surge entre estos puntos hay que multiplicar la distancia b entre ellos por la intensidad E_B:

$$U_H = bE_B = buB.$$

Expresamos u por medio de j, n y e, de acuerdo con la fórmula $j = neu$. Como resultado obtenemos

$$U_H = \frac{1}{ne} bjB. \qquad (79.3)$$

Esta última expresión coincide con (79.1) si se supone

$$R = \frac{1}{ne}. \qquad (79.4)$$

De (79.4) se sigue que, midiendo la constante de Hall, se puede hallar la concentración de portadores de corriente en un metal dado (es decir, el número de portadores por unidad de volumen).

Una característica importante de la substancia es la movilidad que tienen en ella los portadores de corriente. Se llama movilidad de los portadores de corriente la velocidad media que éstos adquieren cuando la intensidad del campo eléctrico es igual a la unidad. Si en

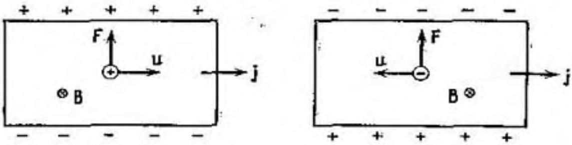


Fig. 79.3.

un campo de intensidad E adquieren los portadores la velocidad u, su movilidad u_0 será

$$u_0 = \frac{u}{E}. \tag{79.5}$$

La movilidad se puede relacionar con la conductividad σ y con la concentración de portadores n. Para esto se divide la relación $j = neu$ por la intensidad del campo E. Tomando en consideración que la razón de j a E da σ, y la de u a E, la movilidad, obtenemos

$$\sigma = neu_0. \tag{79.6}$$

Midiendo la constante de Hall R y la conductividad σ, con las fórmulas (79.4) y (79.6) se puede hallar la concentración y la movilidad de los portadores de corriente en la muestra correspondiente.

El efecto Hall se observa no sólo en los metales, sino también en los semiconductores, pudiéndose deducir por el signo del efecto la pertenencia del semiconductor al tipo n o p[1]). En la fig. 79.3 se compara el efecto Hall de muestras con portadores positivos y con portadores negativos. El sentido de la fuerza magnética se invierte tanto cuando varía el sentido del movimiento de la carga como cuando cambia su signo. Por consiguiente, si la corriente y el campo tienen el mismo sentido, la fuerza magnética que actúa sobre los portadores positivos y negativos tiene también el mismo sentido. Por eso, en el caso de portadores positivos, el potencial de la cara superior (en la figura) es mayor que el de la inferior, y en el caso de portadores negativos, menor. De este modo, al determinar el signo de la diferencia de potencial de Hall se puede establecer el signo de los portadores de corriente.

Es curioso que en algunos metales el signo de U_H corresponde al de los portadores de corriente positivos. La explicación de esta anomalía la da la teoría cuántica.

---

[1]) En los semiconductores del tipo n el signo de los portadores de corriente es negativo, y en los del tipo p, positivo (véase el tomo 3º).

CAPÍTULO XII

CORRIENTE ELÉCTRICA EN LOS GASES

§ 80. Conductibilidad no autónoma y autónoma

El paso de la corriente eléctrica a través de los gases se llama *descarga en el gas.* Los gases en estado normal son aisladores, en ellos no hay portadores de corriente. Sólo cuando se crean unas condiciones especiales pueden aparecer en los gases dichos portadores (iones, electrones) y producirse la descarga eléctrica.

Los portadores de corriente pueden surgir en los gases como resultado de acciones exteriores no relacionadas con la existencia del campo eléctrico. En este caso se dice que la conductibilidad del gas *no es autónoma* o què es *mantenida.* La descarga mantenida puede producirse por calentamiento del gas (ionización térmica), por la acción de rayos ultravioletas o X y por la de radiaciones de substancias radiactivas.

Si los portadores de carga aparecen como resultado de procesos condicionados por la creación de un campo eléctrico en el gas, la conductibilidad se llama *autónoma* o *automantenida.*

El carácter de la descarga en un gas depende de muchos factores: de la naturaleza química del gas y de los electrodos, de la temperatura y presión del gas, de la forma, dimensiones y disposición mutua de los electrodos, de la tensión que se les aplica, de la densidad y potencia de la corriente, etc. Por eso la descarga en un gas puede tomar formas muy diversas. Algunos tipos de descarga van acompañados de luminosidad y de efectos sonoros: chisporroteo, susurros o chasquido.

§ 81. Descarga en un gas no autónoma

Sea un gas que, encontrándose entre los electrodos (fig. 81.1), está sometido a la acción continua, y constante por su intensidad, de cualquier agente ionizante (por ejemplo, de los rayos X). La acción del ionizador hace que de ciertas moléculas del gas se desprenda uno o varios electrones y, a causa de esto, estas moléculas se convierten en iones cargados positivamente. A presiones no muy bajas, los electrones desprendidos son capturados generalmente por las moléculas neutras, que de este modo se transforman en iones cargados negativamente. El número de pares de iones producidos bajo la acción del ionizador en la unidad de volumen por unidad de tiempo lo designaremos por Δn_i.

Al mismo tiempo que el proceso de ionización, en el gas tiene lugar la *recombinación* de los iones, es decir, la neutralización de

los iones de signos distintos al encontrarse o la reunificación de un ion positivo y un electrón en una molécula neutra. La probabilidad de que se encuentren dos iones de signos distintos es proporcional tanto al número de iones positivos como al de iones negativos. Por lo tanto, la cantidad de pares de iones Δn_r que se recombinan por segundo en la unidad de volumen es proporcional al cuadrado del número de pares de iones n que hay en dicha unidad de volumen:

$$\Delta n_r = rn^2 \qquad (81.1)$$

(r es un coeficiente de proporcionalidad).

En estado de equilibrio el número de iones que surgen es igual al número de los que se recombinan, por consiguiente,

$$n_i = rn^2. \qquad (81.2)$$

De aquí, para la concentración de iones (número de pares de iones por unidad de volumen), en equilibrio, se obtiene la expresión siguiente:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \qquad (81.3)$$

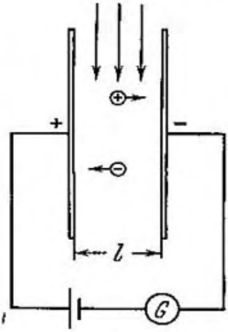


Fig. 81.1

Bajo la acción de la radiación cósmica y de las trazas de substancias radiactivas que hay en la corteza terrestre, en 1 cm³ del aire atmosférico surgen por término medio varios pares de iones por segundo. El coeficiente r para el aire es igual a $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ cm³/s. La sustitución de estos valores en la fórmula (81.3) da para la concentración en equilibrio de iones en el aire un valor del orden de 10^3 cm⁻³. Esta concentración es insuficiente para condicionar una conductibilidad apreciable. El aire puro seco es muy buen aislador.

Si se hace llegar tensión a los electrodos, la disminución del número de iones se efectúa no sólo a causa de la recombinación, sino también a expensas de la absorción de los iones por el campo a los electrodos. Supongamos que de la unidad de volumen son absorbidos Δn_j pares de iones por segundo. Si la carga de cada ion es e', la neutralización en los electrodos de un par de iones va acompañada del transporte por el circuito de una carga e'. Cada segundo llegan a los electrodos $\Delta n_j Sl$ pares de iones (S es el área de los electrodos; l, la distancia entre ellos y el producto Sl es igual al volumen del espacio entre los electrodos). Por consiguiente, la intensidad de la corriente en el circuito será

$$I = e' \Delta n_j Sl.$$

De aquí

$$\Delta n_j = \frac{I}{e'lS} = \frac{j}{e'l}, \qquad (81.4)$$

donde j es la densidad de la corriente.

Cuando hay corriente la condición de equilibrio tiene la forma siguiente:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Sustituyendo aquí las expresiones (81.1) y (81.4) de Δn_r y Δn_j, llegamos a la relación

$$\Delta n_i = rn^2 + \frac{j}{e'l}. \qquad (81.5)$$

La densidad de la corriente se determina por la expresión

$$j = e'n\,(u_0^+ + u_0^-)\,E, \qquad (81.6)$$

en la que u_0^+ y u_0^- son las movilidades de los iones positivos y negativos (véase la fórmula (79.5)).

Consideremos los dos casos extremos: el de los campos débiles y el de los campos intensos.

En el caso de los campos débiles la densidad de la corriente será muy pequeña y el sumando $j/e'l$ en la relación (81.5) se puede despreciar en comparación con rn^2 (esto significa que la disminución del número de iones en el espacio entre los electrodos se produce principalmente a expensas de la recombinación). Entonces (81.5) se transforma en (81.2) y para la concentración en equilibrio de iones se obtiene la expresión (81.3). La sustitución de este valor de n en la fórmula (81.6), da

$$j = e'\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}\,(u_0^+ + u_0^-)\,E. \qquad (81.7)$$

El factor de E en la fórmula obtenida no depende de la intensidad del campo. Por lo tanto, en el caso de los campos débiles la descarga en el gas no autónoma se subordina a la ley de Ohm.

La movilidad de los iones en los gases tiene el valor $\sim 10^{-4}$ (m $\times$ $\times$ s^{-1})/(V$\cdot$m^{-1}) (1(cm$\cdot$s^{-1})/(V$\cdot$cm^{-1})). Por consiguiente, si en estado de equilibrio la concentración $n = 10^3\,\text{cm}^{-3} = 10^9\,\text{m}^{-3}$ y la intensidad del campo $E = 1$ V/m, la densidad de la corriente será

$$j = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^9\,(10^{-4} + 10^{-4})\cdot 1 \sim 10^{-14}\ \text{A/m}^2 = 10^{-18}\ \text{A/cm}^2$$

(véase la fórmula (81.6); se supone que los iones son de carga única).

En el caso de los campos intensos, en la fórmula (81.5) se puede despreciar el sumando rn^2 en comparación con el $j/e'l$. Esto significa que, prácticamente, todos los iones que surgen llegan a los electrodos sin tener tiempo de recombinarse. Con esta condición, la relación

(81.5) toma la forma

$$\Delta n_t = j/e'l.$$

De aquí

$$j = e'\Delta n_t l. \qquad (81.8)$$

Esta densidad de corriente la crean todos los iones generados por el ionizador en una columna de gas, de sección transversal igual a la unidad, comprendida entre los electrodos. Por lo tanto, esta densidad de corriente es la máxima para una intensidad dada del ionizador y una distancia l, también dada, entre los electrodos. Por esta razón se le da el nombre de densidad de la corriente de saturación j_{sat}.

Calculemos j_{sat} siendo las condiciones siguientes: $\Delta n_t = 10\ cm^{-3}\times \times s^{-1} = 10^7\ m^{-3}s^{-1}$ (aproximadamente ésta es la velocidad con que se forman los iones en el aire atmosférico en condiciones ordinarias), $l = 0{,}1$ m. La sustitución de estos datos en la fórmula (81.8), da

$$j_{sat} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{7}\cdot 10^{-1} \sim$$
$$\sim 10^{-13}\ A/m^2 = 10^{-17}\ A/cm^2.$$

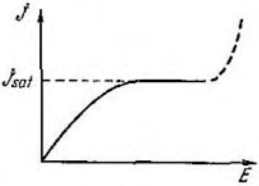


Fig. 81.2.

Este cálculo demuestra que la conductibilidad del aire en condiciones ordinarias es insignificante.

Con valores intermedios de E se produce una transición suave de la dependencia lineal de j respecto de E a la saturación, alcanzada la cual j deja de depender de E (véase la curva continua de la fig. 81.2). Más allá de la región de saturación se encuentra una región en que la corriente aumenta bruscamente (véase la parte de la curva indicada con línea de trazos). Este aumento se explica porque, a partir de cierto valor de E, los electrones generados por el ionizador exterior[1]) tienen tiempo durante el recorrido libre de adquirir la energía necesaria para, al chocar con una molécula, producir su ionización. Los electrones libres surgidos de la ionización y acelerados excitan a su vez la ionización. De este modo tiene lugar la multiplicación en avalancha de los iones primarios creados por el ionizador exterior y la intensificación de la corriente de descarga. Pero, el proceso no pierde el carácter de descarga no autónoma, ya que si cesa la acción del ionizador exterior, la descarga prosigue solamente hasta que todos los electrones (primarios y secundarios) llegan al ánodo (el límite posterior del espacio en que hay partículas ionizantes —electrones— se desplaza hacia el ánodo). Para que la descarga se haga autónoma o automantenida es necesario que existan dos avalanchas de iones contrapuestas, lo que únicamente es posible si los portado-

[1]) En virtud de que su recorrido libre es mayor, los electrones adquieren antes que los iones de gas la capacidad de ionizar por choque.

res de ambos signos son capaces de producir la ionización por choque.

Tiene gran importancia el que las corrientes de descarga no autónomas, intensificadas a expensas de la multiplicación de los portadores, sean proporcionales al número de iones primarios creados por el ionizador exterior. Esta propiedad de la descarga se aprovecha en los detectores o contadores proporcionales (véase el párrafo siguiente).

§ 82. Cámaras de ionización y contadores de partículas

Las cámaras de ionización y los contadores o detectores de partículas se utilizan para detectar y contar las partículas elementales y para medir la intensidad de los rayos X y gamma. La acción de estos instrumentos se basa en la aplicación de la descarga no autónoma en un gas.

Los esquemas teóricos de la cámara de ionización y del contador de partículas son iguales (fig. 82.1). Sólo difieren en el régimen de

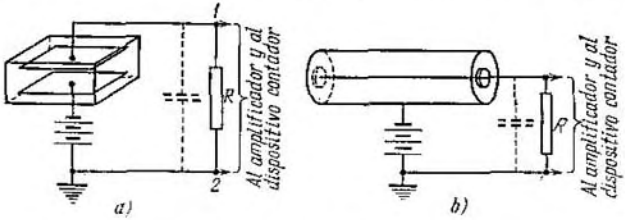


Fig. 82.1.

funcionamiento y en particularidades estructurales. El contador (fig. 82.1, *b*) consta de un cuerpo cilíndrico, a lo largo de cuyo eje hay un hilo delgado tenso y sujeto sobre aisladores (ánodo). De cátodo sirve el cuerpo del contador. Para que entren las partículas ionizantes, en una de las bases del cilindro se hace una ventanilla de mica u hoja de aluminio. Algunas partículas, y los rayos X y gamma, penetran en el contador o en la cámara de ionización directamente, a través de sus paredes. La cámara de ionización (fig. 82.1, *a*) puede tener electrodos de distinta forma. En particular, pueden ser los mismos que los del contador o tener la forma de placas planas paralelas u otras.

Supongamos que en el espacio entre los electrodos penetra una partícula cargada rápida que crea N_0 pares de iones primarios (electrones e iones positivos). Los iones surgidos son arrastrados por el campo hacia los electrodos, a causa de lo cual, a través de la resistencia R, pasa cierta carga q que llamaremos impulso de corriente.

En la fig. 82.2 se da la dependencia del impulso de corriente q respecto de la tensión U entre los electrodos, para dos cantidades diferentes N_0 de iones primarios, una de las cuales es tres veces mayor que la otra ($N_{02} = 3N_{01}$). En la gráfica se pueden distinguir seis regiones. Las regiones I y II fueron estudiadas en el párrafo anterior. En particular, la II región es la de la *corriente de saturación*, en que todos los iones creados por las partículas ionizantes llegan a los electrodos sin tener tiempo de recombinarse. Es natural que en estas condiciones el impulso de corriente no dependa de la tensión.

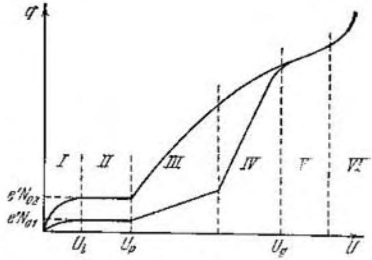


Fig. 82.2.

A partir del valor U_p, la intensidad del campo es suficiente para que los electrones puedan ionizar las moléculas por choque. Por eso la cantidad de electrones e iones positivos crece en avalancha. Como resultado, en cada uno de los electrodos inciden AN_0 iones. La magnitud A se llama *coeficiente de amplificación del gas*. En la III región este coeficiente no depende de la cantidad de iones primarios (pero sí de la tensión). Por eso, si la tensión se mantiene constante, el impulso de corriente será proporcional a la cantidad de iones primarios La III región se denomina *región de proporcionalidad*, y la tensión U_p, *umbral de la región de proporcionalidad*. El coeficiente de amplificación del gas varía en esta región desde 1, al principio, hasta 10^3 . . . . . 10^4, al final (la fig. 82.2 se ha hecho sin respetar la escala sobre el eje q: sólo se ha mantenido la relación 1 : 3 entre las ordenadas de las curvas en las regiones II y III).

En la IV región, llamada *región de proporcionalidad parcial*, el coeficiente de amplificación del gas A depende cada vez más de N_0, en virtud de lo cual la diferencia entre los impulsos de corriente generados por una cantidad distinta de iones primarios, se hace cada vez más suave.

Con las tensiones correspondientes a la región V (a la que se da el nombre de *región de Geiger*, así como a la tensión U_g el de *umbral* de dicha región), el proceso adquiere carácter de descarga autónoma. Los iones primarios solamente estimulan su surgimiento. El impulso de corriente en esta región no depende en absoluto de la cantidad de iones primarios.

En la VI región la tensión es tan grande que la descarga, una vez iniciada, no se interrumpe. Por esta razón se llama *región de descarga continua*.

Cámaras de ionización. Se denominan cámaras de ionización los aparatos que funcionan sin amplificación del gas, es decir, a las tensiones correspondientes a la *II* región. Existen dos tipos de cámaras de ionización. Las de un tipo se utilizan para registrar los impulsos generados por partículas aisladas (cámaras de impulsos). La partícula que penetra en esta cámara crea en ella cierta cantidad de iones, y a causa de esto comienza a pasar a través de la resistencia r la corriente I. Esto hace que el potencial del punto *1* (véase la fig. 82.1, *a*) se eleve y se haga igual a IR (inicialmente el potencial de este punto era el mismo que el del punto *2* puesto a tierra). Este potencial entra en el amplificador y, una vez reforzado, pone en acción un dispositivo contador. Después que todas las cargas llegadas al electrodo interior pasan por la resistencia R, la corriente se interrumpe y el potencial del punto *1* vuelve a ser nulo. El carácter del funcionamiento de la cámara depende de la duración del impulso de corriente producido por una partícula ionizante.

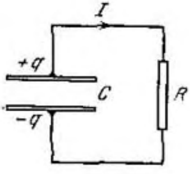


Fig. 82.3.

Para esclarecer de qué depende la duración del impulso, consideremos un circuito formado por un condensador C y una resistencia R (fig. 82.3). Si a las armaduras del condensador se les comunican cargas de signos distintos, $+q_0$ y $-q_0$, a través de la resistencia R pasará corriente, por lo que las cargas que hay en las armaduras disminuirán. El valor instantáneo de la tensión aplicada a la resistencia es $U = q/C$. Por consiguiente, para la intensidad de la corriente se obtiene la expresión

$$I=\frac{U}{R}=\frac{q}{RC}. \qquad (82.1)$$

Sustituimos la intensidad de la corriente por $-dq/dt$, siendo $-dq$ la disminución de la carga en las armaduras en el tiempo dt. Como resultado se obtiene la ecuación diferencial

$$-\frac{dq}{dt}=\frac{q}{RC} \quad \text{o} \quad \frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}\,dt.$$

Según (82.1) $dq/q = dI/I$, por lo que se puede escribir

$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}\,dt.$$

La integración de esta ecuación da

$$\ln I=-\frac{1}{RC}\,t+\ln I_0$$

(mediante $\ln I_0$ se ha designado la constante de integración). Finalmente, potenciando la expresión obtenida, llegamos a la fórmula

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{82.2}$$

Se comprende fácilmente que I_0 es el valor inicial de la intensidad de la corriente.

De la ecuación (82.2) se sigue que en el tiempo

$$\tau = RC \tag{82.3}$$

la intensidad de la corriente disminuye e veces. De acuerdo con esto, la magnitud (82.3) lleva el nombre de *constante de tiempo* del circuito. Cuanto mayor sea esta constante, tanto más lentamente disminuirá la corriente en el circuito.

El esquema de la cámara de ionización (véase la fig. 82.1, *a*) es semejante al representado en la fig. 82.3. El papel de C lo desempeña el volumen comprendido entre los electrodos, que en el esquema de la cámara se indica con línea de trazos. Con el aumento de la resistencia R crece la tensión entre los puntos *1* y *2* para una intensidad de corriente dada y, por lo tanto, se hace más fácil el registro de los impulsos. Esta circunstancia incita a utilizar R de magnitud todo lo mayor posible. Al mismo tiempo, para que la cámara pueda registrar separadamente los impulsos de corriente, generados rápidamente uno detrás de otro por las partículas, la constante de tiempo no debe ser grande. Por eso, al elegir la magnitud de R para las cámaras de impulsos hay que llegar a un compromiso. Por lo general se toma R del orden de $10^8\ \Omega$. Entonces, si $C \sim 10^{-11}$ F, la constante de tiempo constituye 10^{-3} s.

El otro tipo de cámaras de ionización es el de las llamadas cámaras integradoras. En ellas se toma R del orden de $10^{15}\ \Omega$. Si $C \sim 10^{-11}$ F, la constante de tiempo será igual a 10^4 s. En este caso los impulsos de corriente que generan las partículas ionizantes por segundo, se juntan y por la resistencia pasa una corriente continua, cuya magnitud caracteriza la carga total de los iones que surgen en la cámara por unidad de tiempo. De este modo, los dos tipos de cámaras de ionización se diferencian únicamente en el valor de la constante de tiempo RC.

Contadores proporcionales. Los impulsos producidos por las partículas independientes se pueden amplificar mucho (hasta 10^3 ... ... 10^4 veces) si la tensión entre los electrodos se encuentra en la *III* región (véase la fig. 82.2). El instrumento que funciona en este régimen se llama *detector* o *contador proporcional*. El ánodo del contador se hace en forma de hilo de varias centésimas de milímetro de diámetro. La intensidad del campo, en las proximidades del hilo

es especialmente grande. Si la tensión entre los electrodos es suficientemente grande, los electrones que surgen cerca del hilo adquieren bajo la acción del campo la energía suficiente para ionizar las moléculas por choque. Como resultado tiene lugar la multiplicación de los iones. Las dimensiones del volumen, dentro de cuyos límites se produce esta multiplicación, aumenta a medida que crece la tensión. De acuerdo con esto aumenta también el coeficiente de amplificación del gas.

La cantidad de iones primarios depende de la naturaleza y energía de la partícula que provoca el impulso. Por eso, por la magnitud de los impulsos a la salida del contador proporcional se pueden diferenciar las partículas de distinta naturaleza y clasificarlas de una misma naturaleza de acuerdo con sus energías.

Contadores de Geiger—Müller. Una amplificación todavía mayor del impulso (hasta 10^8) se puede conseguir haciendo que el contador funcione en la región de Geiger (V región en la fig. 82.2). Un contador que funcione en este régimen se llama *detector* o *contador de Geiger—Müller* (o bien, abreviadamente, *contador de Geiger*). La descarga en la región de Geiger, una vez «iniciada» por la partícula ionizante, se transforma después en autónoma. Por eso la magnitud del impulso no depende de la ionización inicial. Para poder obtener de las partículas aisladas impulsos separados es necesario interrumpir (extinguir) rápidamente la descarga surgida. Esto se consigue por medio de una resistencia exterior R (en los detectores no *autoextintores*) o a expensas de los procesos que se desarrollan en el contador mismo. En este último caso el detector se llama *autoextintor*.

La extinción de la descarga por medio de una resistencia exterior está condicionada por el hecho de que, al pasar por la resistencia la corriente de descarga, surge en ella una gran caída de tensión. Por esto al espacio entre los electrodos sólo le corresponde una parte de la tensión aplicada, la cual es insuficiente para mantener la descarga.

La interrupción de la descarga en los contadores autoextintores se produce por las causas siguientes. Los electrones tienen una movilidad aproximadamente 1000 veces mayor que la de los iones positivos. Por esta razón, en el tiempo durante el cual los electrones llegan al hilo, los iones positivos casi no se mueven de sus sitios. Estos iones crean una carga espacial positiva que debilita el campo en las proximidades del hilo y la descarga cesa. En este caso la extinción de la descarga la obstaculizan unos procesos adicionales que no vamos a estudiar. Para evitarlos se añade al gas que llena el contador (generalmente argón) una pequeña cantidad de gas orgánico monoatómico (por ejemplo, vapores de alcohol). Este contador separa los impulsos de partículas que se suceden unas a otras con intervalos del orden de 10^{-4} s.

§ 83. Procesos que conducen a la aparición de los portadores de corriente en la descarga autónoma

Antes de empezar a describir los diversos tipos de descarga autónoma en gas, vamos a estudiar los principales procesos que acarrean la aparición de los portadores de corriente (electrones e iones) en estas descargas.

Colisiones de los electrones con las moléculas. Los choques de los electrones (y de los iones) con las moléculas pueden tener carácter elástico o inelástico. La energía de la molécula (lo mismo que la del átomo) se cuantiza. Esto significa que dicha energía sólo puede tener valores discretos (es decir, separados por intervalos finitos), llamados niveles de energía. El estado de energía mínima se denomina *fundamental*. Para hacer que la molécula pase del estado fundamental a los distintos estados excitados se necesitan determinados valores W_1, W_2, etc. de la energía. Comunicándole a la molécula una energía suficientemente grande W_i se puede producir su ionización.

Cuando una molécula pasa a un estado excitado, por lo general permanece en él solamente $\sim 10^{-8}$ s, después de lo cual retorna al estado fundamental emitiendo el exceso de energía en forma de un cuanto de luz o *fotón*. En algunos estados excitados, llamados *metastables*, las moléculas pueden permanecer mucho más tiempo (aproximadamente 10^{-3} s).

En las colisiones de partículas deben cumplirse las leyes de conservación de la energía y del impulso. Por eso a la transmisión de la energía durante el choque se le imponen determinadas limitaciones, es decir, no toda la energía que posee la partícula incidente puede ser transmitida a la otra partícula.

Si durante el choque no puede serle transferida a la molécula la energía suficiente para que se excite, la energía cinética total de las partículas permanece invariable y el choque será *elástico*. Hallemos la energía que se le comunica a la partícula que recibe el choque cuando éste es elástico.

Supongamos que una partícula de masa m_1, cuya velocidad sea v_{10}, choca con una partícula en reposo ($v_{20} = 0$) de masa m_2. Si el choque es central deben cumplirse las condiciones

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

en las que v_1 y v_2 son las velocidades de las partículas después del choque. De estas ecuaciones se obtiene para la velocidad de la segunda partícula el valor

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

(véase el § 28 del tomo 1º). La energía que se transfiere a la segunda partícula durante el choque elástico se determina por la expresión

$$\Delta W_{el} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Si $m_1 \ll m_2$, esta expresión se simplifica del modo siguiente:

$$\Delta W_{el} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4 m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4 m_1}{m_2}, \tag{83.1}$$

donde W_{10} es la energía inicial de la partícula incidente

De (83.1) se infiere que una partícula ligera (electrón) al chocar elásticamente con una partícula pesada (molécula) sólo le transmite una pequeña parte de su reserva de energía. La partícula ligera «rebota» en la pesada lo mismo que una pelota en la pared, sin que varíe prácticamente la magnitud de su velocidad. El cálculo correspondiente da que, cuando el choque es central, la parte de la energía que se transfiere es aún menor.

Si la energía de la partícula incidente (electrón o ion) es suficientemente grande, la molécula se puede excitar o ionizar. En este caso la energía cinética total de las partículas no se conserva, porque una parte de ella se gasta en la excitación o ionización, es decir, en aumentar la energía interna de las partículas que chocan o en dividir en dos una de ellas.

Las colisiones que producen excitación de las partículas son choques inelásticos de primer género. Una molécula en estado excitado, al chocar con otra partícula (electrón, ion o molécula neutra), puede pasar a su estado fundamental no radiando el exceso de energía, sino transmitiéndoselo a dicha partícula. Como resultado la energía cinética total de las partículas después de la colisión es mayor que antes del choque. Estas colisiones se conocen con el nombre de *choques inelásticos de segundo género*. La transición de las moléculas de un estado metastable al fundamental se efectúa a costa de los choques de segundo género.

En una colisión inelástica de primer género las ecuaciones de conservación de la energía y el impulso tienen la forma

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{int}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{83.2}$$

en las que ΔW_{int} es el incremento de la energía interna de la molécula correspondiente a su transición al estado excitado. Eliminando v_1 en estas ecuaciones, obtenemos

$$\Delta W_{int} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{83.3}$$

Para una velocidad dada de la partícula incidente (v_{10}) el incremento de la energía interna ΔW_{int} depende de la velocidad v_2 con

que la molécula se mueve después del choque. Hallemos el valor máximo posible de ΔW_{int}. Para esto tomamos la diferencial de la función (83.3) respecto de v_2 e igualamos la derivada a cero:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{int}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1+m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

De aquí $v_2 = m_1 v_{10}/(m_1 + m_2)$. La sustitución de este valor de v_2 en la fórmula (83.3) da

$$\Delta W_{\text{int. máx}} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \qquad (83.4)$$

Si la partícula incidente es mucho más ligera que la que recibe el choque ($m_1 \ll m_2$), el factor $m_2/(m_1 + m_2)$ en la expresión (83.4) se aproxima a la unidad. De este modo en la colisión de una partícula ligera (electrón) y una pesada (molécula) casi toda la energía de la partícula incidente se puede gastar en excitar o ionizar la molécula[1]).

No obstante, incluso si la energía de la partícula incidente (electrón) es suficientemente grande, la colisión no conduce necesariamente a la excitación o ionización de la molécula. Existen determinadas probabilidades de estos procesos que dependen de la energía (y, por consiguiente, de la velocidad) del electrón. En la fig. 83.1 se muestra la marcha aproximada de estas probabilidades. Cuanto más rápido es el electrón, tanto menor es el intervalo de tiempo que dura su interacción con la molécula al pasar cerca de ella. Por eso ambas probabilidades alcanzan rápidamente el máximo y luego disminuyen al aumentar la energía del electrón. En la figura se ve que un electrón que posea, por ejemplo, la energía W', es más probable que produzca la ionización de la molécula que su excitación.

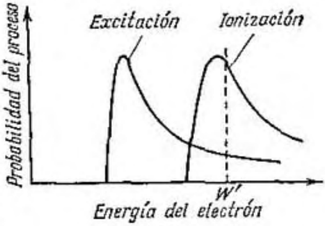


Fig. 83.1.

Fotoionización. La radiación electromagnética está constituida por partículas elementales llamadas fotones. La energía del fotón es igual a $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π (véase (56.5)), y ω, la frecuencia angular de la radiación. El fotón puede ser absorbido por una molécula, yendo su energía a excitarla

[1]) En el caso de la ionización, las ecuaciones (83.2) se complican, ya que después de la colisión no habrá dos partículas, sino tres. Pero la conclusión de que es posible que casi toda la energía del electrón se gaste en la ionización es correcta.

o ionizarla. En este caso la ionización de la molécula se llama *fotoionización*. La fotoionización directa es capaz de producir radiación ultravioleta. La energía de un fotón de luz visible es insuficiente para arrancar un electrón de la molécula. Por lo tanto, la radiación visible es incapaz de producir la fotoionización directa. No obstante, puede condicionar la denominada *fotoionización escalonada*. Este proceso se efectúa en dos etapas. En la primera el fotón hace que la molécula pase a un estado excitado. En la segunda se produce la ionización de la molécula excitada a expensas del choque de ésta con otra molécula.

En la descarga en gas se puede producir una radiación de onda corta capaz de provocar la fotoionización directa. Un electrón suficientemente rápido, al chocar, no sólo puede ionizar la molécula, sino también hacer pasar el ion recién formado a un estado excitado. La transición de este ion al estado fundamental va acompañada de la emisión de una radiación de más frecuencia que la que tiene la radiación de la molécula neutra. La energía de un fotón de esta radiación resulta ser suficiente para la fotoionización directa.

Emisión de electrones por la superficie de los electrodos. En el volumen (espacio) de la descarga en gas pueden entrar electrones procedentes de la *emisión* de la superficie de los electrodos. Tipos de emisión tales como la termoiónica, la de electrones secundarios y la autoemisión o emisión fría desempeñan en algunos tipos de descarga el papel fundamental.

Se llama *emisión termoiónica* la emisión de electrones por los sólidos y líquidos calientes. En virtud de la distribución por velocidades, en un metal siempre existe cierta cantidad de electrones libres, cuya energía es suficiente para vencer la barrera de potencial y salir de los límites de aquél. A la temperatura ambiente la cantidad de estos electrones es insignificante. Pero al aumentar la temperatura, el número de electrones capaces de abandonar el metal crece muy rápidamente y a una temperatura del orden de 10^3 K se hace completamente perceptible.

Se da el nombre de *emisión de electrones secundarios* a la emisión de electrones por la superficie de un sólido o líquido al ser bombardeada con electrones o iones. La razón del número de electrones (secundarios) emitidos al número de partículas que incitan la emisión se denomina *coeficiente de emisión secundaria*. En el caso del bombardeo de la superficie de un metal con electrones, el valor de este coeficiente se encuentra entre los límites de 0,5 (pára el berilio) a 1,8 (para el platino).

Autoemisión o *emisión fría* es la emisión de electrones por la superficie de un metal que tiene lugar cuando en las proximidades de su superficie se crea un campo eléctrico de intensidad muy grande ($\sim 10^8$ V/m). Este fenómeno también se llama a veces desprendimiento o arranque de electrones por un campo eléctrico.

§ 84. Plasma de descarga gaseosa

Algunos tipos de descarga autónoma se caracterizan por un grado muy alto de ionización del gas. Un gas en estado de intensa ionización, a condición de que la carga total de los electrones e iones en cada volumen elemental sea igual (o casi igual) a cero, se llama *plasma*. El plasma es un estado especial de la substancia. En dicho estado se encuentra la substancia en las entrañas del Sol y de otras estrellas, cuya temperatura es de decenas de millones de grados. El plasma que se produce a causa de la alta temperatura de la substancia se dice que es *de alta temperatura* o *isotérmico*. El que se origina en la descarga en gas se llama *plasma de descarga gaseosa*.

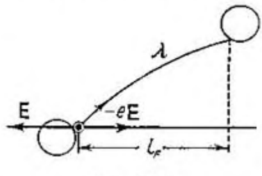


Fig. 84.1.

Para que el plasma se encuentre en estado estacionario es necesario que existan procesos que compensen la disminución de iones debida a la recombinación. En el plasma de alta temperatura esto se efectúa a expensas de la ionización térmica, y en el de descarga gaseosa, a costa de la ionización por choque de los electrones acelerados por el campo eléctrico. Una modalidad particular de plasma es la *ionosfera* (una de las capas de la atmósfera). El alto grado de ionización de las moléculas ($\sim 1\%$) se mantiene en la ionosfera a costa de la fotoionización debida a la radiación de onda corta del Sol.

En el plasma de descarga gaseosa los electrones participan en dos movimientos, uno caótico, con cierta velocidad media $\langle v \rangle$ y otro ordenado, en sentido opuesto a **E**, con la velocidad media $\langle u \rangle$, mucho menor que $\langle v \rangle$.

Vamos a demostrar que el campo eléctrico no sólo condiciona el movimiento ordenado de los electrones en el plasma, sino que también aumenta la velocidad $\langle v \rangle$ de su movimiento caótico. Supongamos que, en el instante en que se conecta el campo, hay en el gas cierta cantidad de electrones, cuya velocidad corresponde a la temperatura del gas T_g ($^1/_2 m \langle v^2 \rangle = {}^3/_2 kT_g$). En el tiempo entre dos colisiones consecutivas con las moléculas, el electrón recorre, en promedio, un espacio λ (fig. 84.1; la trayectoria del electrón está ligeramente curvada por la acción de la fuerza $-e\mathbf{E}$). Al mismo tiempo el campo realiza sobre éste el trabajo

$$A = eEl_F, \tag{84.1}$$

en el que l_F es la proyección del desplazamiento del electrón sobre la dirección de la fuerza que actúa sobre él. A causa de las colisiones con las moléculas, la dirección del movimiento del electrón cambia todo el tiempo de un modo casual. Respectivamente, cambia la mag-

nitud y el signo de l_F. Por eso el trabajo (84.1) tiene magnitud distinta y signo diferente en trozos aislados de la trayectoria. En unos el campo aumenta la energía de los electrones, en otros la disminuye. Si el movimiento ordenado de los electrones no existiera, el valor medio de l_F, y, por consiguiente, también el trabajo (84.1), sería nulo. Pero la existencia de dicho movimiento hace que el valor medio del trabajo A sea distinto de cero y al mismo tiempo positivo. Este valor es

$$\langle A\rangle = eE\langle u\rangle\tau = eE\langle u\rangle\frac{\lambda}{\langle v\rangle}, \tag{84.2}$$

donde τ es la duración media del recorrido libre de los electrones ($\langle u\rangle \ll \langle v\rangle$).

De este modo, el campo, en promedio, aumenta la energía de los electrones. Es cierto que el electrón al chocar con una molécula le transmite a ésta parte de su energía. Pero como se aclaró en el párrafo anterior, la parte relativa δ de la energía que se transfiere durante el choque elástico, es muy pequeña. En promedio[1]) $\langle\delta\rangle = 2(m/M)$ (m es la masa del electrón y M, la masa de la molécula).

En un gas enrarecido (en el cual λ es mayor) y con intensidad del campo E suficientemente grande, el trabajo (84.2) puede ser mayor que la energía $^1/_2 m\langle v^2\rangle\cdot\langle\delta\rangle$ transferida, en promedio, a la molécula en cada colisión. Como resultado de esto la energía del movimiento caótico de los electrones crecerá. Por último alcanza un valor máximo suficiente para excitar o ionizar la molécula. A partir de este instante una parte de las colisiones deja de ser elástica, lo que va acompañado de una gran pérdida de energía. Por eso la parte, en promedio, de energía que se transmite $\langle\delta\rangle$, aumenta.

Así, la energía necesaria para la ionización no la adquieren los electrones en un solo recorrido libre, sino que la acumulan poco a poco durante una serie de recorridos. La ionización acarrea el surgimiento de una gran cantidad de electrones y iones positivos y se produce el plasma.

La energía de los electrones del plasma está definida por la condición de que el valor medio del trabajo que realiza el campo sobre un electrón durante un recorrido libre es igual al valor medio de la energía que cede el electrón en el choque con una molécula:

$$eE\langle u\rangle\frac{\lambda}{\langle v\rangle} = \frac{m\langle v^2\rangle}{2}\langle\delta\rangle.$$

Aquí $\langle\delta\rangle$ es una función compleja de la velocidad $\langle v\rangle$.

La experiencia da que para los electrones rige en el plasma de descarga gaseosa la distribución de Maxwell por velocidades. A causa

[1]) De acuerdo con la fórmula (83.1), si el choque es central, $\delta = 4(m/M)$. En el caso de que el electrón y la molécula se «rocen» débilmente, $\delta \approx 0$.

de la débil interacción de los electrones con las moléculas (en el choque elástico δ es muy pequeña y la cantidad relativa de colisiones inelásticas es insignificante), la velocidad media del movimiento caótico de los electrones resulta ser muchas veces mayor que la velocidad correspondiente a la temperatura del gas T_g. Si se introduce la temperatura de los electrones T_e y se determina partiendo de la relación

$$^1/_2 m \langle v^2 \rangle = {}^3/_2 kT_e,$$

se obtiene para T_e un valor del orden de varias decenas de millares de Kelvin. La no coincidencia de las temperaturas T_g y T_e evidencia que entre los electrones y las moléculas no existe equilibrio termodinámico en el plasma de descarga gaseosa[1]).

La concentración de portadores de corriente en el plasma es muy grande. Por eso el plasma es buen conductor. La movilidad de los electrones es aproximadamente tres órdenes mayor que la de los iones, en virtud de lo cual la corriente en el plasma la crean principalmente los electrones.

§ 85. Descarga luminiscente

La descarga luminiscente se produce a presiones bajas. Se puede observarla en un tubo de vidrio de 0,5 m de longitud aproximadamente, en cuyos extremos estén soldados unos electrodos metálicos planos (fig.85.1). A estos electrodos se les suministra una tensión del orden de 1000 V. A la presión atmosférica en el tubo no existe prácticamente corriente. Si la presión se hace descender, cuando llega aproximadamente a 50 mm Hg se produce una descarga en forma de delgado cordón luminoso ondulado que une el ánodo con el cátodo. A medida que disminuye la presión se va haciendo más grueso el cordón y, aproximadamente, cuando aquélla es de 5 mm Hg llena toda la sección del tubo y se establece la descarga luminiscente. Sus partes fundamentales se muestran en la fig. 85.1. En las proximidades del cátodo se encuentra una capa luminosa delgada que se denomina *película luminosa del cátodo*. Entre el cátodo y esta película se encuentra el *espacio oscuro de Aston*. Por la otra parte de la película hay una capa débilmente luminosa, que por contraste parece oscura, llamada *espacio oscuro del cátodo* (o de Crookes). De esta capa se pasa a una región luminosa que recibe el nombre de *luminiscencia negativa*. Todas las capas citadas forman la parte catódica de la descarga luminiscente.

Con la luminiscencia negativa limita un intervalo oscuro, el *espacio oscuro de Faraday*. Éste es un límite borroso. El resto del tubo está lleno de gas liminiscente; esta parte se llama *columna posi-*

---

[1]) En el plasma de alta temperatura la energía media de las moléculas, electrones y iones es la misma. Esto explica su denominación de plasma isotérmico

tiva. Al descender la presión la parte catódica de la descarga y el espacio oscuro de Faraday se ensanchan y la columna positiva se acorta. Con una presión del orden de 1 mm Hg la columna positiva se descompone en una serie de capas (*estratos*) curvadas, oscuras y brillantes, que se suceden alternativamente.

Las mediciones efectuadas por medio de sondas (alambritos delgados soldados en diversos puntos a lo largo del tubo) y por otros métodos han demostrado que el potencial varía a lo largo del tubo irregularmente (véase la gráfica de la fig. 85.1). Casi toda la caída de potencial corresponde a las primeras tres partes de la descarga, hasta el espacio oscuro del cátodo inclusive. A esta parte de la tensión aplicada al tubo se le da el nombre de *caída de potencial catódica.* En la región de la luminiscencia negativa el potencial no varía,

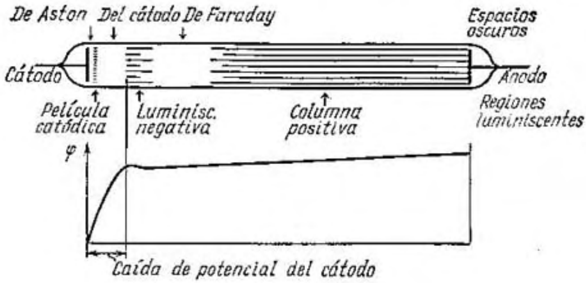


Fig. 85.1.

en ella la intensidad del campo es nula. Finalmente, en el espacio oscuro de Faraday y en la columna positiva el potencial crece lentamente. Esta distribución del potencial se debe a que en la región del espacio oscuro del cátodo se forma una carga espacial positiva condicionada por la alta concentración de iones positivos.

Los procesos fundamentales necesarios para el mantenimiento de la descarga luminiscente se producen en la parte catódica. Las demás partes de la descarga no tienen importancia e incluso pueden no existir (si la distancia entre los electrodos es pequeña o si la presión es baja). Los procesos fundamentales son dos: la emisión secundaria de electrones por el cátodo, provocada por su bombardeo por los iones positivos, y la ionización de las moléculas del gas por choque con los electrones.

Los iones positivos, acelerados por la caída de potencial catódica, bombardean el cátodo y arrancan de él electrones. En el espacio oscuro de Aston estos electrones son acelerados por el campo eléc-

trico. Una vez que adquieren la energía suficiente comienzan a excitar las moléculas del gas, como resultado de lo cual surge la película luminosa del cátodo. Los electrones penetran sin chocar en la región del espacio oscuro del cátodo y tienen una gran energía, por lo que es más frecuente que produzcan la ionización de las moléculas que su excitación (véanse las gráficas de la fig. 83.1). De este modo la intensidad luminosa del gas disminuye, pero se forman muchos electrones y iones positivos. Los iones generados tienen al principio una velocidad muy pequeña. Por esta razón en el espacio oscuro del cátodo se crea la carga espacial positiva, que hace que el potencial se redistribuya a lo largo de tubo y que se produzca la caída de potencial cotódica.

Los electrones que surgen en el espacio oscuro del cátodo penetran en la región de la luminiscencia negativa, que se caracteriza por tener una alta concentración de electrones y iones positivos y una carga espacial total próxima a cero (plasma). Por eso aquí la intensidad del campo es muy pequeña. En virtud de la alta concentración de electrones y iones, en la región de la luminiscencia negativa se desarrolla un intenso proceso de recombinación, acompañado de la radiación de la energía que se desprende. De este modo, la luminiscencia negativa es fundamentalmente una luminosidad de recombinación.

Los electrones y iones de la región de la luminiscencia negativa penetran en el espacio oscuro de Faraday a costa de la difusión (en el límite entre estas regiones no hay campo, pero, en cambio, existe un gran gradiente de concentración de electrones y iones). A causa de la menor concentración de partículas cargadas, la probabilidad de la recombinación en el espacio oscuro de Faraday desciende mucho. Por esta razón dicho espacio parece oscuro.

En el espacio oscuro de Faraday ya existe campo. Arrastrados por él, los electrones acumulan poco a poco energía y por fin se crean las condiciones necesarias para la existencia del plasma. La columna positiva es plasma de descarga gaseosa. Este plasma hace las veces de conductor que une el ánodo con las partes catódicas de la descarga. La luminiscencia de la columna positiva se debe principalmente a las transiciones de las moléculas excitadas al estado fundamental. Las moléculas de gases diferentes emiten en estas transiciones radiación de distinta longitud de onda. Por eso la luminiscencia de la columna positiva tiene el color característico de cada gas. Esta circunstancia se aprovecha en los tubos de gas que se emplean en los letreros y anuncios luminosos. Los trazos de dichos letreros no son más que columnas positivas de descarga luminiscente. Los tubos de neón dan luz roja; los de argón, luz azulino-verdosa, etc.

Si la distancia entre los electrodos se acorta paulatinamente, la parte catódica de la descarga permanece invariable, pero la longitud de la columna positiva disminuye hasta que desaparece por completo

Después desaparece el espacio oscuro de Faraday y empieza a acortarse el espacio de la luminiscencia negativa, permaneciendo invariable la posición del límite de esta luminiscencia con el espacio oscuro del cátodo. Cuando la distancia del ánodo a este límite es muy pequeña, la descarga cesa.

Si se disminuye paulatinamente la presión, la parte catódica de la descarga se extiende a una porción cada vez mayor del espacio entre los electrodos y al final el espacio oscuro del cátodo se extiende a casi todo el tubo. En este caso deja de apreciarse la luminosidad del gas, pero las paredes del tubo comienzan a emitir luz verdosa. La energía de los electrones desprendidos del cátodo y acelerados por la caída de potencial catódica llegan, sin chocar con las moléculas del gas, hasta las paredes del tubo y, al chocar con ellas, producen la luminiscencia. Por razones históricas, al flujo de electrones emitido por el cátodo de un tubo de descarga en gas a presiones muy bajas, se le dio el nombre de *rayos catódicos*. La luminosidad producida por el bombardeo con electrones rápidos se llama *catodoluminiscencia* o *luminiscencia catódica*.

Si en el cátodo de un tubo de descarga en gas se practica un canal estrecho, parte de los iones positivos penetra en el espacio que hay detrás del cátodo y forma un haz bruscamente limitado de iones que se denomina de *rayos canales* (o *positivos*). Precisamente por este procedimiento se obtuvieron los primeros haces de iones positivos.

§ 86. Descarga en arco

En 1802 descubrió el científico ruso V. V. Petrov que al separar unos electrodos de carbón, inicialmente en contacto, conectados a una gran batería de pilas, entre ellos se encendía una luz cegadora. Si los electrodos estaban dispuestos horizontalmente, el gas luminiscente calentado se curvaba en forma de arco, por lo que el fenómeno descubierto por Petrov se llamó *arco eléctrico*. La intensidad de la corriente en el arco puede alcanzar valores enormes (10^3 . . . . . . 10 A) con tensiones de varias decenas de voltios.

La descarga en arco se puede producir tanto a baja presión (del orden de varios milímetros de la columna de mercurio) como a presión alta (de hasta 1000 atm). Los procesos fundamentales que mantienen la descarga son, la emisión termoiónica de la superficie del cátodo incandescente, y la ionización térmica de las moléculas, debida a la alta temperatura del gas en el espacio entre los electrodos. Casi todo este espacio está lleno de plasma de alta temperatura. Éste sirve de conductor por el cual los electrones emitidos por el cátodo llegan al ánodo. La temperatura del plasma es de cerca de 6000 K. En un arco a presión ultraalta la temperatura del plasma puede llegar a los 10 000 K (se recordará que la temperatura de la superficie solar es de 5800 K). A causa del bombardeo por los iones positivos, el cátodo

se calienta aproximadamente hasta 3500 K. El ánodo, bombardeado por el potente flujo de electrones, se caldea aún más. Esto conduce a una intensa vaporización del ánodo y en su superficie se forma un hueco o cráter. El cráter es el sitio más brillante del arco.

La descarga en arco posee característica tensión-corriente decreciente (fig. 86.1). Esto se explica porque al aumentar la intensidad de la corriente crecen la emisión termoiónica del cátodo y el grado de ionización del espacio de descarga en el gas. Como resultado, la disminución de la resistencia de este espacio es mayor que el aumento de la corriente.



Fig. 86.1.

Además del arco termoelectrónico que hemos descrito (es decir, de la descarga condicionada por la emisión termoiónica de la superficie incandescente del cátodo), existe el *arco de cátodo frío*. Como cátodo de este arco sirve de ordinario el mercurio líquido contenido en una ampolla, de la cual se ha extraído el aire. La descarga se efectúa en el vapor de mercurio. Los electrones se desprenden del cátodo por autoemisión. El intenso campo que para esto es necesario que exista junto a la superficie del cátodo, lo crea la carga espacial positiva formada por los iones. Los electrones no son emitidos por toda la superficie del cátodo, sino por una mancha o foco catódico pequeño y brillante que se traslada continuamente. La temperatura del gas en este caso no es alta. La ionización de las moléculas en el plasma se produce, lo mismo que en la descarga luminiscente, a costa de los choques electrónicos.

§ 87. Descargas por chispas y corona

La descarga por chispas se produce en aquellos casos en que la intensidad del campo eléctrico alcanza el valor de disrrupción E_{disr} para el gas dado. El valor E_{disr} depende de la presión del gas; para el aire a la presión atmosférica es de cerca de 3MV/m (30 kV/cm). Al aumentar la presión, E_{disr} crece. Según la *ley* empírica *de Paschen*, la razón de la tensión disruptiva del campo a la presión es aproximadamente constante:

$$\frac{E_{disr}}{p} \approx \text{const.}$$

La descarga por chispas va acompañada de la formación de un sinuoso canal, brillante y ramificado, por el cual pasa un breve impulso de corriente de gran intensidad. De ejemplo puede servir un rayo; su longitud suele ser de hasta 10 km; el diámetro del canal, de hasta 40 cm; la intensidad de la corriente puede alcanzar 100 000 y

más amperios, y la duración del impulso es de cerca de 10^{-4} s. Cada rayo consta de varios impulsos (hasta 50) que siguen el mismo canal; su duración total (junto con los intervalos entre los impulsos) puede llegar a ser de varios segundos. La temperatura del gas en el canal de la chispa puede ser de hasta 10 000 K. El calentamiento rápido e intenso del gas hace que aumente bruscamente la presión y que se originen ondas de choque y sonoras. Por eso la descarga por chispas va acompañada de fenómenos acústicos, desde un chasquido leve, cuando la chispa es poco potente, hasta el fragor de los truenos que siguen al rayo.

El surgimiento de la chispa va precedido de la formación en el gas de un canal fuertemente ionizado que recibe el nombre de «*streamer*»[1]). Este canal se forma por recubrimiento de las avalanchas electrónicas aisladas que surgen en el camino de la chispa. De precursor de cada avalancha sirve un electrón generado por fotoionización. El esquema del desarrollo del «streamer» se muestra en la fig. 87.1. Supongamos que la intensidad del campo es tal, que un electrón desprendido del cátodo a expensas de un proceso cualquiera, adquiere en la longitud del recorrido libre la energía suficiente para la ionización. Por eso se produce la multiplicación de los electrones y se origina la avalancha (los iones positivos que se forman al mismo tiempo, no desempeñan papel importante porque su movilidad es mucho menor; ellos sólo condicionan la carga espacial que ocasiona la redistribución del potencial). La radiación de onda corta que emite el átomo al cual le fue arrancado uno de los electrones internos durante la ionización (esta radiación se indica en el esquema por medio de líneas onduladas), excita la fotoionización de las moléculas, y los electrones que se desprenden generan cada vez nuevas avalanchas. Una vez que estas avalanchas se recubren, se forma el canal («streamer») buen conductor, por el cual se lanza del cátodo al ánodo un potente flujo de electrones y se produce la descarga disruptiva.

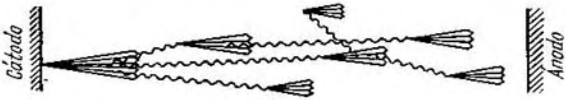


Fig. 87.1.

Si los electrodos tienen una forma, con la cual el campo es aproximadamente homogéneo, en el espacio entre ellos (por ejemplo, si

[1]) Según la palabra inglesa que significa descarga irregular. (*Nota del Redactor.*)

son esferas de diámetro suficientemente grande), la disrupción se produce a una tensión U_{disr} totalmente determinada, cuyo valor depende de la distancia l entre las esferas ($U_{disr} = E_{disr}\, l$). En esto se basa el voltímetro de chispas, con el cual se mide la alta tensión (10^3 ... 10^5 V). (En las mediciones se determina la distancia máxima $l_{máx}$, con la cual se produce la chispa. Multiplicando luego $E_{máx}$ por $l_{máx}$ se obtiene el valor de la tensión medida.

Si uno de los electrodos (o ambos) tiene curvatura muy grandle (por ejemplo, si sirve de electrodo un alambre delgado o una punta), con una tensión no desmesurada se produce la llamada *descarga corona*. Si la tensión aumenta, la descarga toma la forma de chispas o de arco.

En la descarga corona la ionización y la excitación de las moléculas tienen lugar no en todo el espacio entre los electrodos, sino únicamente en las proximidades del electrodo con radio de curvatura pequeño, donde la tensión del campo alcanza valores iguales o mayores que E_{disr}. En esta parte de la descarga el gas desprende luz. Esta luminiscencia tiene forma de corona que rodea al electrodo, a lo que se debe la denominación de este tipo de descarga. La descarga corona de una punta tiene forma de escobilla, por lo que a veces se le da el nombre de *descarga de escobilla*. En dependencia del signo del electrodo de corona, se dice que la corona es positiva o negativa. Entre la capa de corona y el electrodo no coronado se encuentra la *región exterior de la coeona*. El régimen de disrupción ($E \geqslant E_{disr}$) sólo existe dentro de los límites de la capa de corona. Por eso se puede decir que el efecto corona es la disrupción incompleta del espacio gaseoso.

En el caso de la corona negativa los fenómenos que ocurren en el cátodo son semejantes a lso que tienen lugar en el cátodo de la descarga liminiscente. Los iones positivos acelerados por el campo arrancan del cátodo electrones, los cuales producen la ionización y excitación de las moléculas en la capa de corona. En la región exterior de la corona el campo es insuficiente para comunicar a los electrones la energía necesaria para la ionización o excitación de las moléculas. Por eso los electrones que penetran en esta región derivan hacia el ánodo bajo la acción del campo. Una parte de ellos es capturada por las moléculas, por lo que se forman iones negativos. De este modo, la corriente en la región exterior está condicionada únicamente por los portadores negativos (electrones e iones negativos). En esta región la descarga tiene carácter no autónomo.

En la corona positiva las avalanchas electrónicas se generan en el límite exterior de la corona y se dirigen hacia el electrodo coronado, es decir, al ánodo. El surgimiento de los electrones que generan las avalanchas se debe a la fotoionización producida por la radiación de la capa de corona. De portadores de corriente en la región exterior sirven los iones positivos, los cuales derivan hacia el cátodo bajo la acción del campo.

Si ambos electrodos tienen gran curvatura (los dos electrodos son de corona), en las proximidades de cada uno de ellos transcurren los procesos propios del electrodo de corona del sirno dado. Ambas capas de corona están separadas entre sí por una región exterior, en la cual se mueven uno al encuentro del otro los flujos de portadores de corriente positivos y negativos. Esta corona se llama bipolar.

La descarga en gas autónoma citada en el § 82 al estudiar los contadores de partículas, es una descarga corona.

El espesor de la capa de corona y la intensidad de la corriente de descarga crecen cuando aumenta la tensión. Si la tensión es pequeña las dimensiones de la corona son también pequeñas y su luminosidad es inapreciable. Esta corona microscópica surge cerca de la punta, de la cual fluye el viento eléctrico (véase el § 24).

La corona que aparece por la acción de la electricidad atmosférica en los extremos de los mástiles de los barcos, en las cimas de los árboles, etc., se llamó antiguamente fuego de San Telmo.

En los dispositivos de alto voltaje, en particular en las líneas de transporte de alta tensión, la descarga corona hace que se produzcan fugas de corriente perniciosas. Por eso hay que tomar medidas para evitarlas. Con este fin, por ejemplo, los conductores de las líneas de alta tensión se hacen de un diámetro suficientemente grande, y tanto mayor cuanto más elevada sea la tensión de la línea.

La descarga corona ha encontrado en la técnica una aplicación útil en los filtros eléctricos. En ellos el gas que se depura se mueve por un tubo, a lo largo de cuyo eje hay un electrodo de corona negativo. Los iones negativos, que existen en gran cantidad en la región exterior de la corona, se adhieren a las partículas o gotitas que impurifican el gas y las arrastran consigo hacia el electrodo exterior sin corona. Al llegar a dicho electrodo se neutralizan las partículas y precipitan en él. Luego se golpea el tubo y el precipitado que forman las partículas va a caer a un colector.

CAPÍTULO XIII

OSCILACIONES ELÉCTRICAS

§ 88. Corrientes casi estacionarias

Al estudiar las oscilaciones eléctricas tenemos que encontrarnos con corrientes que varían con el tiempo. La ley de Ohm y las reglas (leyes) de Kirchhoff que de ella se deducen fueron establecidas para la corriente continua. No obstante, siguen siendo válidas para los valores instantáneos de la corriente y tensión variables, si sus variaciones no se producen con demasiada rapidez. Las excitaciones electromagnéticas se propagan por el circuito a una velocidad enorme, igual a la velocidad c de la luz. Sea l la longitud del circuito. Si durante el tiempo $\tau = l/c$, necesario para transmitir la excitación al punto más lejano del circuito, la intensidad de la corriente varía de un modo insignificante, los valores instantáneos de dicha intensidad en todas las secciones del circuito serán prácticamente iguales. Las corrientes que satisfacen esta condición se llaman *casi estacionarias*. Para las corrientes variables periódicamente la condición de casi estacionaridad tiene la forma

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

donde T es el período de variación.

Para un circuito de 3 m de largo, el retraso $\tau = 10^{-8}$ s. Por lo tanto, hasta T del orden de 10^{-8} s (que corresponde a una frecuencia de 10^6 Hz) las corrientes se pueden considerar casi estacionarias en este circuito. La corriente de frecuencia industrial ($\nu = 50$ Hz) es casi estacionaria para los circuitos de hasta ~ 100 km de longitud.

Los valores instantáneos de las corrientes casi estacionarias se subordinan a la ley de Ohm. Por consiguiente, para ellos son válidas también las leyes de Kirchhoff.

En adelante, al estudiar las oscilaciones eléctricas, supondremos siempre que las corrientes consideradas son casi estacionarias.

§ 89. Oscilaciones libres en un circuito sin resistencia óhmica

En un circuito que contenga una inductancia y una capacidad pueden producirse oscilaciones eléctricas. Por eso dicho circuito se denomina *oscilante*. La fig. 89.1, *a* representa las sucesivas etapas de un proceso oscilatorio en un circuito idealizado, sin resistencia óhmica.

18—01245

En este circuito se pueden excitar oscilaciones comunicando a las armaduras del condensador cierta carga inicial o excitando corriente en la inductancia (desconectando, por ejemplo, el campo magnético exterior que atraviesa las espiras de la bobina). Vamos a utilizar el primer procedimiento. El condensador, desconectado de la inductancia, lo unimos a una fuente de tensión. Esto hace que aparezcan en las armaduras cargas de signos distintos, $+q$ y $-q$ (etapa *1*). Entre las armaduras surge un campo eléctrico, cuya energía es igual a $\frac{1}{2}(q^2/C)$ (véase la fórmula (29.2)). Si después se desconecta la fuente de tensión y se cierra el circuito del condensador con la inductancia, la capacidad comienza a descargarse y por el circuito

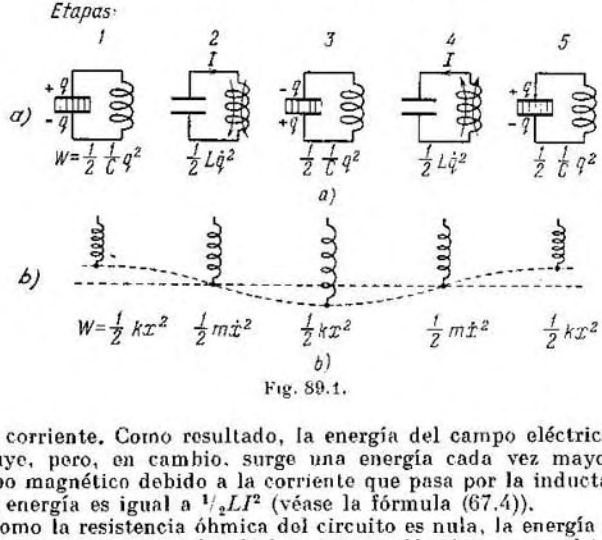


Fig. 89.1.

pasa corriente. Como resultado, la energía del campo eléctrico disminuye, pero, en cambio, surge una energía cada vez mayor del campo magnético debido a la corriente que pasa por la inductancia. Esta energía es igual a $\frac{1}{2}LI^2$ (véase la fórmula (67.4)).

Como la resistencia óhmica del circuito es nula, la energía total, compuesta de las energías de los campos eléctrico y magnético, no se gasta en calentar los conductores y permanecerá constante[1]). Por eso en el instante en que la tensión en el condensador y, por consiguiente, la energía del campo eléctrico se anulan, la energía del campo magnético y, por lo tanto, la corriente, alcanzan el valor máximo (etapa *2*; a partir de este instante la corriente pasa a expensas de la f.e.m. autoinducida). En adelante la corriente disminuye y,

[1]) En rigor, en este circuito idealizado se produciría una pérdida de energía en radiación de ondas electromagnéticas. Esta pérdida sería tanto mayor cuanto mayor fuera la frecuencia de las oscilaciones y más «abierto» el circuito.

cuando las cargas alcanzan en las armaduras el valor inicial q, la intensidad de la corriente se anula (etapa *3*). Luego estos mismos procesos se desarrollan en sentido inverso (etapas *4* y *5*), después de lo cual el sistema retorna al estado inicial (etapa *5*) y todo el ciclo se repite una y otra vez. Durante el proceso varían periódicamente (es decir, oscilan) la carga de las armaduras, la tensión en el condensador y la intensidad de la corriente que pasa por la inductancia. Las oscilaciones van acompañadas de las transformaciones mutuas de las energías de los campos eléctrico y magnético.

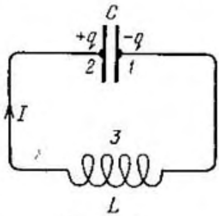


Fig. 89.2.

En la fig. 89.1, *b* las oscilaciones en el circuito se comparan con las de un péndulo de resorte. A la comunicación de las cargas a las armaduras del condensador corresponde la separación del péndulo de su posición de equilibrio por una fuerza exterior y la comunicación al mismo de la elongación inicial x. Al mismo tiempo surge la energía potencial de la deformación elástica del muelle, igual a $^1/_2kx^2$. La etapa *2* corresponde al paso del péndulo por la posición de equilibrio. En este instante la fuerza casi elástica es nula y el péndulo se sigue moviendo por inercia. Entonces su energía se transforma totalmente en cinética y se determina por la expresión $^1/_2m\dot{x}^2$. La comparación de las etapas siguientes se la encomendamos al lector.

De la comparación de las oscilaciones eléctricas y mecánicas se sigue que la energía del campo eléctrico $^1/_2(q^2/C)$ es análoga a la energía potencial de la deformación elástica, y la energía del campo magnético $^1/_2LI^2$ es análoga a la energía cinética. La inductancia L desempeña el papel de la masa m, y la magnitud recíproca de la capacidad $(1/C)$, el papel de la rigidez k. Finalmente, a la carga q corresponde la elongación de la posición de equilibrio x del péndulo, y a la intensidad de la corriente $I = \dot{q}$, la velocidad $\dot{x}$. A continuación veremos que la analogía entre las oscilaciones eléctricas y mecánicas se extiende a las ecuaciones matemáticas que las describen.

Hallemos la ecuación de las oscilaciones en el circuito sin resistencia óhmica. Convencionalmente vamos a considerar positiva la corriente que carga el condensador[1]) (fig. 89.2). Entonces

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \tag{89.1}$$

[1]) Con esta elección de sentido del la corriente la analogía entre las oscilaciones eléctricas y mecánicas resulta más completa, porque a la velocidad $\dot{x}$ corresponde $\dot{q}$ (con la elección contraria, a la velocidad $\dot{x}$ correspondería $-q$).

Escribimos la expresión de la ley de Ohm para el circuito *1—3—2*:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12} \tag{89.2}$$

(véase (35.3)). En nuestro caso $R = 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ y $\mathscr{E}_{12} = \mathscr{E}_s = -L\,(dI/dt)$. La sustitución de estos valores en (89.2), da

$$0 = -q/C - L\,(dI/dt). \tag{89.3}$$

Finalmente, sustituyendo dI/dt por $\ddot{q}$ (véase (89.1)), obtenemos la ecuación

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}\,q = 0. \tag{89.4}$$

Si se introduce la designación

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{89.5}$$

la ecuación (89.4) toma la forma

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{89.6}$$

bien conocida por nosotros desde que estudiamos las oscilaciones mecánicas (véase la fórmula (53.1) del tomo 1º). La solución de esta ecuación es la función

$$q = q_m \cos\,(\omega_0 t + \alpha). \tag{89.7}$$

De este modo, la carga en las armaduras del condensador varía según la ley armónica con la frecuencia que determina la expresión (89.5). Esta frecuencia se llama *frecuencia propia del circuito* (que corresponde a la frecuencia propia del oscillador armónico). Para el período de las oscilaciones se obtiene la llamada *fórmula de Thomson*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{89.8}$$

La tensión en el condensador difiere de la carga en el factor $1/C$:

$$U = \frac{q_m}{C}\cos\,(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos\,(\omega_0 t + \alpha). \tag{89.9}$$

Tomando la diferencial de la función (89.7) respecto del tiempo, se obtiene la expresión de la intensidad de la corriente

$$I = -\omega_0 q_m \operatorname{sen}\,(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{89.10}$$

Por lo tanto, la intensidad de la corriente adelanta en fase a la tensión en el condensador en $\pi/2$.

La comparación de las fórmulas (89.7) y (89.9) con la fórmula (89.10) muestra que en el instante en que la corriente alcanza el valor máximo, la carga y la tensión se anulan, y viceversa. Esta

relación entre la carga y la corriente ya fue establecida por nosotros con anterioridad, basándonos en razonamientos energéticos.

De las fórmulas (89.9) y (89.10) se deduce que

$$U_m = \frac{q_m}{C} \quad \text{e} \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Tomando la relación de estas amplitudes y sustituyendo ω_0 de acuerdo con la fórmula (89.5), obtenemos

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_m. \tag{89.11}$$

Esta fórmula se puede obtener también partiendo de que el valor máximo de la energía del campo eléctrico $^1/_2 CU_m^2$ debe ser igual al valor máximo de la energía del campo magnético $^1/_2 LI_m^2$.

§ 90. Oscilaciones libres amortiguadas

Todo circuito real tiene resistencia óhmica. La energía acumulada en el circuito se gasta en calentar esta resistencia, a causa de lo cual se amortiguan las oscilaciones libres. La ecuación (89.2), escrita para el circuito *1—3—2* representada en la fig. 90.1, tiene la forma

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} \tag{90.1}$$

(compárese con (89.3)). Dividiendo esta ecuación por L y sustituyendo I por $\dot{q}$ y dI/dt por $\ddot{q}$, obtenemos

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{90.2}$$

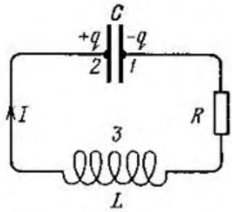


Fig. 90.1.

Tomando en consideración que la magnitud recíproca de LC es igual al cuadrado de la frecuencia propia ω_0 del circuito (véase la fórmula (89.5)), e introduciendo la designación

$$\beta = R/2L, \tag{90.3}$$

a la ecuación (90.2) se le puede dar la forma

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{90.4}$$

Esta última ecuación coincide con la ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas amortiguadas (véase la fórmula (58.1) del tomo 1°).

A condición de que $\beta^2 < \omega_0^2$, es decir, $R^2/4L^2 < 1/LC$, la solución de la ecuación (90.4) tiene la forma

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{90.5}$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Sustituyendo el valor (89.5) de ω_0 y (90.3) de β, hallamos que

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \qquad (90.6)$$

De este modo, la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas ω es menor que la frecuencia propia ω_0. Cuando $R = 0$ la expresión (90.6) se transforma en la (89.5).

Dividiendo la función (90.5) por la capacidad C, obtenemos la tensión en el condensador:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \qquad (90.7)$$

Para hallar la intensidad de la corriente tomamos la diferencial de (90.5) respecto del tiempo:

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)].$$

Multiplicando el segundo miembro de esta fórmula por la expresión, igual a la unidad, $\omega_0/\sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, obtenemos

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \right].$$

Introduciendo el ángulo ψ, determinado por las condiciones

$$\cos\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \operatorname{sen}\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

se puede escribir

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi). \qquad (90.8)$$

Como $\cos\psi < 0$ y $\operatorname{sen}\psi > 0$, el valor de ψ está comprendido entre los límites de $\pi/2$ a π $(\pi/2 < \psi < \pi)$. Así, pues, si el circuito tiene resistencia óhmica, la intensidad de la corriente adelanta en fase la tensión en el condensador en más de $\pi/2$ (si $R = 0$ el avance es de $\pi/2$).

La gráfica de la función (90.5) se representa en la fig. 90.2. Las gráficas de la tensión y de la intensidad de la corriente tienen forma análoga.

El amortiguamiento de las oscilaciones se suele caracterizar por el *decremento logarítmico de amortiguamiento*

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \qquad (90.9)$$

(véase la fórmula (58.9) del tomo 1º). Aquí $a(t)$ es la amplitud de la magnitud correspondiente (q, U ó I). Se recordará que el decremento logarítmico del amortiguamiento es recíproco del número de oscila-

ciones N_e que se realizan durante el tiempo en que la amplitud disminuye e veces:

$$\lambda = 1/N_e.$$

Sustituyendo en (90.9) β por su valor (90.3) y T por $2\pi/\omega$, obtenemos para λ la expresión siguiente:

$$\lambda = \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \qquad (90.10)$$

La frecuencia ω, y, por lo tanto, λ, se determinan por los parámetros del circuito L, C y R. De este modo, el decremento logarítmico del amortiguamiento es una característica del circuito.

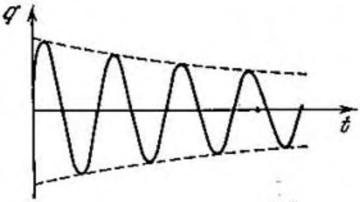


Fig. 90.1.

Si el amortiguamiento es pequeño ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) se puede suponer en (90.10) $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Entonces

$$\lambda \approx \frac{\pi R\sqrt{LC}}{L} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (90.11)$$

El circuito oscilante se suele caracterizar por su *factor de calidad* Q, que se define como magnitud inversamente proporcional al decremento logarítmico del amortiguamiento:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \qquad (90.12)$$

De (90.12) se sigue que el factor de calidad del circuito es tanto mayor cuanto mayor número de oscilaciones tienen tiempo de efectuarse antes de que la amplitud disminuya e veces.

En el caso de un amortiguamiento débil

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (90.13)$$

(véase (90.11)).

En el § 58 del tomo 1° se demostró que, si el amortiguamiento es débil, el factor de calidad de un sistema mecánico oscilante es igual, salvo un factor 2π, a la razón de la energía acumulada por el sistema en el instante dado, a la disminución de esta energía en un período

de las oscilaciones. La amplitud de la intensidad de la corriente en el circuito decrece según la ley $e^{-\beta t}$. La energía W, acumulada en el circuito, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la intensidad de la corriente (o al cuadrado de la amplitud de la tensión en el condensador); por consiguiente, W decrece de acuerdo con la ley $e^{-2\beta t}$. La disminución relativa de la energía en un período es

$$\frac{-\Delta W}{W}=\frac{W(t)-W(t+T)}{W(t)}=\frac{1-e^{-2\beta T}}{1}=1-e^{-2\lambda}.$$

Si el amortiguamiento es insignificante (es decir, a condición de que $\lambda \ll 1$) se puede suponer que, aproximadamente, $e^{-2\lambda}$ es igual a $1-2\lambda$:

$$\frac{-\Delta W}{W}=1-(1-2\lambda)=2\lambda.$$

Finalmente, sustituyendo en esta expresión λ por medio del factor Q, de acuerdo con la fórmula (90.12), y resolviendo respecto de Q la ecuación que se obtiene, resulta

$$Q=2\pi\frac{W}{-\Delta W}. \tag{90.14}$$

Para terminar indicaremos que cuando $R^2/4L^2 \geqslant 1/LC$, es decir, cuando $\beta^2 \geqslant \omega_0^2$, en vez de las oscilaciones se produce la descarga aperiódica del condensador. La resistencia del circuito, con la cual el proceso oscilatorio se transforma en aperiódico, se llama *crítica*. El valor de la resistencia crítica R_c se determina por la condición $R_c^2/4L^2 = 1/LC$, de donde

$$Q_c=2\sqrt{L/C}. \tag{90.15}$$

§ 91. Oscilaciones eléctricas forzadas

Para excitar oscilaciones forzadas hay que ejercer sobre el sistema una acción exterior variable periódicamente. En el caso de las oscilaciones eléctricas esto se puede conseguir intercalando en serie con los elementos del circuito una f.e.m. alterna o, rompiendo el circuito y suministrando a los contactos formados una tensión alterna

$$U = U_m \cos \omega t \tag{91.1}$$

(fig. 91.1). Esta tensión hay que añadirla a la f.e.m. de autoinducción. Como resultado la fórmula (90.1) toma la forma

$$IR=-\frac{q}{C}-L\frac{dI}{dt}+U_m\cos\omega t. \tag{91.2}$$

Haciendo transformaciones obtenemos la ecuación

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t. \tag{91.3}$$

Aquí ω_0^2 y β se determinan por las fórmulas (89.5) y (90.3).

La ecuación (91.3) coincide con la ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas forzadas (véase la fórmula (60.1) del tomo 1°). La solución particular de esta ecuación tiene la forma

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \tag{91.4}$$

donde

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

(véase la fórmula (60.9) del tomo 1°). La sustitución de los valores de ω_0^2 y β, da

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}}, \tag{91.5}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L}. \tag{91.6}$$

La solución general se obtiene si a la particular (91.4) se le añade la solución general de la correspondiente ecuación homogénea. Esta

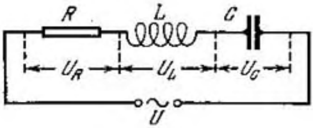


Fig. 91.1.

solución se obtuvo en el párrafo anterior (véase la fórmula (90.5)) ella contiene el factor exponencial $e^{-\beta t}$, por lo que pasado un tiempo suficiente se hace muy pequeña y puede despreciarse. Por consiguiente, las oscilaciones forzadas estables se describen por la función (91.4).

Tomando la diferencial respecto de t de la expresión (91.4), hallamos la intensidad de la corriente en el circuito para las oscilaciones estables:

$$I = -\omega q_m \operatorname{sen}(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2)$$

($I_m = \omega q_m$). Escribimos esta expresión en la forma [1])

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \tag{91.7}$$

donde $\varphi = \psi - \pi/2$ es el desfasaje entre la corriente y la tensión aplicada (véase (91.1)). De acuerdo con (91.6)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{91.8}$$

[1]) Hasta el final de este capítulo no nos encontraremos con el concepto de potencial. Por lo tanto, el designar con la letra σ el ángulo de fase no puede ocasionar confusiones.

De esta fórmula se deduce que la corriente se retarda en fase respecto de la tensión ($\varphi > 0$) cuando $\omega L > 1/\omega C$, y adelanta a la tensión ($\varphi < 0$) a condición de que $\omega L < 1/\omega C$. Según (91.5)

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \qquad (91.9)$$

Representamos la relación (91.2) en la forma

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \qquad (91.10)$$

El producto IR es igual a la tensión U_R en la resistencia óhmica; q/C, la tensión en el condensador U_C, y la expresión $L\,(dI/dt)$ determina la tensión en la inductancia U_L. Teniendo esto en cuenta se puede escribir

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \qquad (91.11)$$

De este modo, la suma de las tensiones en los distintos elementos del circuito es igual en cada instante a la tensión aplicada desde fuera (véase la fig. 91.1).

De acuerdo con (91.7)

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \qquad (91.12)$$

Dividiendo la expresión (91.4) por la capacidad, obtenemos la tensión en el condensador

$$U_C = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t - \psi) = U_{Cm}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (91.13)$$

Aquí

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \qquad (91.14)$$

(véase (91.9)). Multiplicando la derivada de la función (91.7) por L, conseguimos la tensión en la inductancia:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = U_{Lm}\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (91.15)$$

Aquí

$$U_{Lm} = \omega L I_m. \qquad (91.16)$$

La comparación de las fórmulas (91.7), (91.12), (91.13) y (91.15) muestra que la tensión en la capacidad tiene un retraso de fase de $\pi/2$ respecto de la intensidad de la corriente y la tensión en la inductancia adelanta la corriente en $\pi/2$. La tensión en la resistencia óhmica cambia en fase con la corriente. Las relaciones entre las fases se pueden representar de un modo muy intuitivo valiéndose del diagrama vectorial (véase el § 55 del tomo 1°). Se recordará que una oscilación armónica (o una función armónica) se puede dar por medio de un vector, cuya longitud sea igual a la amplitud de la

frecuencia dada, sino la razón de I_m a I_{mres} (es decir, a I_m de resonancia). Consideremos la anchura de la curva $\Delta\omega$ tomada a la altura 0,7 (a la relación de las amplitudes igual a 0,7 corresponde una relación de las potencias igual a $0{,}7^2 \approx 0{,}5$). Se puede demostrar que la razón de esta anchura a la frecuencia de resonancia es igual a la magnitud recíproca del factor de calidad del circuito:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \tag{91.20}$$

Recordaremos que las fórmulas (91.19) y (91.20) son correctas únicamente para valores grandes de Q, es decir, cuando el amortiguamiento de las oscilaciones libres en el circuito es pequeño.

El fenómeno de la resonancia se utiliza para separar de una tensión compleja la componente necesaria. Sea la tensión aplicada al circuito

$$U = U_{m1}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots$$

Ajustando el circuito a una de las frecuencias ω_1, ω_2, etc., (o sea, eligiendo convenientemente sus parámetros C y L), se puede obtener en el condensador una tensión Q veces mayor que el valor de la componente dada, mientras que la tensión que crean en dicho condensador las otras componentes será débil. Este proceso se efectúa, por ejemplo, cuando se sintoniza un receptor de radio con la longitud de onda necesaria.

§ 92. Corriente alterna

Las oscilaciones forzadas estables descritas en el párrafo precedente se pueden considerar como una corriente alterna, que pasa por un circuito con capacidad, inductancia y resistencia óhmica, condicionada por una tensión alterna

$$U = U_m \cos \omega t. \tag{92.1}$$

Según las fórmulas (91.7), (91.8) y (91.9) esta corriente varía de acuerdo con la ley

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi). \tag{92.2}$$

La amplitud de la corriente se determina por la amplitud de la tensión U_m, los parámetros C, L, R y la frecuencia ω:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{92.3}$$

La corriente tiene un retraso de fase, respecto de la tensión, igual al ángulo φ, que depende de los parámetros del circuito y de la fre-

cuencia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \qquad (92.4)$$

En el caso en que $\varphi < 0$, la corriente adelanta de hecho la tensión.

La expresión que figura en el denominador de la fórmula (92.3)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad (92.5)$$

recibe el nombre de *resistencia eléctrica aparente* o *impedancia*.

Si el circuito sólo tiene resistencia óhmica R, la ecuación de la ley de Ohm tiene la forma

$$IR = U_m \cos \omega t.$$

De aquí se sigue que, en este caso, la corriente cambia en fase con la tensión, y la amplitud de la intensidad de la corriente es

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

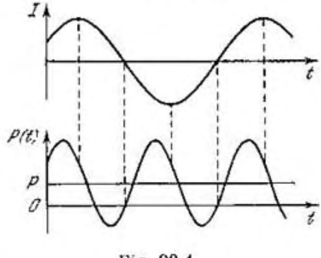


Fig. 92.1.

La comparación de esta expresión con (92.3) muestra que la sustitución del condensador por un trozo cortacircuitado no significa el paso a $C = 0$, sino a $C = \infty$.

Todo circuito real tiene valores finitos de R, L y C. En casos aislados algunos de estos parámetros son tales que su influencia sobre la corriente se puede despreciar. Supongamos que en el circuito se puede considerar R igual a cero y C igual a infinito. Entonces, de las fórmulas (92.3) y (92.4) se sigue que

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \qquad (92.6)$$

y $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ (respectivamente $\varphi = \pi/2$). La magnitud

$$X_L = \omega L \qquad (92.7)$$

se llama *reactancia inductiva* o simplemente *inductancia del circuito*. Si L se expresa en henrios y ω en s^{-1}, X_L vendrá expresada en ohmios. De (92.7) se deduce que la inductancia crece con la frecuencia ω. A la corriente continua ($\omega = 0$) la inductancia no le opone resistencia.

En la inductancia la corriente se retarda respecto de la tensión en $\pi/2$. Respectivamente, en la inductancia, la tensión adelanta la corriente en $\pi/2$ (véase la fig. 91.2).

Supongamos ahora que R y L pueden considerarse nulas. Entonces, según las fórmulas (92.3) y (92.4)

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}, \qquad (92.8)$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\infty$ (es decir, $\varphi = -\pi/2$) La magnitud

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (92.9)$$

se llama *reactancia capacitiva* o simplemente *capacitancia*. Si C se expresa en faradios y ω en s^{-1}, X_C vendrá expresada en ohmios. De (92.9) se sigue que la capacitancia disminuye con la frecuencia. Para la corriente continua $X_C = \infty$; esta corriente no puede pasar a través del condensador. Como $\varphi = -\pi/2$, la corriente que pasa por el condensador adelanta la tensión en $\pi/2$. Respectivamente, en el condensador la tensión se retarda respecto de la corriente en $\pi/2$ (véase la fig. 91.2).

Finalmente, supongamos que R puede considerarse nula. En este caso la fórmula (92.3) se transforma en

$$I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|}. \qquad (92.10)$$

La magnitud

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \qquad (92.11)$$

recibe el nombre de *reactancia*.

Las fórmulas (92.4) y (92.5) se pueden representar en la forma

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

De este modo, si los valores de las resistencias R y X se toman a lo largo de los catetos de un triángulo, la longitud de la hipotenusa será numéricamente igual a Z (véase la fig. 91.2).

Hallemos la potencia que se desprende en el circuito de corriente alterna. El valor instantáneo de la potencia es igual al producto de los valores instantáneos de la tensión y de la intensidad de la corriente:

$$P(t) = U(t)\,I(t) = U_m \cos\omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi). \qquad (92.12)$$

Aplicando la fórmula

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

puede dársele a la expresión (92.12) la forma

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \qquad (92.13)$$

Tiene interés práctico el valor medio respecto del tiempo de $P(t)$, que designaremos simplemente por P. Como el valor medio de $\cos(2\omega t - \varphi)$ es nulo,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi. \qquad (92.14)$$

De (92.13) se deduce que la potencia instantánea oscila alrededor del valor medio con una frecuencia dos veces mayor que la frecuencia de la corriente (fig. 92.1).

De acuerdo con la fórmula (92.4)

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{Z}. \qquad (92.15)$$

Sustituyendo este valor de $\cos\varphi$ en la fórmula (92.14) y teniendo en cuenta que $U_m/Z = I_m$, obtenemos

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \qquad (92.16)$$

Esta misma potencia desarrolla una corriente continua, cuya intensidad sea

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (92.17)$$

La magnitud (92.17) se denomina *valor eficaz de la intensidad de la corriente*. De un modo análogo, a la magnitud

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \qquad (92.18)$$

se le da el nombre de *valor eficaz de la tensión*.

La expresión de la potencia media valiéndose de los valores eficaces de la intensidad de la corriente y de la tensión, tiene la forma

$$P = UI\cos\varphi. \qquad (92.19)$$

El factor $\cos\varphi$ que figura en esta expresión se llama *factor de potencia*. En la técnica se tiende a que $\cos\varphi$ sea lo mayor posible. Si $\cos\varphi$ es pequeño, para que en el circuito se desprenda la potencia necesaria hay que hacer pasar por él una corriente de mayor intensidad, lo que acarrea un aumento de las pérdidas en los conductores de alimentación.

SEGUNDA PARTE

ONDAS

CAPÍTULO XIV

ONDAS ELÁSTÍCAS

§ 93. Propagación de las ondas en un medio elástico

Si en un lugar cualquiera de un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso) se excitan oscilaciones de sus partículas, como resultado de la interacción entre ellas esta oscilación se propaga en el medio, de partícula en partícula, con cierta velocidad v. El proceso de propagación de las ondas en el espacio se llama *onda*.

Las partículas del medio en que se propaga la onda no son arrastradas por ésta a un movimiento de traslación, sino que solamente oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio. En dependencia de la dirección de las oscilaciones de las partículas respecto de la dirección en que se propaga la onda, se distinguen dos tipos de ondas: *longitudinales* y *transversales*. En una onda longitudinal las partículas del medio oscilan a lo largo de la dirección en que se propaga la onda. En una onda transversal las partículas del medio oscilan en direcciones perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda. Las ondas elásticas transversales sólo se pueden producir en un medio que posea resistencia al cizallamiento. Por eso en los medios líquidos y gaseosos sólo se pueden producir ondas longitudinales. En un medio sólido se pueden producir tanto ondas longitudinales como transversales.

En la fig. 93.1 se muestra el movimiento de las partículas cuando por el medio se propaga una onda transversal. Con los números *1*, *2*, etc., se designan las partículas que se encuentran entre sí a una distancia igual a $^1/_4\, vT$, o sea, a la distancia que recorre la onda en un cuarto de período de las oscilaciones que efectúan las partículas. En el instante tomado como cero, la onda, al propagarse a lo largo del eje de izquierda a derecha, alcanza a la partícula *1*, por lo que ésta empieza a desplazarse de la posición de equilibrio hacia arriba, arrastrando tras sí a las partículas siguientes. Al cabo de un cuarto de período la partícula *1* llega a la posición límite superior y al mismo tiempo comienza a desplazarse de la posición de equilibrio la partícula *2*. Un cuarto de período después, la primera partícula pasará por la posición de equilibrio, moviéndose hacia abajo; la

segunda partícula llegará a la posición límite superior, y la tercera partícula iniciará su desplazamiento hacia arriba desde la posición de equilibrio. En el instante igual a T, la primera partícula termina un ciclo completo de oscilaciones y se encuentra en el mismo estado

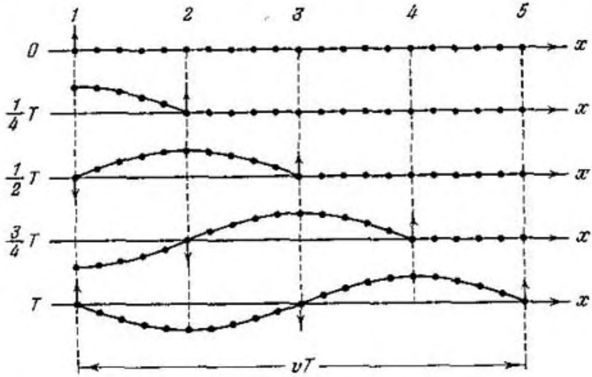


Fig. 93.1.

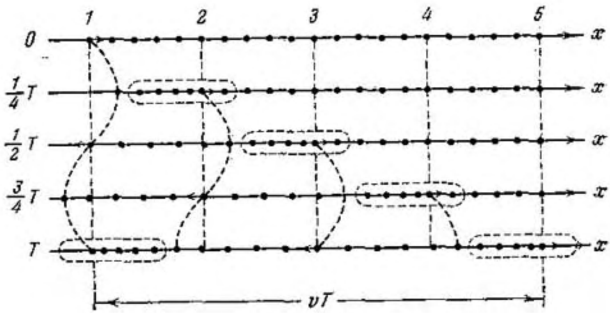


Fig. 93.2.

de movimiento en que estaba en el instante inicial. La onda, en el instante T, después de haber recorrido el espacio vT, alcanza a la partícula *5*.

La fig. 93.2 representa el movimiento de las partículas cuando por el medio se propaga una onda longitudinal. Todos los razonamientos tocantes al comportamiento de las partículas en la onda trans-

versal se refieren también a este caso, sustituyendo los desplazamientos hacia arriba y hacia abajo por desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda. Por la figura se ve que, al propagarse la onda longitudinal, se crean en el medio condensaciones y enrarecimientos alternativos de las partículas (los lugares en que se condensan las partículas están cercados con línea de trazos en la figura) que se trasladan en el sentido de la propagación de la onda con la velocidad v.

En las figs. 93.1 y 93.2 se muestran las oscilaciones de las partículas, cuyas posiciones de equilibrio se encuentran en el eje x. En realidad oscilan no sólo estas partículas, sino el conjunto de todas

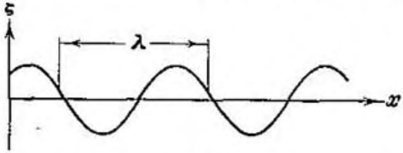


Fig. 93.3.

las comprendidas en un volumen determinado. Al propagarse desde la fuente de las oscilaciones, el proceso ondulatorio abarca cada vez nuevas partes del espacio. El lugar geométrico de los puntos hasta los cuales llegan las oscilaciones en un instante t se llama *frente de onda*. El frente de onda es la superficie que separa la parte del espacio ya incorporada al proceso ondulatorio, de la región, en la cual aún no se han producido oscilaciones.

El lugar geométrico de los puntos que oscilan en la misma fase se llama *superficie de onda*. Una superficie de onda se puede trazar por cualquier punto del espacio abarcado por el proceso ondulatorio. Por consiguiente, existe un conjunto infinito de superficies de onda, mientras que en cada instante sólo hay un frente de onda. Las superficies de onda permanecen en reposo (pasan por las posiciones de equilibrio de las partículas que oscilan en la misma fase). El frente de onda se traslada continuamente.

Las superficies de onda pueden tener cualquier forma. En los casos más simples tienen la forma de un plano o de una esfera. Respectivamente, en estos casos se dice que la onda es *plana* o *esférica*. En una onda plana las superficies de onda son un conjunto de planos paralelos entre sí; en la onda esférica, un conjunto de esferas concéntricas.

Supongamos que una onda plana se propaga a lo largo del eje x. Entonces todos los puntos del medio, cuyas posiciones de equilibrio tengan la misma coordenada x (pero distintos valores de las coordenadas y y z), oscilarán en la misma fase. La fig. 93.3 representa la curva

que da el desplazamiento ξ de la posición de equilibrio de los puntos con distintas x en cierto instante. Esta figura no debe interpretarse como la representación visible de la onda. En ella se representa la gráfica de la función $\xi(x, t)$ para cierto instante t determinado. Una gráfica como ésta se puede construir tanto para una onda longitudinal como para una onda transversal.

La distancia λ a que se propaga la onda en un tiempo igual al período de las oscilaciones de las partículas del medio se denomina *longitud de onda*. Es evidente que

$$\lambda = vT, \tag{93.1}$$

donde v es la velocidad de la onda, y T, el período de las oscilaciones. La longitud de onda se puede definir también como la distancia entre los puntos más próximos del medio que oscilan con una diferencia de fase igual a 2π (véase la fig. 93.3).

Sustituyendo en la relación (93.1) T por $1/\nu$ (ν es la frecuencia de las oscilaciones), obtenemos

$$\lambda\nu = v. \tag{93.2}$$

A esta fórmula se puede llegar también por medio de los razonamientos siguientes. En un segundo la fuente de ondas realiza ν oscilaciones, originando en el medio una «cresta» y un «valle» de onda en cada oscilación. En el instante en que la fuente vaya a efectuar la ν-ésima oscilación, la primera «cresta» habrá recorrido el espacio v. Por consiguiente, las ν «crestas» y «valles» de la onda deben caber en la longitud v.

§ 94. Ecuaciones de las ondas plana y esférica

Se llama ecuación de onda la expresión que da la elongación de la partícula que oscila como función de sus coordenadas x, y, z y del tiempo t:

$$\xi = \xi(x, y, z; t) \tag{94.1}$$

(se tiene en cuenta que son las coordenadas de la posición en equilibrio de la partícula). Esta función debe ser periódica tanto respecto del tiempo t como respecto de las coordenadas x, y, z. La periodicidad respecto del tiempo se infiere de que ξ describe las oscilaciones de una partícula, cuyas coordenadas son x, y, z. La periodicidad respecto de las coordenadas se sigue de que los puntos que se encuentran uno de otro a la distancia λ oscilan del mismo modo.

Hallemos la forma de la función ξ en el caso de una onda plana, suponiendo que las oscilaciones tienen carácter armónico. Para simplificar dirigiremos los ejes de coordenadas de tal modo que el eje x coincida con la dirección en que se propaga la onda. Entonces las superficies de onda serán perpendiculares al eje x y, como todos

los puntos de una superficie de onda oscilan lo mismo, la elongación ξ dependerá únicamente de x y de t: $\xi = \xi(x, t)$. Supongamos que las oscilaciones de los puntos que se encuentran en el plano $x = 0$ (fig. 94.1) tienen la forma

$$\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Hallemos la forma de las oscilaciones de los puntos de un plano correspondiente a un valor arbitrario de x. Para recorrer el camino desde el plano $x = 0$ hasta este plano necesitará la onda el tiempo $\tau = x/v$ (v es la velocidad de propagación de la onda). Por lo tanto, las oscilaciones de las partículas que se encuentran en el plano x tendrán un retraso de tiempo τ respecto de las oscilaciones de las partículas del plano $x = 0$, es decir, tendrán la forma

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega(t-\tau)+\alpha] = a \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right].$$

Así, la ecuación de una onda plana (tanto longitudinal como transversal) que se propaga en la dirección del eje x tiene la forma siguiente:

$$\xi = a \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]. \quad (94.2)$$

La magnitud a es la amplitud de la onda. La fase inicial α de la onda se determina por la elección de los puntos de referencia x y t. Si sólo se considera una onda, los puntos de referencia de tiempo y de las coordenadas se suelen elegir de tal modo que sea igual a cero. Cuando se consideran simultáneamente varias ondas, por lo general no se consigue hacer que para todas ellas las fases iniciales sean iguales a cero.

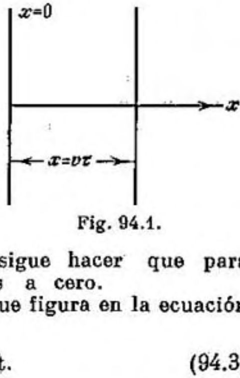


Fig. 94.1.

Fijemos un valor cualquiera de la fase, que figura en la ecuación (94.2), suponiendo que

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha = \text{const}. \quad (94.3)$$

Esta expresión determina la relación entre el tiempo t y el punto x, en el cual la fase tiene el valor fijado. El valor de dx/dt que se infiere de ella da la velocidad con que se traslada el valor dado de la fase. Tomando la diferencial de la expresión (94.3), obtenemos

$$dt - \frac{1}{v}\,dx = 0,$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (94.4)$$

De este modo, la velocidad v de propagación de la onda en la ecuación (94.2) es la velocidad con que se traslada la fase, por lo que se le da el nombre de *velocidad de fase*.

Según (94.4), $dx/dt > 0$, por consiguiente, la ecuación (94.2) describe una onda que se propaga en el sentido en que x aumenta. La onda que se propaga en el sentido opuesto se describe por la ecuación

$$\xi = a\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \tag{94.5}$$

Efectivamente, igualando a una constante la fase de la onda (94.5) y tomando la diferencial de la igualdad obtenida, llegamos a la relación

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

de la que se sigue que la onda (94.5) se propaga en el sentido en que x disminuye.

A la ecuación de la onda plana se le puede dar una forma simétrica respecto de x y t. Para esto se introduce la magnitud

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{94.6}$$

que se denomina *número de onda*. Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión (94.6) por la frecuencia ν, se puede representar el número de onda en la forma

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{94.7}$$

(véase la fórmula (93.2)). Abriendo paréntesis en (94.2) y teniendo en cuenta (94.7), se llega a la siguiente ecuación de la onda plana que se propaga en el sentido del eje x:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha). \tag{94.8}$$

La ecuación de la onda que se propaga en el sentido en que x disminuye se diferencia de la (94.8) únicamente en el signo del término kx.

Al deducir la fórmula (94.8) hemos supuesto que la amplitud de las oscilaciones no depende de x. Para la onda plana esto se observa en el caso en que la energía de la onda no es absorbida por el medio. Cuando la onda se propaga en un medio que absorbe la energía, su intensidad disminuye paulatinamente a medida que dicha onda se aleja de la fuente de las oscilaciones, es decir, se observa un amortiguamiento de la onda. La experiencia demuestra que en un medio homogéneo este amortiguamiento transcurre según la ley exponencial $a = a_0 e^{-\gamma x}$ (compárese con la disminución con el tiempo de la amplitud de las oscilaciones amortiguadas; véase la fórmula (58.7) del tomo 1°). Respectivamente, la ecuación de la onda plana tiene

la forma siguiente:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos (\omega t - kx + \alpha) \tag{94.9}$$

(a_0 es la amplitud en los puntos del plano $x = 0$).

Hallemos ahora la ecuación de la onda esférica. Toda fuente real de ondas tiene cierta extensión. Pero, si nos limitamos a considerar las ondas a distancias de la fuente mucho mayores que las dimensiones de ésta, la fuente puede considerarse *puntual*. En un medio isótropo y homogéneo, la onda engendrada por una fuente puntual será esférica. Supongamos que la fase de las oscilaciones de la fuente es igual a $(\omega t + \alpha)$. Entonces los puntos que se encuentran en una superficie de onda de radio r oscilarán en la fase

$$\omega (t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(para recorrer el espacio r la onda necesita el tiempo $\tau = r/v$). La amplitud de las oscilaciones en este caso, incluso si la energía de la onda no es absorbida por el medio, no permanece constante, sino que disminuye con la distancia a la fuente según la ley $1/r$ (véase el § 98). Por lo tanto, la ecuación de la onda esférica tiene la forma

$$\xi = \frac{a}{r} \cos (\omega t - kr + \alpha), \tag{94.10}$$

donde a es una magnitud constante numéricamente igual a la amplitud a una distancia de la fuente igual a la unidad. La dimensión de a es igual a la de una magnitud oscilante multiplicada por la dimensión de la longitud. Para un medio absorbente a la fórmula (94.10) hay que añadirle el factor $e^{-\gamma r}$.

Recordaremos que, en virtud de las suposiciones hechas, la ecuación (94.10) sólo es correcta para valores de r mucho mayores que las dimensiones de la fuente. Si r tiende a cero, la expresión de la amplitud se transforma en infinito. Este resultado absurdo se explica por la inaplicabilidad de esta ecuación cuando los valores de r son pequeños.

§ 95. Ecuación de la onda plana que se propaga en una dirección arbitraria

Vamos a hallar la ecuación de una onda plana que se propaga en una dirección que forme con los ejes de coordenadas x, y, z los ángulos α, β, γ. Supongamos que las oscilaciones en el plano que pasa por el origen de coordenadas (fig. 95.1) tienen la forma

$$\xi_0 = a \cos (\omega t + \alpha). \tag{95.1}$$

Tomemos una superficie de onda (un plano) que se encuentre del origen de coordenadas a la distancia l. Las oscilaciones en este plano se retrasarán respecto a las oscilaciones (95.1) en el tiempo

$\tau = l/v$:

$$\xi = a\cos\left[\omega\left(t-\frac{l}{v}\right)+\alpha\right] = a\cos(\omega t - kl + \alpha) \qquad (95.2)$$

($k = \omega/v$; véase la fórmula (94.7)).

Expresemos l por medio del radio vector de los puntos de la superficie considerada. Para esto introducimos el vector unitario **n** normal a la superficie de onda. En la fig. 95.1 se ve que el producto escalar de **n** por el radio vector **r** de cualquiera de los puntos de la superficie es igual a l:

$$\mathbf{nr} = r\cos\varphi = l.$$

Sustituimos en (95.2) l por **nr**:

$$\xi = a\cos(\omega t - k\mathbf{nr} + \alpha). \qquad (95.3)$$

El vector

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \qquad (95.4)$$

cuyo módulo es igual al número de onda $k = 2\pi/\lambda$, tiene la dirección de la normal a la superficie de onda y se llama *vector de onda*. De este modo, la ecuación (95.3) se puede representar en la forma

$$\xi(\mathbf{r},\ t) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha). \qquad (95.5)$$

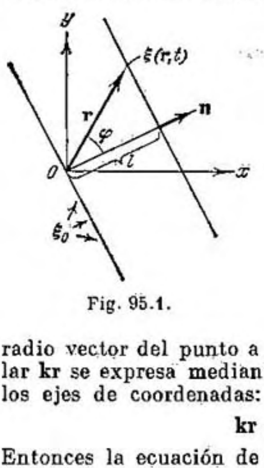


Fig. 95.1.

Hemos obtenido la ecuación de la onda plana no amortiguada que se propaga en el sentido determnado por el vector de onda **k**. Si la onda es amortiguada hay que añadirle a esta ecuación el factor $e^{-\gamma l} = e^{-\gamma \mathbf{nr}}$.

La función (95.5) da la elongación de un punto de radio vector **r** en el instante t (se recordará que **r** determina la posición de equilibrio del punto). Para pasar del radio vector del punto a sus coordenadas x, y, z, el producto escalar **kr** se expresa mediante los componentes del vector que siguen los ejes de coordenadas:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Entonces la ecuación de la onda plana toma la forma

$$\xi(x,\ y,\ z;\ t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \qquad (95.6)$$

Aquí

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha,\quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta,\quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma. \qquad (95.7)$$

La función (95.6) da la elongación de un punto de coordenadas x, y, z en el instante t. Cuando **n** coincide con $\mathbf{e}_x$, $k_x = k$, $k_y = k_z =$

$= 0$ y la ecuación (95.6) se transforma en la (94.8). Es muy conveniente escribir la ecuación de la onda plana en la forma

$$\xi = \text{Re}\, a e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)}. \quad (95.8)$$

El signo Re se omite de ordinario, sobreentendiéndose que sólo se toma la parte real de la expresión correspondiente. Además, se introduce el número complejo

$$\hat{a} = a e^{i\alpha} \quad (95.9)$$

llamado *amplitud compleja*. El módulo de este número da la amplitud, y el argumento, la fase inicial de la onda.

Así, la ecuación de la onda plana no amortiguada se puede representar en la forma

$$\xi = \hat{a} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}. \quad (95.10)$$

La ventaja de esta escritura se explica más adelante.

§ 96. Ecuación de onda

La ecuación de una onda cualquiera es solución de la ecuación diferencial llamada *ecuación de onda*. Para establecer la forma de la ecuación de onda comparamos las segundas derivadas parciales, respecto de las coordenadas y del tiempo, de la función (95.6) que describe la onda plana. Tomando dos veces la diferencial de esta función respecto de cada una de las variables, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_z^2 \xi.$$

La suma de las coordenadas respecto de las coordenadas da

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\, \xi = -k^2 \xi. \quad (96.1)$$

Comparando esta suma con la derivada respecto del tiempo y sustituyendo k^2/ω^2 por $1/v^2$ (véase la fórmula (94.7)), se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (96.2)$$

Esta es la ecuación de onda. Se puede escribir también en la forma

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (96.3)$$

donde Δ es el operador de Laplace (véase la fórmula (11.37)).

Es fácil convencerse de que la ecuación de onda la satisface no sólo la función (95.6), sino cualquier función de la forma

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \qquad (96.4)$$

En efecto, designando por ζ la expresión que figura entre paréntesis en el segundo miembro de (96.4), tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = f'\omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega\frac{df'}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \omega^2 f''. \qquad (96.5)$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f'', \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f'', \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \qquad (96.6)$$

La sustitución de las expresiones (96.5) y (96.6) en la ecuación (96.2) conduce a la conclusión de que la función (96.4) satisface la ecuación de onda si se supone $v = \omega/k$.

Toda función que satisfaga a una ecuación de la forma (96.2) describe cierta onda, y la raíz cuadrada de la magnitud recíproca del coeficiente de $\partial^2\xi/\partial t^2$ da la velocidad de fase de dicha onda.

Para una onda plana que se propague a lo largo del eje x la ecuación de onda tiene la forma

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (96.7)$$

§ 97. Velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido

Supongamos que en el sentido del eje x se propaga una onda plana longitudinal. Separemos en el medio un volumen cilíndrico, cuya base tenga el área S y cuya altura sea Δx (fig. 97.1). Las elongaciones ξ de las partículas que tienen distinta x resultan ser diferentes en cada instante (véase la fig. 93.3, en la cual se representa ξ en función de x). Si la base del cilindro de coordenada x tiene en cierto instante una elongación ξ, la elongación de la base de coordenada $x + \Delta x$ será $\xi + \Delta\xi$. Por eso el volumen considerado se deforma, recibiendo un alargamiento $\Delta\xi$ ($\Delta\xi$ es una magnitud algebraica; $\Delta\xi < 0$ corresponde a la compresión del cilindro) o un alargamiento relativo $\Delta\xi/\Delta x$. La magnitud $\Delta\xi/\Delta x$ da la deformación media del cilindro. En virtud de que ξ varía al variar x no según una ley lineal, la deformación verdadera en distintas secciones del cilindro será diferente. Para obtener la deformación ε en la sección x hay que hacer

que Δx tienda a cero. Así

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{97.1}$$

(se ha tomado el símbolo de derivada parcial porque ξ no sólo depende de x, sino también de t).

La existencia de la deformación por tracción evidencia que hay una tensión normal σ, que en las deformaciones pequeñas es proporcional a la magnitud de la deformación. Según la fórmula (14.6) del tomo 1º

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{97.2}$$

(E es el módulo de Young del medio). Advertimos que la deformación relativa $\partial\xi/\partial x$ y, por consiguiente, el esfuerzo σ en el instante fijado, dependen de x (fig. 97.2). Allí donde las elongaciones de las partículas son máximas, la deformación y el esfuerzo son nulos. En los sitios donde las partículas pasan por la posición de equilibrio, la deformación y el esfuerzo alcanzan sus valores máximos, alternándose unas con otras las deformaciones positivas y negativas (es decir, por tracción y compresión). De acuerdo con esto, como ya se indicó en el § 93, la onda longitudinal consta de enrarecimientos y condensaciones alternativas del medio.

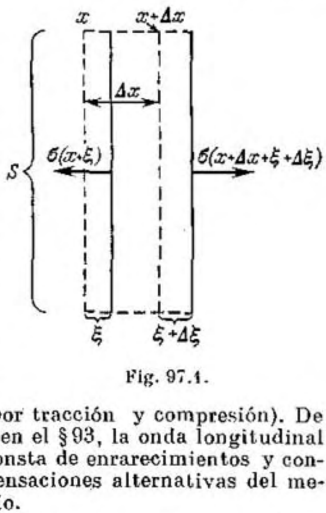


Fig. 97.1.

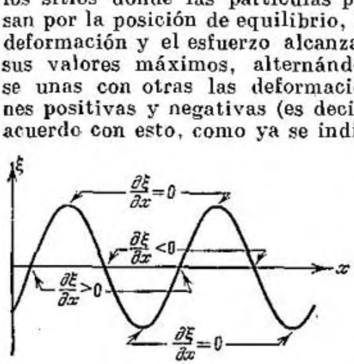


Fig. 97.2.

Recurramos otra vez al volumen cilíndrico representado en la fig. 97.1 y escribamos para él la ecuación del movimiento. Suponiendo que Δx es muy pequeño, la proyección de la aceleración sobre el eje x puede considerarse que tiene el mismo valor para todos los puntos del cilindro y que es igual a $d^2\xi/dt^2$. La masa del cilindro es $\rho S\ \Delta x$, siendo ρ la densidad del medio no deformado. La proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre el cilindro es igual al producto del área S de la base del cilindro por la diferencia entre los esfuerzos

normales en las secciones $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$ y $(x + \xi)$:

$$F_x = SE\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\xi}\right]. \tag{97.3}$$

El valor de la derivada $\partial\xi/\partial x$ en la sección $x + \delta$ cuando los δ son pequeños se puede representar con gran exactitud en la forma

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\delta} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\right]_x \delta = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\delta, \tag{97.4}$$

donde por $\partial^2\xi/\partial x^2$ se entiende el valor de la segunda derivada parcial de ξ respecto de x en la sección x.

En vista de la pequeñez de las magnitudes Δx, ξ y $\Delta\xi$, hacemos en la expresión (97.3) la transformación (97.4):

$$F_x = SE\left\{\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,(\Delta x + \xi + \Delta\xi)\right] - \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\xi\right]\right\} =$$

$$= SE\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,(\Delta x + \Delta\xi) \approx SE\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\Delta x \tag{97.5}$$

(el alargamiento relativo $\partial\xi/\partial x$ en las deformaciones elásticas suele ser mucho menor que la unidad. Por eso $\Delta\xi \ll \Delta x$, de manera que el sumando $\Delta\xi$ se puede despreciar en la suma $(\Delta x + \Delta\xi)$).

Sustituyendo los valores hallados de la masa, de la aceleración y de la fuerza en la ecuación de la segunda ley de Newton, obtenemos

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

Finalmente simplificando por $S\,\Delta x$, llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{97.6}$$

que es la ecuación de onda escrita para el caso en que ξ no depende de y ni de z. La comparación de las ecuaciones (9.67) y (97.6) da que

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{97.7}$$

De este modo la velocidad de fase de las ondas elásticas longitudinales es igual a la raíz cuadrada del módulo de Young dividido por la densidad del medio.

Un cálculo análogo para las ondas transversales lleva a la expresión

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{97.8}$$

donde G es el módulo de cizallamiento.

§ 98. Energía de una onda elástica

Sea un medio en el cual se propaga, en el sentido del eje x, una onda longitudinal plana

$$\xi = a \cos (\omega t - kx + \alpha). \tag{98.1}$$

Separemos en este medio un volumen elemental ΔV tan pequeño que en todos sus puntos se puedan considerar la velocidad del movimiento y la deformación respectivamente iguales entre sí y a $\partial\xi/\partial t$ y $\partial\xi/\partial x$.

El volumen separado por nosotros tiene la energía cinética

$$\Delta W_c = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V \tag{98.2}$$

($\rho\, \Delta V$ es la masa de dicho volumen y $\partial\xi/\partial t$, su velocidad).

Según la fórmula (25.4) del tomo 1°, el volumen que consideramos posee también la energía potencial de deformación elástica

$$\Delta W_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$$

($\varepsilon = \partial\xi/\partial x$ es el alargamiento relativo del cilindro, y E, el módulo de Young del medio). De acuerdo con (97.7) sustituimos el módulo de Young por ρv^2 (ρ es la densidad del medio, y v, la velocidad de fase de la onda). Entonces la expresión de la energía potencial del volumen ΔV toma la forma

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V. \tag{98.3}$$

La suma de las expresiones (98.2) y (98.3) da la energía total

$$\Delta W = \Delta W_c + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \right] \Delta V.$$

Dividiendo esta energía por el volumen ΔV, en el cual está contenida, se obtiene la densidad de la energía

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \right]. \tag{98.4}$$

La derivación de la ecuación (98.1) una vez respecto de t y otra respecto de x, da

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -a\omega \operatorname{sen} (\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = ka \operatorname{sen} (\omega t - kx + \alpha).$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (98.4) y tomando en consideración que $k^2 v^2 = \omega^2$, obtenemos

$$w = \rho a^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 (\omega t - kx + \alpha). \tag{98.5}$$

En el caso de una onda transversal se obtiene para la densidad de la energía esta misma expresión.

De (98.5) se sigue que la densidad de la energía en cada instante es distinta en diferentes puntos. En un mismo punto la densidad de la energía varía con el tiempo según la ley del cuadrado del seno. El valor medio del cuadrado del seno es igual a 1/2. Respectivamente, el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad de la energía en cada punto del medio es

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2. \tag{98.6}$$

La densidad de la energía (98.5) y su valor medio (98.6) son proporcionales a la densidad del medio ρ, al cuadrado de la frecuencia ω y al cuadrado de la amplitud de la onda a. Semejante dependencia tiene lugar no sólo en la onda plana no amortiguada, sino también en otros tipos de onda (plana amortiguada, esférica, etc.).

Así, el medio en que se propaga una onda tiene una reserva adicional de energía. Esta energía es llevada desde la fuente de las oscilaciones a los distintos puntos del medio por la onda misma; por consiguiente, la onda transporta consigo energía. La cantidad de energía que transporta la onda a través de cierta superficie en la unidad de tiempo, se llama *flujo de energía* a través de dicha superficie. Si a través de la superficie dada se transporta durante el tiempo dt la energía dW, el flujo de energía Φ es

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \tag{98.7}$$

El flujo de energía es una magnitud escalar, cuya dimensión es igual a la de la energía dividida por la dimensión del tiempo, es decir, coincide con la dimensión de la potencia. De acuerdo con esto Φ se mide en vatios, erg/s, etc.

El flujo de energía puede tener distinta intensidad en diferentes puntos del medio. Para caracterizar la corriente de energía en distintos puntos del espacio se introduce una magnitud vectorial llamada *densidad del flujo de energía*. Esta magnitud es numéricamente igual al flujo de energía a través de una superficie unidad, situada en el punto dado perpendicularmente a la dirección en que es transportada la energía. El sentido del vector densidad del flujo de energía coincide con el del transporte de la energía.

Supongamos que a través de la superficie $\Delta S_\perp$, perpendicular a la dirección en que se propaga la onda, es transportada en el tiempo Δt la energía ΔW. Entonces la densidad del flujo de energía será

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_\perp} = \frac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t} \tag{98.8}$$

(véase (98.7)). A través de la superficie $\Delta S_\perp$ (fig. 98.1) será transportada en el tiempo Δt la energía ΔW contenida en el volumen del cilindro de base $\Delta S_\perp$ y altura $v\,\Delta t$ (v es la velocidad de fase de la onda).

Si las dimensiones de este cilindro son suficientemente pequeñas (a expensas de la pequeñez de $\Delta S_\perp$ y Δt) para que la densidad de la energía se pueda considerar igual en todos los puntos del cilindro, ΔW se puede hallar como el producto de la densidad de la energía w por el volumen del cilindro, igual a $\Delta S_\perp v\, \Delta t$:

$$\Delta W = w\, \Delta S_\perp v\, \Delta t.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (98.8), obtenemos para la densidad del flujo de energía

$$j = wv. \tag{98.9}$$

Finalmente, introduciendo el vector $\mathbf{v}$, cuyo módulo es igual a la velocidad de fase de la onda y cuyo sentido coincide con el de propagación de la onda (y con el de transporte de la energía), se puede escribir

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \tag{98.10}$$

Hemos obtenido la expresión del vector densidad del flujo de energía. Este vector lo introdujo por vez primera el eminente físico

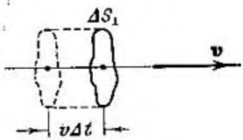


Fig. 98.1.

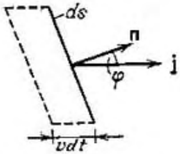


Fig. 98.2.

ruso N.A. Úmov y se llama *vector de Úmov*. El vector (98.10), lo mismo que la densidad de la energía w, es distinto en diferentes puntos del espacio y en un punto dado varía con el tiempo según la ley del cuadrado del seno. Su valor medio es

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle w \rangle\, \mathbf{v} = \frac{1}{2}\, \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v} \tag{98.11}$$

(véase (98.6)). La expresión (98.11), lo mismo que la (98.6), es correcta para cualquier tipo de onda (esférica, amortiguada, etc.).

Advertimos que cuando se habla de *intensidad de la onda* en un punto dado se entiende por ello el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía transportado por ella.

Conociendo $\mathbf{j}$ en todos los puntos de una superficie arbitraria S, se puede calcular el flujo de energía a través de esta superficie. Con este fin se divide dicha superficie en partes elementales dS. En el tiempo dt a través de una superficie dS pasa la energía dW contendia en el cilindro inclinado que representa la fig. 98.2. El volumen de

este cilindro es $dV = v\,dt\,dS\cos\varphi$. En él está contenida la energía $dW = w\,dV = wv\,dt\,dS\cos\varphi$ (w es el valor instantáneo de la densidad de la energía en el sitio en que se encuentra la superficie dS). Teniendo en cuenta que

$$wv\,dS\cos\varphi = j\,dS\cos\varphi = \mathbf{j}\,d\mathbf{S}$$

($d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$; véase la fig. 98.2) se puede escribir: $dW = \mathbf{j}\,d\mathbf{S}\,dt$. De aquí se obtiene para el flujo de energía $d\Phi$ a través de la superficie dS la fórmula

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \mathbf{j}\,d\mathbf{S} \qquad (98.12)$$

(compárese con la fórmula (11.5)). El flujo de energía a través de la superficie es igual a la suma de los flujos elementales (98.12):

$$\Phi = \int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}. \qquad (98.13)$$

De acuerdo con (11.7) se puede decir que el flujo de energía es igual al flujo del vector $\mathbf{j}$ a través de la superficie S.

Sustituyendo en la fórmula (98.13) el vector $\mathbf{j}$ por su valor medio respecto del tiempo, obtenemos el valor medio de Φ:

$$\langle\Phi\rangle = \int_S \langle\mathbf{j}\rangle\,d\mathbf{S}. \qquad (98.14)$$

Calculemos el valor medio del flujo de energía, a través de una superficie de onda arbitraria, de una onda esférica no amortiguada. En cada punto de esta superficie los vectores $\mathbf{j}$ y $d\mathbf{S}$ coinciden en dirección. Además, el módulo del vector $\mathbf{j}$ es igual para todos los puntos de la superficie. Por lo tanto,

$$\langle\Phi\rangle = \int_S \langle j\rangle\,dS = \langle j\rangle\,S = \langle j\rangle\,4\pi r^2$$

(r es el radio de la superficie de onda). Según (98.11), $\langle j\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 v$. De este modo,

$$\langle\Phi\rangle = 2\pi\rho\omega^2 v a_r^2 r^2$$

(a_r es la amplitud de la onda a la distancia r de la fuente). Como la energía de la onda no es absorbida por el medio, el flujo de energía medio a través de una esfera de radio cualquiera debe tener el mismo valor, es decir, debe cumplirse la condición

$$a_r^2 r^2 = \text{const.}$$

De aquí se deduce que la amplitud a_r de una onda esférica no amortiguada es inversamente proporcional a la distancia r hasta la fuente de la onda (véase la fórmula (94.10)). Respectivamente, la densidad

media del flujo de energía $\langle j \rangle$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta la fuente.

En el caso de una onda plana amortiguada, la amplitud disminuye con la distancia según la ley $a = a_0 e^{-\gamma x}$ (véase la fórmula (94.9)). Respectivamente, la densidad media del flujo de energía (es decir, la intensidad de la onda) disminuye según la ley

$$j = j_0 e^{-\varkappa x}. \tag{98.15}$$

Aquí $\varkappa = 2\gamma$ es la magnitud denominada *coeficiente de absorción de la onda*. Este coeficiente tiene dimensión recíproca a la de la longitud. Es fácil comprender que la magnitud recíproca de $\varkappa$ es igual a la distancia, a la cual la intensidad de la onda disminuye e veces.

§ 99. Ondas estacionarias

Si en un medio se propagan simultáneamente varias ondas, las oscilaciones de las partículas del medio resultan ser la suma geométrica de las oscilaciones que efectuarían dichas partículas si cada una de las ondas se propagara separadamente. Por lo tanto, las ondas simplemente se superponen unas a otras sin perturbarse entre sí. Está afirmación se conoce con el nombre de *principio de superposición de las ondas*.

En el caso en que las oscilaciones condicionadas por las ondas aisladas tienen en cada uno de los puntos del medio una diferencia de fase constante, las ondas se llaman *coherentes* (una definición más rigurosa de la coherencia se dará en el § 120). Cuando se componen ondas coherentes se produce el fenómeno *de la interferencia*, que consiste en que las oscilaciones se refuerzan entre sí en unos puntos y se debilitan en otros.

Un caso muy importante de interferencia se observa cuando se superponen dos ondas planas de igual amplitud que avanzan la una al encuentro de la otra. El proceso ondulatorio que se produce como resultado de esto recibe el nombre de *onda estacionaria*. En la práctica las ondas estacionarias se producen cuando las ondas se reflejan en un obstáculo. La onda que incide sobre el obstáculo y la onda reflejada que corre a su encuentro se superponen una a otra y dan una onda estacionaria.

Escribamos las ecuaciones de dos ondas planas que se propaguen a lo largo del eje x en sentidos contrarios:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Sumando estas ecuaciones y transformando el resultado según la fórmula para la suma de cosenos, se obtiene

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \tag{99.1}$$

La ecuación (99.1) es la ecuación de la onda estacionaria. Para simplificarla elegimos el punto de referencia de x de tal modo que la diferencia $\alpha_2 - \alpha_1$ sea igual a cero y el punto de referencia de t, de manera que resulte igual a cero la suma $\alpha_1 + \alpha_2$. Además, sustituimos el número de onda k por el valor $2\pi/\lambda$. Entonces la ecuación (99.1) toma la forma

$$\xi = \left(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \tag{99.2}$$

Por (99.2) se ve que en cada punto de la onda estacionaria se producen oscilaciones de la misma frecuencia que la de las ondas que se encuentran, y cuya amplitud depende de x:

$$\text{amplitud} = \left|2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right|.$$

En los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{99.3}$$

la amplitud de las oscilaciones alcanza su valor máximo. Estos punots se llaman *vientres* de la onda estacionaria. De (99.3) se obtienen los valores de las coordenadas de los vientres:

$$x_{\text{vient}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{99.4}$$

Debe tenerse en cuenta que un vientre no es un punto único, sino un plano, cuyos puntos tienen el valor de la coordenada x determinado por la fórmula (99.4).

En los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

la amplitud de las oscilaciones es nula. Estos puntos se denominan *nodos* de la onda estacionaria. Los puntos del medio que se encuentran en los nodos no oscilan. Las coordenadas de los nodos tienen los valores

$$x_{\text{nod}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{99.5}$$

Un nodo, lo mismo que un vientre, no es un punto, sino un plano cuyos puntos tienen el valor de la coordenada x definida por la fórmula (99.5).

De las fórmulas (99.4) y (99.5) se sigue que la distancia entre los vientres contiguos, lo mismo que la distancia entre los nodos vecinos, es igual a $\lambda/2$. Los vientres y los nodos están desplazados entre sí en un cuarto de longitud de onda.

Volvamos de nuevo a la ecuación (99.2). El factor $\left(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ al pasar por el valor nulo cambia de signo. De acuerdo con esto las fases de las oscilaciones a lados distintos de un nodo se diferencian en π. Esto significa que los puntos que se encuentran a lados distintos de un nodo oscilan en oposición de fase. Todos los puntos comprendidos entre dos nodos contiguos oscilan cofásicamente (es decir, en la fase idéntica). En la fig. 99.1 se da una serie de «fotografías instantáneas» de las elongaciones o desviaciones de los puntos de las posiciones de equilibrio. La primera «foto» corresponde al instante en que las elongaciones alcanzan el valor absoluto máximo. Las «fotos» siguientes se han hecho con intervalos de un cuarto de período. Las flechas indican las velocidades de las partículas.

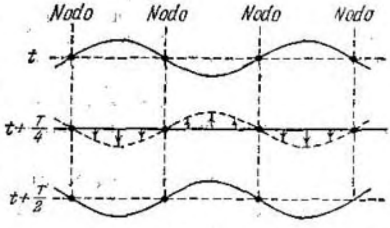


Fig. 99.1.

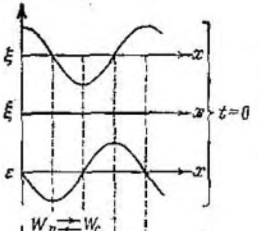


Fig. 99.2.

Derivando la ecuación (99.2) una vez respecto de t y otra respecto de x, hallamos las expresiones de la velocidad de las partículas $\dot{\xi}$ y de la deformación del medio ε:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \operatorname{sen} \omega t, \tag{99.6}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t. \tag{99.7}$$

La ecuación (99.6) describe la onda estacionaria de la velocidad, y la (99.7), la onda estacionaria de la deformación.

En la fig. 99.2 se comparan las «fotografías instantáneas» de la elongación, de la velocidad y de la deformación en los instantes 0 y $T/4$. Por estas gráficas se ve que los nodos y los vientres de la velocidad coinciden con los nodos y vientres de la elongación; en cambio, los nodos y los vientres de la deformación coinciden respectivamente con los vientres y nodos de la elongación. En el instante en que ξ

y ε alcanzan los valores máximos, $\dot{\xi}$ se anula, y viceversa. Respectivamente, dos veces por período se produce la transformación de la energía de la onda estacionaria ya totalmente en potencial, concentrada principalmente en las proximidades de los nodos de la onda (donde se encuentran los vientres de la deformación), ya totalmente en cinética, concentrada fundamentalmente en las proximidades de los vientres de la onda (donde se hallan los vientres de la velocidad). Como resultado, se produce el paso de la energía de cada nodo a los vientres contiguos a él, y viceversa. El flujo de energía medio respecto del tiempo en cualquier sección de la onda es nulo.

§ 100. Oscilaciones de una cuerda

En una cuerda tensa sujeta por ambos extremos, cuando se excitan en ella oscilaciones (vibraciones) transversales, se establecen ondas estacionarias, con la particularidad de que en los puntos de sujeción de la cuerda deben encontrarse nodos. Por eso en la cuerda sólo se excitan con intensidad apreciable aquellas oscilaciones, cuyas semilongitudes de onda caben en la longitud de la cuerda un número entero de veces (fig. 100.1). De aquí se infiere la condición

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{ó} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (100.1)$$

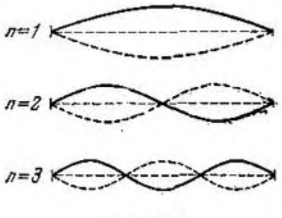


Fig. 100.1.

(l es la longitud de la cuerda). A las longitudes de ondas (100.1) corresponden las frecuencias

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}\,n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (100.2)$$

(v es la velocidad de fase de la onda, determinada por la fuerza de tensión de la cuerda y por la masa de la unidad de longitud, o sea, la densidad lineal de dicha cuerda).

Las frecuencias ν_n se llaman *frecuencias propias* (naturales) de la cuerda. Las frecuencias propias son múltiples de la frecuencia

$$\nu_1 = v/2l,$$

que se denomina *frecuencia fundamental*.

Las oscilaciones armónicas, cuyas frecuencias son las (100.2), reciben el nombre de *oscilaciones propias* o *normales*. También se llaman *armónicas*. En el caso general, la oscilación de una cuerda es una superposición de diversas armónicas.

Las oscilaciones de la cuerda son notables en el sentido de que para ellas, según las representaciones clásicas, se obtienen valores

discretos de una de las magnitudes que caracterizan las oscilaciones (frecuencias). En la física clásica esta discontinuidad es una excepción. En los procesos cuánticos la discontinuidad es más bien una regla que una excepción.

§ 101. Sonido

Si las ondas elásticas que se propagan en el aire tienen la frecuencia entre los límites de 16 a 20 000 Hz, cuando llegan al oído humano producen la sensación de sonido. De acuerdo con esto, las ondas elásticas que en cualquier medio tienen la frecuencia comprendida en los límites indicados, se llaman *ondas acústicas* o simplemente *sonido*. Las ondas elásticas de frecuencias menores que 16 Hz se denominan *infrasonido* y las de frecuencias mayores que 20 000 Hz, *ultrasonido*. El oído humano no percibe los infra y ultrasonidos.

Los sonidos audibles se distinguen por su *tono* o *altura*, *timbre* e *intensidad*. A cada una de estas valoraciones subjetivas corresponde una característica física determinada de la onda sonora.

Todo sonido real es no una oscilación armónica simple, sino una superposición de oscilaciones armónicas con un conjunto determinado de las frecuencias. El conjunto de las frecuencias de las oscilaciones presentes en un sonido dado forman el *espectro acústico* de dicho sonido. Si en el sonido están presentes oscilaciones de todas las frecuencias en cierto intervalo de ν' a ν'', el espectro se dice que es *continuo*. Si el sonido consta de oscilaciones de frecuencias discretas ν_1, ν_2, ν_3, etc., el espectro es *de rayas*. Tienen espectro acústico continuo los ruidos. Las oscilaciones con espectro de rayas producen sensación de sonido de altura más o menos determinada. Este sonido se denomina *tonal*.

La altura de un sonido tonal se determina por la frecuencia fundamental (menor). La intensidad relativa de los *sobretonos* (es decir, las oscilaciones con las frecuencias ν_2, ν_3, etc.) determina el matiz o timbre del sonido. La distinta composición espectral de los sonidos emitidos por diferentes instrumentos musicales permite distinguir de oído, por ejemplo, una flauta de un violín o de un piano.

Por intensidad del sonido se entiende el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía que lleva consigo la onda sonora. Para producir la sensación de sonido la onda debe poseer cierta intensidad mínima llamada *umbral de audición*. El umbral de audición es algo distinto para diferentes personas y depende mucho de la frecuencia del sonido. La sensibilidad máxima del oído humano corresponde a las frecuencias de 1000 a 4000 Hz. En esta región de frecuencias el umbral de audición constituye, por término medio, cerca de 10^{-12} W/m^2. En otras frecuencias el umbral

de audición se encuentra más alto (véase la curva inferior de la fig. 101.1).

Con intensidades del orden de 1 a 10 W/m² la onda deja de percibirse como sonido y sólo produce en el oído sensación de dolor y presión. El valor de la intensidad, con el cual ocurre esto, se llama *umbral doloroso*. Este umbral, lo mismo que el de audición, depende de la frecuencia (véase la curva superior de la fig. 101.1; los datos que se dan en esta figura se refieren a un oído normal medio).

La intensidad del sonido apreciada subjetivamente crece mucho más despacio que la intensidad de las ondas acústicas. Cuando la intensidad de las ondas aumenta en progresión geométrica, la del sonido lo hace, aproximadamente, en progresión aritmética, es decir, linealmente. Sobre esta base el *nivel de intensidad del sonido* L se determina como el logaritmo de la razón de la intensidad I del sonido dado, a la intensidad I_0 que se toma como referencia:

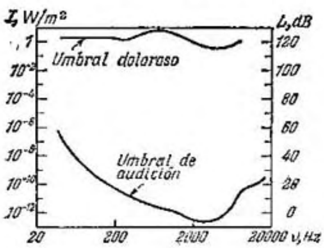


Fig. 101.1

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (101.1)$$

La intensidad de referencia I_0 se toma igual a 10^{-12} W/m², porque el umbral de audición para la frecuencia del orden de 1000 Hz se encuentra en el nivel nulo ($L = 0$).

La unidad de nivel de intensidad del sonido L determinada por la fórmula (101.1), se llama *belio* (B). De ordinario se utiliza una unidad 10 veces menor, el *decibelio* (dB). El valor de L en decibelios se determina por la fórmula

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (101.2)$$

La relación entre dos intensidades I_1 e I_2 también se puede expresar en decibelios:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \qquad (101.3)$$

Por medio de esta fórmula se puede expresar en decibelios la disminución de la intensidad (amortiguamiento) de una onda en cierto espacio. Así, por ejemplo, un amortiguamiento de 20 dB significa que la intensidad disminuye 100 veces.

Toda la gama de intensidades, con las cuales una onda produce en el oído humano sensación de sonido (de 10^{-12} a 10 W/m²), corresponde a los valores de nivel de sonido de 0 a 130 dB. En la tabla 101.1

se dan los valores aproximados de los niveles de la intensidad de algunos sonidos.

La energía que llevan consigo las ondas acústicas es extremadamente pequeña. Suponiendo, por ejemplo, que un vaso de agua absorbiera totalmente toda la energía de una onda sonora de 70 dB

Tabla 101.1

Sonido	Nivel de intensidad, dB
Tictac de un reloj	20
Murmullo a 1 m de distancia	30
Conversación en voz baja	40
Conversación a media voz	60
Conversación en alta voz	70
Grito	80
Ruido de motor de avión: a 5 m de distancia	120
a 3 m de distancia	130

de nivel de intensidad que incidiera sobre él (en este caso la cantidad de energía absorbida por segundo sería aproximadamente de $2\cdot 10^{-7}$W), para calentar el agua desde la temperatura ambiente hasta la de ebullición, se necesitarían decenas de millares de años.

Las ondas ultrasonoras pueden obtenerse en forma de haces dirigidos, semejantes a los luminosos. Los haces ultrasónicos dirigidos se utilizan mucho en la localización (detección de objetos y determinación de la distancia hasta ellos) en el agua. La idea de la localización ultrasónica la expuso por primera vez el eminente físico francés P. Langevin, que la desarrolló durante la primera guerra mundial para detectar los submarinos. En la actualidad los localizadores ultrasónicos se utilizan para detectar iceberg, bancos de peces, etc.

Sabemos que dando un grito y determinando el tiempo que transcurre hasta que llega el eco, es decir, el sonido reflejado en obstáculos como peñas, bosques, la superficie del agua en un pozo, etc., se puede, multiplicando la mitad de este tiempo por la velocidad del sonido, hallar la distancia hasta dichos obstáculos. En este principio se basa el localizador antes citado y el sondador ultrasónico, que se emplea para medir la profundidad del mar y levantar planos del relieve de su fondo.

El método de la localización ultrasónica permite a los murciélagos orientarse bien cuando vuelan en la oscuridad. El murciélago emite periódicamente impulsos de frecuencia ultrasónica y, por las señales reflejadas que percibe con el órgano del oído, juzga con gran exactitud las distancias hasta los objetos que lo rodean.

§ 102. Velocidad del sonido en los gases

Una onda sonora en un gas es una sucesión de regiones alternantes de compresión y enrarecimiento del gas que se propagan en el espacio. Por consiguiente, la presión en cada punto del espacio experimenta desviaciones Δp, variables periódicamente, del valor medio de p que coincide con la presión que existe en el gas en ausencia de las ondas. De este modo, el valor instantáneo de la presión en un punto determinado del espacio se puede representar en la forma

$$p' = p + \Delta p.$$

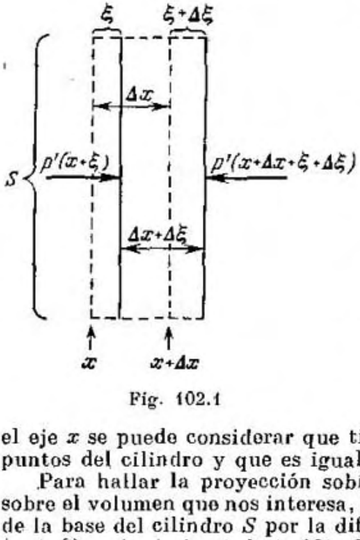


Fig. 102.1

Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x. De un modo semejante a como procedimos en el § 97 para hallar la velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido, consideremos un volumen de gas en forma de cilindro, cuya base tenga el área S y cuya altura sea Δx (fig. 102.1). La masa del gas contenida en este volumen será $\rho S\, \Delta x$, siendo ρ la densidad del gas no perturbado por la onda. En virtud de la pequeñez de Δx, la proyección de la aceleración sobre el eje x se puede considerar que tiene el mismo valor para todos los puntos del cilindro y que es igual a $\partial^2\xi/\partial t^2$.

Para hallar la proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre el volumen que nos interesa, hay que tomar el producto del área de la base del cilindro S por la diferencia de presión en las secciones $(x + \xi)$ y $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$. Repitiendo los razonamientos que nos condujeron a la fórmula (97.5), obtenemos

$$F_x = -\frac{\partial p'}{\partial x} S\Delta x$$

(se recordará que al deducir la fórmula (97.5) se supuso que $\Delta\xi \ll \Delta x$).

Así, hemos hallado la masa del volumen de gas separado por nosotros, su aceleración y la fuerza que actúa sobre él. Ahora vamos a escribir, para este volumen de gas, la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$(\rho S\Delta x)\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x}\, S\Delta x.$$

Después de simplificar por $S\ \Delta x$ se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \qquad (102.1)$$

En la ecuación diferencial que hemos obtenido hay dos funciones incógnitas: ξ y p'. Expresemos una de estas funciones por medio de la otra. Para esto hay que hallar la relación entre la presión del gas p' y la variación relativa de su volumen $\partial\xi/\partial x$. Esta relación depende del carácter que tenga el proceso de compresión (o expansión) del gas. En la onda acústica las compresiones y expansiones del gas se suceden unas a otras con tanta frecuencia que las partes adyacentes del medio no tienen tiempo de intercambiar calor, por lo que el proceso puede considerarse adiabático. En un proceso adiabático la relación entre la presión y el volumen de una masa de gas dada se determina por la ecuación

$$pV^\gamma = \text{const}, \qquad (102.2)$$

en la que γ es la razón entre la capacidad calorífica del gas a presión constante y su capacidad calorífica a volumen constante (véase la ecuación (88.5) del tomo 1°). De acuerdo con (102.2)

$$p\,(S\Delta x)^\gamma = p'\,[S\,(\Delta x + \Delta\xi)]^\gamma = \\ = p'\left[S\left(\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial x}\,\Delta x\right)\right]^\gamma = p'\,(S\Delta x)^\gamma\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

La simplificación por $(S\ \Delta x)^\gamma$, da

$$p = p'\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Aprovechando el que por la suposición hecha $(\partial\xi/\partial x) \ll 1$, desarrollamos la expresión $(1 + \partial\xi/\partial x)^\gamma$ en serie de potencias de $\partial\xi/\partial x$ y despreciamos los términos de órdenes de pequeñez superiores. Como resultado se obtiene la fórmula

$$p = p'\left(1 + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Resolvemos esta ecuación respecto de p':

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}} \approx p\left(1 - \gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) \qquad (102.3)$$

$\left(\text{hemos aplicado la fórmula } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \text{ válida cuando } x \ll 1\right)$. De la relación hallada es fácil obtener la expresión de Δp:

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p\frac{\partial\xi}{\partial x}. \qquad (102.4)$$

Como γ es una magnitud del orden de la unidad, de (102.4) se infiere que $|\partial\xi/\partial x| \approx |\Delta p/p|$. Por lo tanto, la condición $\partial\xi/\partial x \ll 1$ significa que la desviación de la presión del valor medio es mucho menor que la presión misma. En realidad esto es así: para los sonidos más intensos la amplitud de las oscilaciones de la presión del aire no supera 1 mm Hg, mientras que la presión atmosférica p tiene una magnitud del orden de 10^3 mm Hg.

Derivando la expresión (102.3) respecto de x, hallamos que

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Finalmente, sustituyendo este valor de $\partial p'/\partial x$ en la fórmula (102.1) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Su comparación con la ecuación de onda (96.7) da para la velocidad de las ondas acústicas en un gas la expresión

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \qquad (102.5)$$

(se recordará que p y ρ son la presión y la densidad del gas no perturbado por la onda).

A la presión atmosférica y las temperaturas ordinarias, las propiedades de la mayoría de los gases se aproximan a las del gas perfecto. Por eso la relación p/ρ puede suponerse que para ellos es igual a RT/M, donde R es la constante de los gases; T, la temperatura absoluta, y M, la masa de un mol de gas (véase la fórmula (86.8) del tomo 1°). Sustituyendo este valor en (102.5), se obtiene para la velocidad del sonido en el gas la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \qquad (102.6)$$

De esta fórmula se sigue que la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura y no depende de la presión.

La velocidad media del movimiento térmico de las moléculas del gas se determina por la fórmula

$$\langle v_{\text{mol}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

(véase la fórmula (98.31) del tomo 1°). La comparación de esta expresión con la (102.6) da que entre la velocidad del sonido en el gas y la velocidad media del movimiento térmico de las moléculas existe la relación

$$v = \langle v_{\text{mol}} \rangle \sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}}. \qquad (102.7)$$

La sustitución de γ por su valor para el aire, igual a 1,4, conduce a la relación $v \approx {}^3/_4 \langle v_{mol} \rangle$. El valor máximo posible de γ es ${}^5/_3$. En este caso $v \approx {}^4/_5 \langle v_{mol} \rangle$. De este modo, la velocidad del sonido en el gas resulta ser del mismo orden que la velocidad media del movimiento térmico de las moléculas, pero siempre es un poco menor que $\langle v_{mol} \rangle$.

Calculemos el valor de la velocidad del sonido en el aire a la temperatura de 290 K (temperatura ambiente). Para el aire $\gamma = 1,40$ y $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. La constante de los gases es igual a 8,31 J/(mol·K). Sustituyendo estos valores en la fórmula (102.6), obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ m/s}.$$

El valor de la velocidad del sonido en el aire que hemos hallado concuerda bien con el valor obtenido experimentalmente.

Hallemos la relación entre la intensidad de la onda sonora I y la amplitud de las oscilaciones de la presión $(\Delta p)_m$. En el § 101 se indicó que por intensidad del sonido se entiende el valor medio de la densidad del flujo de energía. Por consiguiente,

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v \tag{102.8}$$

(véase la fórmula (98.11)). Aquí ρ es la densidad del gas no perturbado; a, la amplitud de las oscilaciones de las partículas del medio, es decir, la amplitud de las oscilaciones de la elongación ξ; ω, la frecuencia, y v, la velocidad de fase de la onda. Advertimos que, en este caso, por partículas del medio se entienden no las moléculas, sino volúmenes macroscópicos (es decir, que contienen una gran cantidad de moléculas), cuyas dimensiones lineales son mucho mayores que la longitud de la onda.

Supongamos que ξ varía según la ley $\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$. Entonces

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ak \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha) = a \frac{\omega}{v} \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha).$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (102.4), obtenemos

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha) = -(\Delta p)_m \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha).$$

De aquí

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega}. \tag{102.9}$$

La sustitución de esta expresión en (102.8), da

$$I = \frac{1}{2} \rho \frac{(\Delta p)_m^2 v^2}{\gamma^2 p^2 \omega^2} \omega^2 v = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\gamma^2 \rho v} \left(\frac{\rho}{p}\right)^2 v^4.$$

Tomando en consideración que $v^4 = (\gamma RT/M)^2$, y $(p/\rho)^2 = (RT/M)^2$ (véase la fórmula (102.6) y el texto que la precede), se puede escribir

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v}. \tag{102.10}$$

Valiéndose de esta fórmula se puede calcular que a la gama de niveles de intensidad del sonido de 0 a 130 dB corresponden los valores aproximados de las amplitudes de las oscilaciones de la presión del aire de $3\cdot10^{-5}$ Pa (es decir, $2\cdot10^{-7}$ mm Hg) a 100 Pa ($\sim$1 mm Hg).

Calculemos el valor de la amplitud a de las oscilaciones de las partículas y de la amplitud de la velocidad de las mismas $(\dot{\xi})_m$. Empecemos por el valor de la magnitud a determinado por la fórmula (102.9). Teniendo en cuenta que $v/\omega = \lambda/2\pi$, obtenemos la relación

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx 0{,}1 \frac{(\Delta p)_m}{p} \tag{102.11}$$

($\gamma \approx 1{,}5$, por lo tanto, $2\pi\gamma \approx 10$). Si la intensidad del sonido es de 130 dB, la relación $(\Delta p)_m/p$ tiene una magnitud del orden de 10^{-3}, y si dicha intensidad es de 60 dB esta relación es igual aproximadamente a $2\cdot10^{-7}$. Las longitudes de las ondas sonoras en el aire se encuentran entre los límites de 21 m (para $\nu = 16$ Hz) a 17 mm (para $\nu = 20\,000$ Hz). Sustituyendo estos datos en la fórmula (102.11), hallamos que cuando la intensidad del sonido es de 60 dB, la amplitud de las oscilaciones de las partículas es de $\sim4\cdot10^{-4}$ mm en las ondas más largas, y de $\sim3\cdot10^{-7}$ mm en las más cortas. Cuando la intensidad del sonido es de 130 dB, la amplitud de las oscilaciones en las ondas más largas llega a $\sim$2 mm.

En las oscilaciones armónicas la amplitud de la velocidad $(\dot{\xi})_m$ es igual a la amplitud de las oscilaciones de las partículas a multiplicada por la frecuencia angular ω: $(\dot{\xi})_m = a\omega$. Multiplicando la expresión (102.11) por ω, se obtiene

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx \frac{(\Delta p)_m}{p}. \tag{102.12}$$

Por consiguiente, cuando la intensidad del sonido es de 130 dB, la amplitud de la velocidad es, aproximadamente, de 340 m/s$\cdot10^{-3}$ = = 0,34 m/s. Si la intensidad del sonido es de 60 dB, la amplitud de la velocidad será del orden de 0,1 mm/s. Advertimos que, a diferencia de la amplitud de las oscilaciones de las partículas, la amplitud de la velocidad no depende de la longitud de la onda.

§ 103. Efecto Doppler acústico

Sea un gas, o un líquido, en el cual, a cierta distancia de una fuente de ondas, se encuentra un dispositivo perceptor de las oscilaciones del medio que llamaremos receptor. Si la fuente y el receptor

de ondas están en reposo respecto del medio en que se propaga la onda, la frecuencia de las oscilaciones que percibe el receptor será igual a la frecuencia ν_0 de las oscilaciones de la fuente. Pero si esta última o el receptor, o ambos a la voz, se mueven con respecto al medio, la frecuencia ν que percibe el receptor puede resultar distinta de ν_0. Este fenómeno se llama *efecto Doppler*.

Supongamos que la fuente y el receptor se mueven a lo largo de la recta que los une. La velocidad de la fuente v_f la consideraremos positiva si ésta se mueve en dirección hacia el receptor, y negativa,

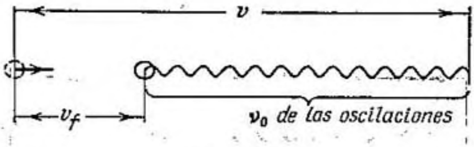


Fig. 103.1.

si se mueve en sentido contrario. Análogamente, la velocidad del receptor v_r se considerará positiva si éste se mueve en dirección hacia la fuente, y negativa si lo hace en sentido opuesto.

Si la fuente está en reposo y oscila con la frecuencia ν_0, en el instante en que va a efectuar la ν_0-ésima oscilación, la «cresta» generada por la primera oscilación habrá tenido tiempo de recorrer un espacio v (v es la velocidad de propagación de la onda respecto del medio). Por consiguiente, las ν_0 «crestas» y «valles» de onda que genera la fuente por segundo caben en la longitud v. Pero si la fuente se mueve respecto de medio con la velocidad v_f, en el instante en que vaya a efectuar la ν_0-ésima oscilación, la «cresta» generada por la primera se encontrará de la fuente a la distancia $v - v_f$ (fig. 103.1). Por lo tanto, ν_0 «crestas» y «valles» de la onda cabrán en la longitud $v - v_f$, de manera que la longitud de la onda será igual a

$$\lambda = \frac{v - v_f}{\nu_0}. \tag{103.1}$$

Junto al receptor en reposo pasan por segundo las «crestas» y los «valles» que caben en la longitud v. Si el receptor se mueve con la velocidad v_r, al cabo de un intervalo de tiempo igual a 1 s percibirá la «cresta» que al principio de dicho intervalo se encontraba de su posición actual a una distancia numéricamente igual a v. De este modo, el receptor percibe por segundo las oscilaciones correspondientes a las «crestas» y «valles» que caben en una longitud numéricamente igual a $v + v_r$ (fig. 103.2) y oscila con la frecuencia

$$\nu = \frac{v + v_r}{\lambda}.$$

Sustituyendo en esta fórmula el valor de λ que da la expresión (103.1), obtenemos

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_r}{v - v_f}. \qquad (103.2)$$

De la fórmula (103.2) se infiere que si la fuente y el receptor se mueven de modo que la distancia entre ellos disminuye, la frecuencia ν que percibe el receptor será mayor que la frecuencia ν_0 de la fuente. Y si la distancia entre la fuente y el receptor aumenta, ν será menor que ν_0.

Si las direcciones de las velocidades $\mathbf{v}_f$ y $\mathbf{v}_r$ no coinciden con la recta que pasa por la fuente y el receptor, en la fórmula (103.2) hay

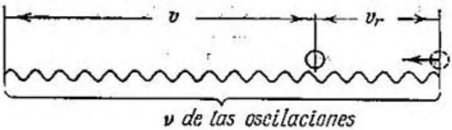


Fig. 103.2.

que tomar, en vez de v_f y v_r, las proyecciones de los vectores $\mathbf{v}_f$ y $\mathbf{v}_r$ sobre la dirección de dicha recta.

De la fórmula (103.2) se sigue que el efecto Doppler para las ondas acústicas está determinado por las velocidades con que se mueven la fuente y el receptor respecto del medio en que se propaga el sonido. El efecto Doppler se observa también en las ondas luminosas, pero la fórmula de la variación de su frecuencia tiene otra forma, distinta de la (103.2). Esto se debe a que para las ondas luminosas no existe medio material, cuyas oscilaciones sean «luz». Por eso, la velocidad de la fuente y del receptor de la luz respecto del «medio» carece de sentido. En el caso de la luz sólo se puede hablar de la velocidad relativa de la fuente y el receptor. El efecto Doppler de las ondas luminosas depende de la magnitud y dirección de esta velocidad. Este efecto se estudia en el § 151.

CAPÍTULO XV

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 104. Ecuación de onda para el campo electromagnético

En el capítulo IX se explicó que un campo eléctrico alternativo genera otro, magnético, que, en general, también es alternativo. Este campo magnético alternativo genera a su vez un campo eléctrico y así sucesivamente. De este modo, si por medio de cargas oscilantes se excita un campo electromagnético alternativo, en el espacio que rodea las cargas se produce una sucesión de transformaciones mutuas de los campos eléctrico y magnético que se propagan de punto en punto. Este proceso será periódico en el tiempo y en el espacio y, por lo tanto, será una onda.

Vamos a demostrar que la existencia de las ondas electromagnéticas se infiere de las ecuaciones de Maxwell. En el caso de un medio homogéneo, neutro ($\rho = 0$), no conductor ($\mathbf{j} = 0$), de permitividad ε y permeabilidad magnética μ constantes

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\mathbf{B} = \mu\mu_0 \nabla\mathbf{H}, \quad \nabla\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \nabla\mathbf{E}.$$

Por eso las ecuaciones (71.1)—(71.4) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{104.1}$$

$$\nabla\mathbf{H} = 0, \tag{104.2}$$

$$[\nabla\mathbf{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{104.3}$$

$$\nabla\mathbf{E} = 0. \tag{104.4}$$

Tomemos el rotor de los dos miembros de la ecuación (104.1)

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]. \tag{104.5}$$

El símbolo ∇ significa la derivación respecto de las coordenadas. La variación del orden de derivación respecto de las coordenadas y del tiempo conduce a la igualdad

$$\left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla\mathbf{H}].$$

Haciendo en (104.5) esta sustitución y poniendo en la ecuación que se obtiene el valor (104.3) del rotor **H**, resulta

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (104.6)$$

Según (11.40), $[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = \nabla(\nabla\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$. En virtud de (104.4), el primer miembro de esta expresión es nulo. Por eso, el primer miembro de la fórmula (104.6) será igual a $-\Delta\mathbf{E}$. De este modo, omitiendo en ambos miembros el signo menos, llegamos a la ecuación

$$\Delta\mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

De acuerdo con (39.15), $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Por consiguiente, a esta ecuación se le puede dar la forma

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (104.7)$$

Abriendo el operador de Laplace, obtenemos

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (104.8)$$

Tomando el rotor de ambos miembros de la ecuación (104.3) y haciendo análogas transformaciones, se llega a la ecuación

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}. \qquad (104.9)$$

Las ecuaciones (104.8) y (104.9) están relacionadas entre sí inseparablemente, ya que han sido obtenidas de las (104.1) y (104.3) en cada una de las cuales figura tanto **E** como **H**.

Las ecuaciones (104.8) y (104.9) son ecuaciones de onda típicas (véase (96.2)). Toda función que satisfaga una ecuación de este tipo describe cierta onda, y la raíz cuadrada de la magnitud recíproca del coeficiente de la derivada respecto del tiempo da la velocidad de fase de dicha onda. Por consiguiente, las ecuaciones (104.8) y (104.9) indican que los campos electromagnéticos pueden existir en forma de ondas eletromagnéticas, cuya velocidad de fase es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (104.10)$$

En el vacío (es decir, cuando $\varepsilon = \mu = 1$) la velocidad de las ondas electromagnéticas coincide con la velocidad de la luz c.

§ 105. Onda electromagnética plana

Investiguemos una onda electromagnética plana que se propague en un medio neutro, no conductor, de permitividad ε y permeabilidad magnética μ constantes ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$).

Dirigimos el eje x perpendicularmente a las superficies de onda. Entonces **E** y **H**, y por lo tanto sus componentes a lo largo de los ejes de coordenadas, no dependerán de las coordenadas y y z. Por eso las ecuaciones (71.5) — (71.8) se simplifican del modo siguiente:

$$0=\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_z}{\partial x}=\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t},\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t},\qquad (105.1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}=\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial x}=0,\qquad (105.2)$$

$$0=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t},\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t},\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t},\qquad (105.3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial x}=0.\qquad (105.4)$$

La ecuación (105.4) y la primera de las ecuaciones (105.3) indican que E_x no puede depender de x ni de t. La ecuación (105.2) y la primera de las ecuaciones (105.1) dan ese mismo resultado para H_x. Por consiguiente, las diferencias de cero de E_x y H_x sólo pueden ser debidas a los campos homogéneos continuos que se superponen al campo electromagnético de la onda. El campo de la onda mismo no tiene componentes a lo largo del eje x. De aquí se infiere que los vectores **E** y **H** son perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda, es decir, que las ondas electromagnéticas son transversales. En adelante vamos a suponer que los campos continuos están ausentes y que $E_x = H_x = 0$.

Las dos últimas ecuaciones (105.1) y las dos últimas ecuaciones (105.3) se pueden reunir en dos grupos independientes:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t},\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t},\qquad (105.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t},\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}.\qquad (105.6)$$

El primer grupo de ecuaciones relaciona los componentes E_y y H_z, el segundo, los componentes E_z y H_y. Supongamos que inicialmente se creó el campo eléctrico alternativo E_y dirigido a lo largo del eje y. Según la segunda de las ecuaciones (105.5), este campo crea un campo magnético H_z dirigido a lo largo del eje z. De acuerdo con la primera ecuación (105.5), el campo H_z origina un campo eléctrico E_y y así sucesivamente. Al ocurrir esto no aparece un campo E_z ni un campo H_y. Análogamente, si al principio se crea el campo E_z, según las ecuaciones (105.6) surge el campo H_y, el cual excita el E_z y así sucesivamente. En este caso no se producen los campos E_y y H_z. De este modo, para definir una onda electromagnética plana basta tomar uno de los sistemas de ecuaciones (105.5) ó (105.6) y suponer los componentes que figuran en el otro sistema iguales a cero.

21–01245

Tomemos para describir la onda las ecuaciones (105.5) suponiendo $E_z = H_y = 0$. Derivamos la primera ecuación respecto de x y hacemos la sustitución: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H_z}{\partial x}$. Sustituyendo luego el valor de $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ de la segunda ecuación, obtenemos la ecuación de onda para E_y:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (105.7)$$

(hemos sustituido $\varepsilon_0\mu_0$ por $1/c^2$). Derivando respecto de x la segunda de las ecuaciones (105.5) y después de hacer transformaciones análogas, hallamos la ecuación de onda para H_z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (105.8)$$

Las ecuaciones obtenidas son un caso particular de las (104.8) y (104.9).

Recordamos que $E_x = E_z = 0$ y $H_x = H_y = 0$, de manera que $E_y = E$ y $H_z = H$. Hemos conservado en las ecuaciones (105.7) y (105.8) los subíndices y y z de E y H para subrayar la circunstancia de que los vectores **E** y **H** están dirigidos a lo largo de los ejes perpendiculares entre sí y y z.

La solución más simple de la ecuación (105.7) es la función

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \qquad (105.9)$$

La solución de la ecuación (105.8) tiene forma análoga:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \qquad (105.10)$$

En estas fórmulas ω es la frecuencia de la onda; k, el número de onda, igual a ω/v, y α_1 y α_2, las fases iniciales de las oscilaciones en los puntos de coordenada $x = 0$.

Sustituimos las funciones (105.9) y (105.10) en las ecuaciones (105.5):

$$kE_m \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0\omega H_m \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha_2),$$
$$kH_m \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Para que estas ecuaciones se satisfagan es necesaria la igualdad de las fases α_1 y α_2. Además deben cumplirse las relaciones

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m, \quad \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m = kH_m.$$

Multiplicando entre sí estas dos igualdades, hallamos que

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2. \qquad (105.11)$$

Por lo tanto, las oscilaciones de los vectores eléctrico y magnético en el campo electromagnético se efectúan con la misma fase ($\alpha_1 = \alpha_2$) y las amplitudes de estos vectores están ligadas por la relación

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}. \qquad (105.12)$$

Para una onda que se propague en el vacío

$$\frac{E_m}{H_m}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\sqrt{4\pi\cdot10^{-7}\cdot4\pi\cdot9\cdot10^{9}}=$$
$$=\sqrt{(4\pi)^2\cdot900}=120\pi\approx377\Omega. \quad (105.13)$$

En el sistema de Gauss la fórmula (105.12) tiene la forma

$$E_m\sqrt{\varepsilon}=H_m\sqrt{\mu}.$$

Por lo tanto, en el vacío $E_m=H_m$ (E_m se mide en unidades CGSE y H_m, en unidades CGSM).

Multiplicando la ecuación (105.9) por el versor del eje y ($E_y\mathbf{e}_y=\mathbf{E}$), y la ecuación (105.10) por el versor del eje z ($H_z\mathbf{e}_z=\mathbf{H}$), obtenemos las ecuaciones de la onda electromagnética plana en forma vectorial:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_m\cos(\omega t-kx),\\ \mathbf{H}&=\mathbf{H}_m\cos(\omega t-kx)\end{aligned}\right\}\quad(105.14)$$

(hemos supuesto $\alpha_1=\alpha_2=0$).

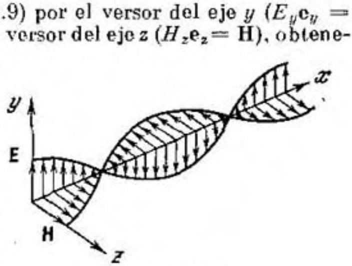


Fig. 105.1.

En la fig. 105.1 se muestra la «fotografía instantánea» de la onda electromagnética plana. Por esta figura se ve que los vectores E y H forman con la dirección en que se propaga la onda un sistema dextrógiro. En un punto fijado del espacio los vectores E y H varían con el tiempo según la ley armónica. Aumentan simultáneamente desde cero, al cabo de 1/4 de período alcanzan el valor máximo, con la particularidad de que si E está dirigida hacia arriba, H lo está hacia la derecha (si se mira a lo largo de la dirección en que se propaga la onda). Después de otro 1/4 de período ambos vectores se anulan. Luego vuelven a alcanzar el valor máximo, pero esta vez E estará dirigido hacia abajo y H, hacia la izquierda. Finalmente, una vez realizado el período de oscilación, los vectores se anulan de nuevo. Estas variaciones de los vectores E y H se producen en todos los puntos del espacio, pero con el desfasaje determinado por la distancia entre los puntos, medida a lo largo del eje x.

§ 106. Investigación experimental de las ondas electromagnéticas

Los primeros experimentos con ondas electromagnéticas no luminosas fueron hechos por H. Hertz en 1888. Para obtener las ondas utilizó Hertz un dipolo (oscilador) que él mismo inventó, consistente en dos varillas separadas por un espacio (o distancia) de chispa

(o disruptivo). Cuando hacía llegar al oscilador la alta tensión de una bobina de inducción, en el espacio disruptivo saltaba una chispa. Esta cortocircuitaba dicho espacio y en el oscilador se producían oscilaciones eléctricas amortiguadas (fig. 106.1; las bobinas de choque que se muestran en la figura sirven para evitar que la corriente de alta frecuencia se ramifique en el devanado del inductor). Mientras ardía la chispa tenía tiempo de efectuarse un gran número de oscilaciones que originaban un tren de ondas electromagnéticas, cuya longitud era, aproximadamente, dos veces menor que la longitud del oscilador. Colocando osciladores de distinta longitud en el foco de un espejo parabólico cóncavo, obtenía Hertz ondas planas dirigidas, cuyas longitudes eran de 0,6 a 10 m.

Hertz también estudiaba la onda radiada valiéndose de un dipolo de media onda con espacio disruptor pequeño en el centro. Si este dipolo se colocaba paralelamente al vector intensidad del campo eléctrico, las ondas excitaban en él oscilaciones de la corriente y de la intensidad. Como la longitud de este dipolo se elegía igual a $\lambda/2$, en virtud de la resonancia las ondas alcanzaban en él tal intensidad, que hacían que en el espacio disruptivo saltaran pequeñas chispas.

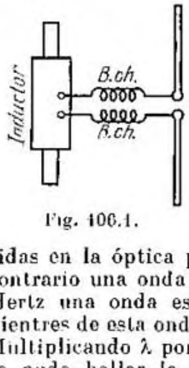


Fig. 106.1.

Con ayuda de unos grandes espejos metálicos y de un prisma de asfalto (de más de un metro de dimensión y 1200 kg de masa) efectuó Hertz la reflexión y la refracción de las ondas electromagnéticas y descubrió que estos dos fenómenos se subordinan a las leyes establecidas en la óptica para las ondas luminosas. Reflejando en sentido contrario una onda plana progresiva en un espejo metálico, obtuvo Hertz una onda estacionaria. La distancia entre los nodos y los vientres de esta onda permitió determinar la longitud λ de la misma. Multiplicando λ por la frecuencia ν de las oscilaciones del oscilador se pudo hallar la velocidad de las ondas electromagnéticas, que resultó ser próxima a c. Interponiendo en el camino de las ondas una red de alambres de cobre paralelos entre sí, descubrió Hertz que, haciendo girar la red alrededor del rayo, la intensidad de las ondas que pasaban a través de la red, sufría una variación intensa. Cuando los alambres que formaban la red eran perpendiculares al vector **E**, la onda pasaba a través de dicha red sin perturbaciones. Pero cuando los alambres se colocaban paralelamente a **E**, la onda no pasaba a través de la red. De este modo quedó demostrado el carácter transversal de las ondas electromagnéticas.

El físico ruso P. N. Lébedev continuó los experimentos de Hertz y en 1894 obtuvo ondas electromagnéticas de 6 mm de longitud e investigó su paso a través de los cristales. Con esto descubrió la doble refracción de las ondas (véase el § 136).

En 1896 otro físico ruso, A. S. Popov, valiéndose de las ondas electromagnéticas, estableció por primera vez una comunicación a distancia, de cerca de 250 m (en la que transmitió las palabras «Heinrich Hertz»). Así se sentaron las bases de la radiotecnia.

§ 107. Energía de las ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas transportan energía. Según la fórmula (98.9), la densidad del flujo de energía se puede obtener multiplicando la densidad de la energía por la velocidad de la onda.

Vamos a considerar el caso en que la onda electromagnética se propaga en el vacío. En este caso la velocidad de la onda es igual a c. La densidad de la energía w del campo electromagnético se compone de la densidad de la energía del campo eléctrico y de la densidad de la energía del campo magnético:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \tag{107.1}$$

(véanse las fórmulas (30.2) y (67.7); para el vacío $\varepsilon = \mu = 1$).

En un punto dado del espacio los vectores **E** y **H** varían en la misma fase[1]), por lo que la relación (105.12) entre los valores de las amplitudes de E y H es también válida para sus valores instantáneos. Suponiendo en (105.12) $\varepsilon = \mu = 1$, llegamos a la relación

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}. \tag{107.2}$$

De aquí se deduce que las densidades de la energía de los campos eléctrico y magnético de la onda son iguales en cada instante: $w_E = w_H$.

Teniendo en cuenta (107.2), a la expresión (107.1) se le puede dar la forma

$$w = \frac{1}{2}(E\sqrt{\varepsilon_0})(E\sqrt{\varepsilon_0}) + \frac{1}{2}(H\sqrt{\mu_0})(H\sqrt{\mu_0}) = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,EH = \frac{1}{c}\,EH$$

(véase la fórmula (39.15)). Multiplicando la expresión hallada de w por la velocidad c de la onda, obtenemos el módulo de la densidad del flujo de energía:

$$S = wc = EH. \tag{107.3}$$

Los vectores **E** y **H** son perpendiculares entre sí y forman con la dirección en que se propaga la onda un sistema dextrógiro. Por eso la dirección del vector **[EH]** coincide con la dirección en que es transportada la energía, y el módulo de este vector es igual a EH. Por consiguiente, el vector densidad del flujo de energía electromagnética se puede representar como el producto vectorial de **E**

[1]) Esto es cierto únicamente para el vacío y para un medio no conductor. En un medio conductor las fases E y H no coinciden.

por **H**:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \qquad (107.4)$$

El vector **S** se llama *vector de Poynting.*

Se puede demostrar que la fórmula (107.4) es también válida en el caso de una onda electromagnética que se propague en un medio dieléctrico o conductor.

Por analogía con la fórmula (98.13), el flujo Φ de energía electromagnética a través de una superficie F se puede hallar por integración:

$$\Phi = \int_F \mathbf{S}\, d\mathbf{F} \qquad (107.5)$$

(en la fórmula (98.13) la letra S significaba la superficie; ahora, como con la letra S se designa el vector de Poynting, hemos tenido que utilizar la letra F para designar la superficie).

De ejemplo de cómo se emplean las fórmulas (107.4) y (107.5) nos va a servir un trozo de conductor cilíndrico homogéneo, por el cual pasa corriente continua (fig. 107.1). Primero vamos a considerar que en este trozo están ausentes las fuerzas exteriores. Entonces, según la fórmula (34.3), en cada punto del conductor se cumple la relación

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{E}.$$

La corriente continua se distribuye por la sección del conductor con la misma densidad **j**. Por lo tanto, el campo eléctrico dentro de los límites del trozo de conductor representado en la fig. 107.1 será homogéneo. Dentro del conductor separamos mentalmente un volumen cilíndrico de radio r y longitud l. En cada punto de la superficie lateral de este cilindro el vector **H** es perpendicular al vector **E** y está dirigido según la tangente a la superficie. El módulo de **H** es igual a $^1/_2\, jr$ (de acuerdo con (52.7) $2\pi r H = j\pi r^2$). De este modo, el vector (107.4), en cada punto de la superficie, está dirigido hacia el eje del conductor y tiene el módulo $S = EH = {}^1/_2 Ejr$. Multiplicando S por el área de la superficie lateral F del cilindro, igual a $2\pi rl$, hallamos que en el volumen considerado entra un flujo de energía electromagnética

$$\Phi = SF = {}^1/_2 Ejr\cdot 2\pi rl = Ej\cdot \pi r^2 l = Ej\cdot V, \qquad (107.6)$$

donde V es el volumen del cilindro.

Según (38.4), $Ej = \rho j^2$ es la cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo en la unidad de volumen del conductor. Por consiguiente, la igualdad (107.6) indica que la energía que se desprende en forma de calor de Lenz—Joule penetra en el conductor, a través de su superficie lateral, en forma de energía del campo electro-

magnético. A medida que penetra más profundamente en el conductor, el flujo de energía se debilita paulatinamente (también disminuye el vector de Poynting y la superficie, a través de la cual pasa el flujo) a expensas de la absorción de la energía y su transformación en calor.

Supongamos ahora que dentro de los límites del trozo de conductor que hemos considerado actúan fuerzas exteriores, cuyo campo es homogéneo ($\mathbf{E}^* =$ const). En este caso, según la fórmula (35.1), en cada punto del conductor tiene lugar la relación

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

de la que se infiere que

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} - \mathbf{E}^*. \qquad (107.7)$$

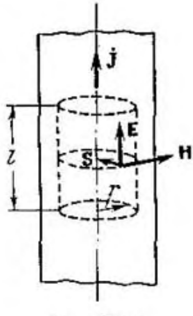


Fig. 107.1.

Vamos a suponer que en el trozo considerado las fuerzas exteriores no se oponen, sino que facilitan el paso de la corriente. Esto significa que el sentido de $\mathbf{E}^*$ coincide con el de $\mathbf{j}$. Admitamos que se cumple la relación $\rho j = E^*$. Entonces, según (107.7), la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en cada punto es nula y el flujo de energía electromagnética a través de la superficie lateral no existe. En este caso el calor se desprende a costa del trabajo de las fuerzas exteriores.

Si se cumple la relación $E^* > \rho j$, entonces, como se sigue de (107.7), el vector $\mathbf{E}$ estará dirigido en sentido contrario al del vector $\mathbf{j}$. En este caso los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{S}$ tienen sentidos opuestos a los representados en la fig. 107.1. Por lo tanto, la energía electromagnética no penetra, sino, por el contrario, sale a través de la superficie lateral del conductor al espacio que lo rodea.

Resumiendo, se puede decir que, en un circuito cerrado de corriente continua, la energía de los trozos en que actúan fuerzas exteriores se transmite a los otros trozos del circuito no a lo largo de los conductores, sino a través del espacio que los rodea, en forma de flujo de energía electromagnética caracterizada por el vector $\mathbf{S}$.

§ 108. Impulso del campo electromagnético

Al ser absorbida por un cuerpo cualquiera, la onda electromagnética comunica a dicho cuerpo cierto impulso (cantidad de movimiento), es decir, ejerce sobre él una presión. Esto se puede demostrar con el siguiente ejemplo. Sea una onda plana que incide según la normal sobre la superficie plana de un cuerpo débilmente conductor de ε y μ iguales a la unidad (fig. 108.1). El campo eléctrico de la

onda excitará en el cuerpo una corriente de cierta densidad $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. El campo magnético de la onda actuará sobre la corriente con una fuerza, cuya magnitud referida a la unidad de volumen del cuerpo se puede hallar por la fórmula (44.4):

$$\mathbf{F}_{\text{unid.vol}} = [\mathbf{jB}] = \mu_0 [\mathbf{jH}].$$

La dirección de esta fuerza, como se ve en la fig. 108.1, coincide con el sentido en que se propaga la onda.

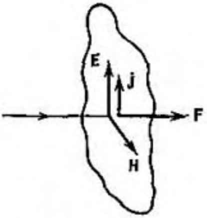


Fig. 108.1.

A una capa superficial, de área igual a la unidad y espesor dl, se le comunica por unidad de tiempo el impulso

$$dK = F_{\text{unid.vol}}\, dl = \mu_0 jH\, dl \qquad (108.1)$$

(los vectores $\mathbf{j}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares entre sí). Esta misma capa absorbe en la unidad de tiempo la energía

$$dW = jE\, dl, \qquad (108.2)$$

que se desprende en forma de calor.

El impulso (108.1) y la energía (108.2) son comunicados a la capa por la onda. Tomemos su relación, omitiendo por innecesario el símbolo d:

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Teniendo en cuenta que $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$, obtenemos

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c}.$$

De aquí se infiere que la onda electromagnética portadora de la energía W tiene el impulso

$$K = \frac{1}{c} W. \qquad (108.3)$$

Esta misma relación entre la energía y el impulso tiene lugar en las partículas de masa en reposo nula (véase la fórmula (71.1) del tomo 1°). Esto no es extraño, ya que, según las representaciones cuánticas, la onda electromagnética es equivalente a un flujo de fotones, es decir, de partículas, cuya masa es nula (se entiende la masa en reposo).

De (108.3) se sigue que la densidad del impulso (es decir, el impulso por unidad de volumen) del campo electromagnético es

$$K_{\text{unid. vol}} = \frac{1}{c} w. \qquad (108.4)$$

Entre la densidad de la energía y el módulo del vector de Poynting existe la relación $S = wc$. Sustituyendo en (108.4) w por S/c y te-

niendo en cuenta que los sentidos de los vectores **K** y **S** coinciden, se puede escribir

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S} = \frac{1}{c^2}\,[\mathbf{EH}]. \tag{108.5}$$

Advertimos que en el transporte de cualquier tipo de energía, la densidad del flujo de energía es igual a la densidad del impulso multiplicada por c^2. Consideremos, por ejemplo, un conjunto de partículas distribuidas en el espacio con la densidad n y lanzadas con velocidad $\mathbf{v}$ igual en dirección y magnitud. En este caso la densidad del impulso será

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = n\,\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{108.6}$$

Las partículas llevan consigo una energía, cuya densidad de flujo $\mathbf{j}_W$ es igual a la densidad del flujo de partículas multiplicada por la energía de una partícula:

$$\mathbf{j}_W = n\mathbf{v}\,\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{108.7}$$

De (108.6) y (108.7) se sigue que

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{j}_W. \tag{108.8}$$

Supongamos que la onda electromagnética que incide normalmente sobre cierto cuerpo es absorbida por éste. Entonces a la unidad de superficie del cuerpo se le comunica por unidad de tiempo el impulso de la onda contenido en un cilindro con área de la base igual a la unidad y altura c. Según (108.4) este impulso es igual a $(w/c)\,c = w$. Al mismo tiempo el impulso que se le comunica a la unidad de superficie por unidad de tiempo es igual a la presión p sobre dicha superficie. Por consiguiente, en el caso de una superficie absorbente $p = w$. Esta magnitud pulsa con gran frecuencia, por lo que en la práctica se puede medir su valor medio respecto del tiempo. De este modo,

$$p = \langle w \rangle. \tag{108.9}$$

Para una superficie perfectamente reflectora la presión será dos veces mayor.

La magnitud de la presión calculada por la fórmula (108.9) resulta ser muy pequeña. Por ejemplo, a 1 m de distancia desde una fuente de luz de un millón de candelas de intensidad, la presión sólo llega, aproximadamente, a 10^{-7} Pa ($\sim 10^{-9}$ gf/cm^2). La presión de la luz consiguió medirla P. N. Lébedev. Haciendo experimentos, para los cuales se necesitaban gran ingenio y maestría, Lébedev midió la presión de la luz sobre los sólidos en 1900 y sobre los gases en 1910. Los resultados de estas mediciones estuvieron en completo acuerdo con la teoría de Maxwell.

§ 109. Radiación del dipolo

El sistema más simple radiador de ondas electromagnéticas es el dipolo eléctrico oscilante. De ejemplo de este dipolo puede servir el sistema formado por una carga puntual $+q$ en reposo y por otra carga puntual $-q$ que oscile junto a ella (fig. 109.1). El momento eléctrico dipolar de este sistema varía con el tiempo según la ley

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} = -ql\mathbf{e}\cos\omega t = \mathbf{p}_m \cos\omega t, \qquad (109.1)$$

en la que $\mathbf{r}$ es el radio vector de la carga $-q$; l, la amplitud de las oscilaciones; $\mathbf{e}$, el vector unitario dirigido a lo largo del eje del dipolo, $\mathbf{p}_m = -ql\mathbf{e}$.

El conocimiento de este sistema radiador tiene especial importancia porque muchos problemas de interacción de la radiación con la

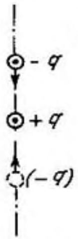


Fig. 109.1.

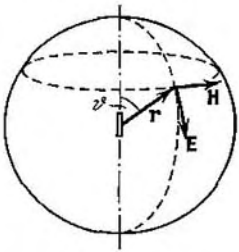


Fig. 109.2.

substancia se pueden explicar clásicamente partiendo de la representación de los átomos como sistemas de cargas que contienen electrones capaces de efectuar oscilaciones armónicas alrededor de las posiciones de equilibrio.

Examinemos la radiación de un dipolo, cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con la longitud de onda ($l \ll \lambda$). Este dipolo se llama *elemental*. En las inmediaciones del dipolo la figura del campo electromagnético es muy compleja. Esta figura se simplifica mucho en la denominada *zona de onda* del dipolo, que comienza a distancias r mucho mayores que la longitud de onda ($r \gg \lambda$). Si la onda se propaga en un medio isótropo homogéneo, el frente de onda, en la zona de onda, será esférico (fig. 109.2). Los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son en cada punto perpendiculares entre sí y perpendiculares también al rayo, es decir, al radio vector trazado desde el centro del dipolo al punto dado.

Llamemos meridianos a las secciones del frente de onda por planos que pasen por el eje del dipolo, y, paralelos, a los planos perpendiculares a dicho eje. Entonces se puede decir que el vector $\mathbf{E}$

en cada punto de la zona de onda está dirigido según la tangente al meridiano, y el vector **H**, según la tangente al paralelo. Si se mira a lo largo del rayo r, la figura instantánea de la onda será la misma que se representó en la fig. 105.1, con la diferencia de que la amplitud disminuye paulatinamente al trasladarse a lo largo del rayo.

En cada punto **E** y **H** oscilan según la ley $\cos(\omega t - kr)$. Las amplitudes $\mathbf{E}_m$ y $\mathbf{H}_m$ dependen de la distancia r al radiador y del ángulo ϑ entre la dirección del radio vector **r** y el eje del dipolo (véase la fig. 109.2). Esta dependencia, en el vacío, tiene la forma siguiente:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \operatorname{sen} \vartheta.$$

El valor medio de la densidad del flujo de energía $\langle S \rangle$ es proporcional al producto $E_m H_m$, por lo tanto,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \vartheta. \qquad (109.2)$$

De esta fórmula se infiere que la intensidad de la onda varía a lo largo del rayo (cuando $\vartheta = \text{const}$) de un modo inversamente pro-

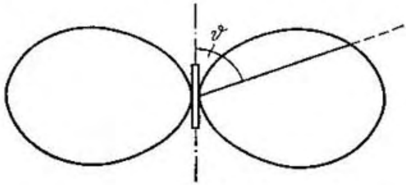


Fig. 109.3.

porcional al cuadrado de la distancia al radiador. Además, depende del ángulo ϑ. El dipolo radía con la intensidad máxima en las direcciones perpendiculares a su eje ($\vartheta = \pi/2$). En las direcciones que coinciden con el eje ($\vartheta = 0$ y π) el dipolo no radía. La dependencia de la intensidad respecto del ángulo ϑ se representa de forma muy comprensible valiéndose del *diagrama direccional del dipolo* (fig. 109.3). Este diagrama se construye de manera que la longitud del segmento que él corta en el rayo trazado desde el centro del dipolo, dé la intensidad de la radiación bajo el ángulo ϑ.

El cálculo correspondiente da que la *potencia de la radiación* del dipolo P (es decir, la energía radiada en todas las direcciones por unidad de tiempo) es proporcional al cuadrado de la segunda derivada del momento dipolar respecto del tiempo:

$$P \sim \ddot{\mathbf{p}}^2. \qquad (109.3)$$

Según la fórmula (109.1), $\ddot{\mathbf{p}}^2 = p_m^2\omega^4 \cos^2 \omega t$. La sustitución de este valor en (109.3) da

$$P \sim p_m^2\omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (109.4)$$

Promediando esta expresión respecto del tiempo, obtenemos

$$\langle P \rangle \sim p_m^2\omega^4. \quad (109.5)$$

Así, pues, la potencia media de la radiación del dipolo es proporcional al cuadrado de la amplitud del momento eléctrico dipolar y a la cuarta potencia de la frecuencia. Por eso, cuando la frecuencia es pequeña, la radiación de los sistemas eléctricos (por ejemplo, de las líneas de transporte de corriente alterna de frecuencia industrial) suele ser insignificante.

Según (109.1), $\ddot{\mathbf{p}} = -q\ddot{\mathbf{r}} = -q\mathbf{w}$, donde $\mathbf{w}$ es la aceleración de la carga oscilante. La sustitución de esta expresión de $\ddot{\mathbf{p}}$ en la fórmula (109.3) da que [1])

$$P \sim q^2\mathbf{w}^2. \quad (109.6)$$

Esta fórmula determina la potencia de la radiación no sólo cuando la carga oscila, sino también cuando se mueve arbitrariamente. Toda carga que se mueve con aceleración excita ondas electromagnéticas, siendo la potencia de la radiación proporcional al cuadrado de la carga y al de la aceleración. Por ejemplo, los electrones que se aceleran en el betatrón (véase el § 76) pierden energía a expensas de la radiación debida principalmente a la aceleración centrípeta $w_n = v^2/r$. Según la fórmula (109.6), la cantidad de energía que pierden los electrones crece mucho al aumentar su velocidad en el betatrón (proporcionalmente a v^4). Por eso la posibilidad de acelerar los electrones en el betatrón tiene un límite de $\sim$500 MeV (a la velocidad correspondiente a este valor, las pérdidas en radiación se hacen iguales a la energía que comunica a los electrones el campo eléctrico rotacional).

Una carga, oscilando armónicamente, radía una onda monocromática de frecuencia igual a la de las oscilaciones que realiza. Si la aceleración $\mathbf{w}$ de la carga varía no según la ley armónica, la radiación consta de un conjunto de ondas de frecuencias distintas.

De acuerdo con la fórmula (109.6), la intensidad se anula cuando $\mathbf{w} = 0$. Por consiguiente, un electrón moviéndose a velocidad constante no radía ondas electromagnéticas. No obstante, esto es cierto únicamente si la velocidad del electrón v_{el} no es mayor que la velocidad de la luz $v_{luz} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ en el medio en que se mueve el electrón. Si $v_{el} > v_{luz}$ se observa la radiación descubierta en 1934 por S. I. Vavílov y P. A. Cherenkov.

---

[1]) El coeficiente de proporcionalidad de la fórmula (109.6) es igual a $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}/6\pi c^2 = 20/c^2$ en el SI y a $2/(3c^3)$ en el sistema de Gauss.

TERCERA PARTE

ÓPTICA

CAPÍTULO XVI

CONOCIMIENTOS PREVIOS

§ 110. Onda luminosa

La luz es un fenómeno complejo: en unos casos se comporta como onda electromagnética, en otros, como flujo de partículas especiales (fotones). En este tomo se estudia la *óptica ondulatoria*, es decir, el conjunto de fenómenos, en cuya base se encuentra la naturaleza ondulatoria de la luz. Los fenómenos debidos a la naturaleza corpuscular[1]) de la luz se estudiarán en el tomo tercero.

En una onda electromagnética oscilan los vectores **E** y **H**. La experiencia demuestra que las acciones fisiológicas, fotoquímicas, fotoeléctricas y otras de la luz se deben a las oscilaciones del vector eléctrico. De acuerdo con esto, en adelante se hablará de *vector luz*, entendiéndose por él el vector intensidad del campo eléctrico. Al vector magnético de la onda luminosa casi no vamos a recordarlo.

El módulo de la amplitud del vector luz lo designaremos generalmente con la letra A (y a veces por E_m). Respectivamente, la variación en el tiempo y en el espacio de la proyección del vector luz sobre la dirección, a lo largo de la cual oscila, se definirá por la ecuación

$$E = A\cos(\omega t - kr + \alpha). \tag{110.1}$$

Aquí k es el número de onda, y r, la distancia medida a lo largo de la dirección en que se propaga la onda luminosa. Para una onda plana que se propague en un medio no absorbente, $A = \text{const}$; para una onda esférica A disminuye como $1/r$ y así sucesivamente.

La razón de la velocidad de la onda luminosa en el vacío a la velocidad de fase v en un medio determinado se llama índice de refracción absoluto de dicho medio y se designa con la letra n. De este modo

$$n = \frac{c}{v}. \tag{110.2}$$

La comparación con la fórmula (104.10) da que $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Para la inmensa mayoría de las substancias transparentes μ no se diferencia

---

[1]) De corpúsculo, es decir, partícula.

prácticamente de la unidad. Por eso se puede considerar que

$$n=\sqrt{\varepsilon}. \qquad (110.3)$$

La fórmula (110.3) relaciona las propiedades ópticas de la substancia con sus propiedades eléctricas. A primera vista puede parecer que esta fórmula no es correcta. Por ejemplo, para el agua $\varepsilon = 81$, mientras que $n = 1{,}33$. Pero hay que tener presente que el valor $\varepsilon = 81$ se obtuvo por medio de mediciones electrostáticas. En los campos eléctricos rápidamente variables el valor de ε que se obtiene es otro, que depende de la frecuencia de las oscilaciones del campo. Esto explica la *dispersión* de la luz, es decir, la dependencia del índice de refracción (o la velocidad de la luz) de la frecuencia (o de la longitud de onda). La sustitución en la fórmula (110.3) del valor de ε, obtenido para la frecuencia correspondiente, conduce al valor correcto de n.

Los valores de los índices de refracción caracterizan la *densidad óptica* del medio. Los medios con n grande se dice que son ópticamente más densos que los medios con n menor. Respectivamente, los medios con n menor se dice que son ópticamente menos densos que los medios con n mayor.

Las longitudes de las ondas de la luz visible se encuentran entre los límites

$$\lambda_0 = 0{,}40\ \ldots\ 0{,}76\ \mu\text{m}\ (4000\ \ldots\ 7600\ \text{Å}). \qquad (110.4)$$

Estos valores se refieren a las ondas luminosas en el vacío. En una substancia las longitudes de las ondas luminosas serán otras. En el caso de oscilaciones de frecuencia ν, la longitud de onda en el vacío será $\lambda_0 = c/\nu$. En un medio en el que la velocidad de fase de la onda luminosa sea $v = c/n$, la longitud de onda tiene el valor $\lambda = v/\nu = c/\nu n = \lambda_0/n$. De este modo, la longitud de la onda luminosa en un medio con índice de refracción n está ligada con la longitud de onda en el vacío por la relación

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n}. \qquad (110.5)$$

Las frecuencias de las ondas luminosas visibles se encuentran entre los límites

$$\nu = (0{,}39\ \ldots\ 0{,}75)\cdot 10^{15}\ \text{Hz}. \qquad (110.6)$$

La frecuencia con que varía el vector densidad del flujo de energía transportado por la onda será aún mayor (igual a 2ν). Ni el ojo, ni ningún receptor de energía luminosa pueden seguir unas variaciones tan frecuentes del flujo de energía, por lo que sólo registran el flujo promediado respecto del tiempo. El módulo del valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía transportado por la onda luminosa recibe el nombre de *intensidad de la luz* I en el punto

dado del espacio. La densidad del flujo de energía electromagnética viene determinada por el vector de Poynting **S**. Por consiguiente,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [\mathbf{EH}] \rangle|. \qquad (110.7)$$

El promedio se hace por el tiempo de «respuesta» del aparato, que, como se indicó, es mucho mayor que el período de las oscilaciones de la onda. La intensidad se mide en unidades de energía (por ejemplo, en W/m^2) o en unidades ópticas llamadas «lumen por metro cuadrado» (véase el § 114).

Según la fórmula (105.12), los módulos de la amplitud de los vectores **E** y **H** en la onda electromagnética están ligados por la relación

$$E_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0} = H_m \sqrt{\mu_0}$$

(hemos supuesto $\mu = 1$). De aquí se sigue qúe

$$H_m = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m = nE_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}},$$

donde n es el índice de refracción del medio en que se propaga la onda. De este modo, H_m es proporcional a E_m y n:

$$H_m \sim nE_m. \qquad (110.8)$$

El módulo del valor medio del vector de Poynting es proporcional a $E_m H_m$. Por eso se puede escribir que

$$I \sim nE_m^2 = nA^2 \qquad (110.9)$$

(el coeficiente de proporcionalidad es igual a $^1/_2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$). Por lo tanto, la intensidad de la luz es proporcional al índice de refracción del medio y al cuadrado de la amplitud de la onda luminosa.

Advertimos que cuando se estudia la propagación de la luz en un medio homogéneo se puede considerar que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda luminosa:

$$I \sim A^2. \qquad (110.10)$$

ero en el caso de que la luz pase a través del límite de separación de distintos medios, la expresión de la intensidad que no tiene en cuenta el factor n conduce a la no conservación del flujo luminoso.

Las líneas, a lo largo de las cuales se propaga la energía luminosa, se llaman *rayos*. El vector de Poynting promediado $\langle \mathbf{S} \rangle$ está dirigido en cada punto según la tangente al rayo. En los medios isótropos la dirección de $\langle \mathbf{S} \rangle$ coincide con la normal a la superficie de onda, es decir, con la dirección del vector de onda **k**. Por consiguiente, los rayos son perpendiculares a las superficies de onda. En los medios anisótropos, la normal a la superficie de onda no coincide en general con la dirección del vector de Poynting, de modo que los rayos no son ortogonales respecto de la superficie de onda.

A pesar de que las ondas luminosas son transversales, de ordinario no manifiestan asimetría respecto al rayo. Esto se debe a que en la luz *natural* (es decir, en la que emiten las fuentes ordinarias) existen oscilaciones que se realizan en las direcciones más diversas perpendiculares al rayo (fig. 110.1). La radiación de un cuerpo luminoso está formada por las ondas que emiten sus átomos. El proceso de radiación de un átomo aislado dura aproximadamente 10^{-8} s. Este tiempo es suficiente para que origine una sucesión de crestas y valles (o, como suele decirse, un *tren de ondas*) de, aproximadamente, 3 m de longitud. Después de «apagarse», al cabo de cierto tiempo el átomo vuelve a «resplandecer». Al mismo tiempo «resplandecen» muchos átomos. Los trenes de ondas excitados por ellos se superponen entre sí y forman la onda luminosa emitida por el cuerpo. El plano de oscilaciones de cada tren de ondas está orientado casualmente. Por eso, en la onda resultante las oscilaciones en distintas direcciones están representadas con igual probabilidad.

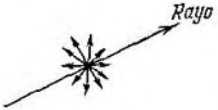


Fig. 110.1.

En la luz natural las oscilaciones en distintas direcciones se sustituyen unas a otras rápida y desordenadamente. Una luz en la cual la dirección de las oscilaciones esté ordenada de un modo cualquiera, se denomina *polarizada*. Si las oscilaciones del vector luz tienen lugar solamente en un plano que pase por el rayo, se dice que la polarización es *rectilínea* o que la luz está *planopolarizada*. La ordenación puede consistir en que el vector **E** gire alrededor del rayo, pulsando al mismo tiempo en magnitud. Como resultado de esto el extremo del vector **E** describe una elipse. Esta polarización se llama *elíptica*. Si el extremo del vector **E** describe una circunferencia, la polarización es *circular*.

En los capítulos XVII y XVIII se tratará de la luz natural. Por eso la dirección de las oscilaciones del vector luz no nos va a interesar particularmente. Los procedimientos para obtener luz polarizada y las propiedades de ésta se estudiarán en el capítulo XIX.

§ 111. Representación de las funciones armónicas por medio de los exponentes

Formemos la suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \\ = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2). \qquad (111.1)$$

De (111.1) se sigue que la parte real de la suma de dos números complejos es igual a la suma de las partes reales de los sumandos:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2. \tag{111.2}$$

Supongamos que un número complejo es función de cierto parámetro, por ejemplo, del tiempo t:

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Tomando la diferencial de esta función respecto de t, obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}.$$

De aquí se infiere que la parte real de la derivada de z respecto de t es igual a la derivada respecto de t de la parte real de z:

$$\operatorname{Re}\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{Re} z. \tag{111.3}$$

Al integrar una función compleja se tiene una relación análoga. En efecto,

$$\int z(t)\,dt = \int x(t)\,dt + i\int y(t)\,dt,$$

de donde se deduce que la parte real de la integral de $z(t)$ es igual a la integral de la parte real de $z(t)$:

$$\operatorname{Re}\int z(t)\,dt = \int \operatorname{Re} z(t)\,dt. \tag{111.4}$$

Es evidente qué relaciones análogas a las (111.2), (111.3) y (111.4) tienen lugar también para las partes imaginarias de las funciones complejas.

De lo expuesto se infiere que cuando con funciones complejas se hacen operaciones de suma, diferenciación o integración, así como combinaciones lineales de estas operaciones, la parte real (o la imaginaria) del resultado coincide con el resultado que se obtendría si se efectuaran operaciones análogas con las partes reales (o imaginarias) de las mismas funciones [1]). Designando con el símbolo $\widetilde{L}$ la combinación lineal de las operaciones antes enumeradas, se puede escribir:

$$\operatorname{Re}\widetilde{L}(z_1, z_2, \ldots) = \widetilde{L}(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \ldots). \tag{111.5}$$

La propiedad de las operaciones lineales que hemos establecido permite aplicar el siguiente procedimiento de cálculo: al efectuar operaciones lineales con funciones armónicas de la forma

$$a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha),$$

[1]) Advertimos que esta regla no es aplicable a las operaciones no lineales, como, por ejemplo, la multiplicación de funciones, la elevación al cuadrado, etc.

sustituir estas funciones por los exponentes

$$ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = \hat{a}e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \qquad (111.6)$$

donde $\hat{a} = ae^{i\alpha}$ es un número complejo llamado *amplitud compleja*. Con esta representación se puede efectuar la suma, la derivación respecto de las variables t, x, y, z y la integración, respecto de estas variables, de las funciones. Al hacer los cálculos se debe tomar la parte real del resultado obtenido. La conveniencia de este procedimiento se explica porque los cálculos con exponentes son mucho más sencillos que los que se hacen con las funciones trigonométricas.

Al pasar a la representación (111.6), en esencia, añadimos a todas las funciones de la forma $a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$ los sumandos $ia \operatorname{sen}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$. Se recordará que este procedimiento se empleó ya al estudiar las oscilaciones forzadas (véase el § 60 del tomo 1°).

§ 112. Reflexión y refracción de una onda plana en el límite entre dos dieléctricos

Sea una onda electromagnética plana que incida sobre el límite de separación entre dos dieléctricos homogéneos e isótropos. El dieléctrico, en el cual se propaga la onda incidente, se caracteriza por la permitividad ε_1; el segundo dieléctrico, por la permitividad ε_2. Las permeabilidades magnéticas las suponemos iguales a la unidad. La experiencia demuestra que en este caso, además de la onda plana refractada que se propaga en el segundo dieléctrico, surge una onda plana reflejada que se propaga en el primer dieléctrico.

Determinemos la dirección en que se propaga la onda incidente valiéndonos del vector de onda $\mathbf{k}$; la onda reflejada, con ayuda del vector $\mathbf{k}'$ y, finalmente, la onda refractada, por medio del vector $\mathbf{k}''$. Hallemos cómo se relacionan las direcciones de $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{k}''$ con la dirección de $\mathbf{k}$. Esto se puede hacer aprovechando que en el límite de separación de dos dieléctricos debe cumplirse la condición

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (112.1)$$

Aquí $E_{1\tau}$ y $E_{2\tau}$ son las componentes tangenciales de la intensidad del campo eléctrico en los medios primero y segundo, respectivamente.

En el § 21 se demostró la relación (112.1) para los campos electrostáticos (véase la fórmula (21.4)). Pero esta fórmula es fácil extenderla a los campos que varían con el tiempo. Según la ecuación (71.1), que se determina por la expresión (21.2), la circulación de $\mathbf{E}$ en el caso de campos alternativos no debe ser nula, sino igual a la integral $\int (-\dot{\mathbf{B}})\, d\mathbf{S}$ tomada sobre la superficie del contorno representado

en la fig. 21.1:

$$\oint E_l\,dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b\rangle\,2b = -\int\limits_{S=a\cdot b} \dot{\mathbf{B}}\,d\mathbf{S}.$$

Como $\dot{\mathbf{B}}$ es finita, al pasar al límite $b \to 0$ la integral del segundo miembro se anula y llegamos a la condición (21.3), de la cual se sigue (21.4).

Supongamos que el vector **k**, que determina la dirección en que se propaga la onda incidente, se encuentra en el plano de la figura (fig. 112.1). La dirección de la normal a la superficie de separación la caracterizamos por el vector **n**. El plano en que se encuentran los vectores **k** y **n** se llama *plano de incidencia* de la onda. Tomamos como eje x la línea de intersección del plano de incidencia con el límite de separación de los dieléctricos. El eje y lo dirigimos perpendicularmente al plano de dicha separación. Entonces el eje z será perpendicular al plano de incidencia y el vector $\boldsymbol{\tau}$ resulta dirigido a lo largo del eje x (véase la fig. 112.1).

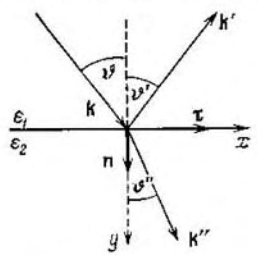


Fig. 112.1.

Por razones de simetría está claro que los vectores **k'** y **k''** sólo pueden estar en el plano de incidencia (los medios son homogéneos e isótropos). En efecto, supongamos que, por ejemplo, el vector **k'** se desviara de dicho plano «hacia nosotros». Pero no existe fundamento para preferir esta desviación a otra igual que ella en sentido opuesto. Por eso la única dirección posible resulta ser aquella en que el vector **k'** se encuentra en el plano de incidencia. Razonamientos análogos son también válidos para el vector **k''**.

Separemos del rayo incidente natural un rayo componente planopolarizado, en el cual la dirección de las oscilaciones del vector **E** forme con el plano de incidencia un ángulo arbitrario. Las oscilaciones del vector **E** en la onda electromagnética plana que se propaga en el sentido del vector **k** las define la función[1])

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

(con la elección que hemos hecho de los ejes de coordenadas, la proyección del vector **k** sobre el eje z es nula, por lo que en el exponente no figura el sumando $-k_z z$). A expensas de la elección del punto de referencia de t hemos anulado la fase inicial de la onda.

[1]) Más exactamente, la parte real de esta función, pero nosotros, para simplificar, diremos, simplemente la función.

Las intensidades en las ondas reflejada y refractada se determinan por medio de expresiones análogas:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}, \quad \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}$$

(α' y α'' son las fases iniciales de las respectivas ondas).

El campo resultante en el primer medio es

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \mathbf{E}'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}. \quad (112.2)$$

Y en el segundo medio

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}. \quad (112.3)$$

Según (112.1), las componentes tangenciales de las expresiones (112.2) y (112.3) sobre la superficie de separación, o sea, para $y = 0$, deben ser iguales. Por lo tanto, llegamos a la relación

$$E_{m\tau} e^{i(\omega t - k_x x)} + E'_{m\tau} e^{i(\omega' t - k'_x x + \alpha')} = E''_{m\tau} e^{i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')}. \quad (112.4)$$

Para que la condición (112.4) se cumpla cualquiera que sea t, es necesario que todas las frecuencias sean iguales:

$$\omega = \omega' = \omega''. \quad (112.5)$$

Para cerciorarnos de esto escribimos la igualdad (112.4) en la forma

$$ae^{i\omega t} + be^{i\omega' t} = ce^{i\omega'' t},$$

donde los factores a, b y c no dependen de t. La igualdad que hemos escrito es equivalente a las dos siguientes:

$a \cos \omega t + b \cos \omega' t = c \cos \omega'' t$, $a \operatorname{sen} \omega t + b \operatorname{sen} \omega' t = c \operatorname{sen} \omega'' t$.

La suma de dos funciones armónicas también será una función armónica únicamente en el caso de que las funciones que se suman tengan iguales frecuencias. La función armónica que se obtiene como resultado de la suma tiene la misma frecuencia que las funciones sumadas. De aquí se sigue la relación (112.5). De este modo llegamos a la conclusión de que las frecuencias de las ondas reflejada y refractada coinciden con la frecuencia de la onda incidente.

Para que la condición (112.4) se cumpla cualquiera que sea x, se necesita que sean iguales las proyecciones de los vectores de onda sobre el eje x:

$$k_x = k'_x = k''_x. \quad (112.6)$$

Los ángulos ϑ, ϑ' y ϑ'' que muestra la figura 112.1 se llaman, respectivamente, *ángulo de incidencia*, *ángulo de reflexión* y *ángulo de refracción*. Por la figura se ve que $k_x = k \operatorname{sen} \vartheta$, $k'_x = k' \operatorname{sen} \vartheta'$, y $k''_x = k'' \operatorname{sen} \vartheta''$. Por eso la relación (112.6) se puede escribir en la forma

$$k \operatorname{sen} \vartheta = k' \operatorname{sen} \vartheta' = k'' \operatorname{sen} \vartheta''.$$

Los vectores **k** y **k**′ tienen módulos iguales entre sí y a ω/v_1; el módulo del vector **k**″ es igual a ω/v_2. Por consiguiente,

$$\frac{\omega}{v_1}\operatorname{sen}\vartheta=\frac{\omega}{v_1}\operatorname{sen}\vartheta'=\frac{\omega}{v_2}\operatorname{sen}\vartheta''.$$

De aquí se infiere que

$$\vartheta'=\vartheta, \tag{112.7}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta''}=\frac{v_1}{v_2}=n_{12}\,. \tag{112.8}$$

Las relaciones que hemos obtenido se cumplen cualquiera que sea el rayo planopolarizado componente del rayo natural. Por lo tanto son válidas también para el rayo natural en conjunto.

La relación (112.7) expresa la *ley de la reflexión de la luz*, según la cual *el rayo reflejado se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y que la normal levantada en el punto de incidencia; el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.*

La relación (112.8) expresa *la ley de la refracción de la luz*, que se enuncia del modo siguiente: *el rayo refractado se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y que la normal levantada en el punto de incidencia; la razón del seno del ángulo de incidencia al seno del ángulo de refracción es una magnitud constante para substancias dadas.*

La magnitud n_{12} que figura en la fórmula (112.8) se llama *índice relativo de refracción* de la segunda substancia con respecto a la primera. Representemos esta magnitud en la forma

$$n_{12}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{c}{v_2}\,\frac{v_1}{c}=\frac{c/v_2}{c/v_1}=\frac{n_2}{n_1}\,. \tag{112.9}$$

Así, el índice relativo de refracción de dos substancias es igual a la razón de sus índices de refracción absolutos.

Sustituyendo en la fórmula (112.8) n_{12} por la relación n_2/n_1, se puede representar la ley de la refracción en la forma

$$n_1\operatorname{sen}\vartheta=n_2\operatorname{sen}\vartheta''. \tag{112.10}$$

Por esta fórmula se ve que cuando la luz pasa de un medio ópticamente más denso a un medio ópticamente menos denso, el rayo se aleja de la normal a la superficie de separación de los medios. El aumento del ángulo de incidencia ϑ va acompañado de un crecimiento más rápido del ángulo de refracción ϑ'', y cuando el ángulo ϑ llega al valor

$$\vartheta_{\text{lím}}=\operatorname{arcsen} n_{12} \tag{112.11}$$

el ángulo ϑ'' se hace igual a $\pi/2$. El ángulo determinado por la fórmula (112.11) recibe el nombre de *ángulo límite.*

La energía que lleva consigo el rayo incidente se distribuye entre los rayos reflejado y refractado. A medida que aumenta el ángulo

de incidencia crece la intensidad del rayo reflejado y decrece la intensidad del rayo refractado, la cual se anula en el ángulo límite. Cuando los ángulos de incidencia están comprendidos entre los límites de ϑ_{lim} a $\pi/2$, la onda luminosa penetra en el segundo medio hasta una distancia del orden de la longitud de onda λ y después retorna al primer medio. Este fenómeno se llama *reflexión total (interna)*.

Hallemos la relación entre las amplitudes y las fases de las ondas incidente y reflejada. Para simplificar nos limitaremos al caso de la incidencia normal de una onda plana sobre la superficie de separación de dieléctricos homogéneos e isótropos, cuyos índices de refracción sean n_1 y n_2. Designemos las componentes eléctricas de las ondas incidente, reflejada y refractada por **E**, **E**′ y **E**″, respectivamente, y las componentes magnéticas por **H**, **H**′ y **H**″. De las razones de simetría se sigue que las oscilaciones de los vectores **E**′ y **E**″ se efectúan a lo largo de la misma dirección que las oscilaciones de vector **E**. Análogamente, las oscilaciones de los vectores **H**′ y **H**″ tienen lugar a lo largo de la dirección del vector **H**.

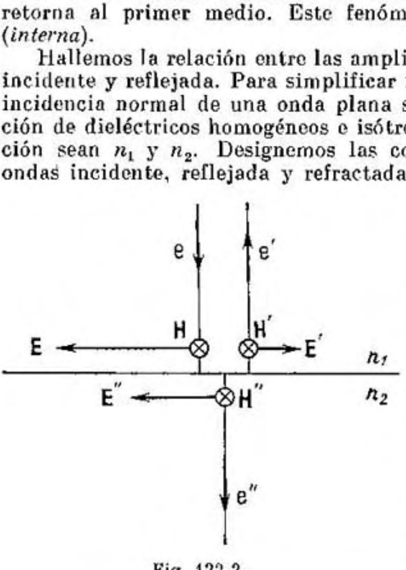


Fig. 122.2.

En este caso los componentes normales de los vectores **E** y **H** son nulos. Por eso los componentes tangenciales de estos vectores coinciden con los vectores mismos. En la fig. 112.2 se representan los valores instantáneos de los vectores **E** y **H** en las ondas incidente, reflejada y refractada. En esta figura se muestran también los versores **e**, **e**′ y **e**″ de las direcciones, a lo largo de las cuales se propagan las respectivas ondas. La figura se ha dibujado suponiendo que los vectores **E** y **E**″ tienen el mismo sentido, y los vectores **E** y **E**′, sentidos opuestos (en este caso el sentido de los vectores **H**, **H**′ y **H**″ es hacia detrás de la figura). Las relaciones efectivas entre las direcciones de los vectores se determinan haciendo los cálculos.

Los módulos de los vectores **E** y **H** están ligados por la relación $H = nE\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$ (véase el texto que precede a la fórmula (110.8); las relaciones obtenidas para los valores de las amplitudes de E y H son válidas también para sus valores instantáneos). La tríada de los vectores **E**, **H**, **e** forma un sistema dextrógiro. Teniendo en cuenta

lo expuesto, se puede escribir que

$$\mathbf{H} = n_1 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,[\mathbf{eE}] \tag{112.12}$$

(véase la fig. 112.2). Relaciones análogas existen también para los vectores en las ondas reflejada y refractada.

Escribamos las condiciones de continuidad de los componentes tangenciales de los vectores **E** y **H** (véanse las fórmulas (21.4) y (54.6)):

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}'', \tag{112.13}$$

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H}''. \tag{112.14}$$

Hay que recordar que el valor de los vectores se toma en la inmediación del límite de separación.

Sustituyendo en (112.14) los vectores **H** por los **E**, de acuerdo con la fórmula (112.12), obtenemos (después de simplificar por $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$)

$$n_1\,[\mathbf{eE}] + n_1\,[\mathbf{e}'\mathbf{E}'] = n_2\,[\mathbf{e}''\mathbf{E}''].$$

Tomando en consideración que $\mathbf{e} = \mathbf{e}'' = -\mathbf{e}'$, transformamos la última relación como sigue:

$$n_1\,[\mathbf{eE}] - n_1\,[\mathbf{eE}'] = n_2\,[\mathbf{eE}''].$$

De aquí

$$[\mathbf{e},\ n_1\mathbf{E}] = [\mathbf{e},\ (n_1\mathbf{E}' + n_2\mathbf{E}'')].$$

Como los vectores **e** y **E** son perpendiculares entre sí, de la igualdad obtenida se deduce que

$$n_1\mathbf{E} = n_1\mathbf{E}' + n_2\mathbf{E}''. \tag{112.15}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (112.13) y (112.15), obtenemos las relaciones

$$\mathbf{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\,\mathbf{E}, \tag{112.16}$$

$$\mathbf{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\,\mathbf{E}. \tag{112.17}$$

De la fórmula (112.17) se infiere que los vectores **E** y **E**″ tienen en cada instante igual sentido. De aquí concluimos que las oscilaciones en las ondas incidente y transmitida al segundo medio se efectúan en el límite de separación en la misma fase, es decir, cuando la onda pasa a través de dicho límite la fase no sufre ningún salto.

De la fórmula (112.16) se deduce que si $n_2 < n_1$ el sentido del vector **E**′ coincide con el del vector **E**. Esto significa que las oscilaciones en las ondas incidente y reflejada se efectúan en el límite de separación en la misma fase, o sea, que la fase de la onda no varía durante la reflexión. Pero si $n_2 > n_1$, el sentido del vector **E**′ es opuesto al del **E**. Esto significa que las oscilaciones en las ondas incidente y reflejada se efectúan en el límite de separación en oposi-

ción de fase, es decir, que la fase de la onda cambia de un salto en π. El resultado obtenido es válido también cuando la onda incide oblicuamente sobre el límite de separación de dos medios transparentes (véase el § 135). Hay que señalar que los sentidos de los vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{E}''$ que muestra la fig. 112.2 están de acuerdo con el resultado del cálculo para el caso en que $n_2 > n_1$.

Así, pues, al reflejarse una onda luminosa en el límite de separación de un medio ópticamente menos denso con un medio ópticamente más denso ($n_1 < n_2$), la fase de las oscilaciones del vector luz sufre una variación igual a π, y si la reflexión tiene lugar en el límite de separación de un medio ópticamente más denso con un medio ópticamente menos denso ($n_1 > n_2$), esta variación de fase no se produce.

Sustituyendo en la expresión $n_1\mathbf{E}'^2 + n_2\mathbf{E}''^2$ los valores (112.16) y (112.17) de $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{E}''$ llegamos, después de hacer transformaciones fáciles, a la relación

$$n_1E^2 = n_1E'^2 + n_2E''^2.$$

Esta relación se ha obtenido para valores instantáneos de E. Una relación análoga sirve también para los valores de amplitud del vector luz:

$$n_1E_m^2 = n_1E_m'^2 + n_2E_m''^2. \qquad (112.18)$$

Según (110.9), la expresión $n_1E_m^2$ se puede interpretar como una magnitud proporcional a la intensidad I de la onda incidente; $n_1E_m'^2$, como una magnitud proporcional a la intensidad I' de la onda reflejada, y $n_2E_m''^2$, como una magnitud proporcional a la intensidad I'' de la onda refractada. De este modo, la relación (112.18) expresa la ley de la conservación de la energía.

Las relaciones obtenidas permiten hallar el *índice de reflexión* ρ y el *índice de transmisión* τ de la onda luminosa (para el caso de la incidencia normal sobre el límite de separación de dos medios transparentes). En efecto, por definición

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1E_m'^2}{n_1E_m^2}.$$

Sustituyendo en esta expresión la relación E_m'/E_m que se obtiene de (112.16), llegamos a la fórmula

$$\rho = \left(\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1}\right)^2, \qquad (112.19)$$

donde $n_{12} = n_2/n_1$ es el índice de refracción del segundo medio con respecto al primero.

Para el índice de transmisión se obtiene la expresión

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2E_m''^2}{n_1E_m^2} = n_{12}\left(\frac{2}{n_{12}+1}\right)^2. \qquad (112.20)$$

Es fácil cerciorarse de que la suma $\rho + \tau$, como debe ser, es igual a la unidad.

Advertimos que la sustitución en la fórmula (112.19) de n_{12} por la magnitud recíproca $n_{21} = 1/n_{12}$ no varía el valor de ρ. Por consiguiente, el índice de reflexión de la superficie de separación de los dos medios dados tiene el mismo valor para los dos sentidos de propagación de la luz.

El índice de refracción de los vidrios es aproximadamente igual a 1,5. La sustitución de $n_{12} = 1{,}5$ en la fórmula (112.19) da $\rho = 0{,}04$. Por lo tanto, cada superficie de una lámina de vidrio refleja (si la incidencia se aproxima a la normal) cerca del 4% de la energía luminosa que incide sobre ella.

§ 113. Flujo luminoso

Toda onda luminosa real es una superposición de ondas, cuyas longitudes están comprendidas en cierto intervalo $\Delta\lambda$. Este intervalo sigue siendo finito incluso para la luz monocromática. En la luz blanca $\Delta\lambda$ abarca toda la gama de ondas electromagnéticas que percibe el ojo humano, es decir, que se extiende desde 0,40 hasta 0,76 μm.

La distribución del flujo de energía entre las ondas se puede caracterizar por medio de la función de distribución

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \qquad (113.1)$$

en la que $d\Phi_e$ es el flujo de energía correspondiente a las longitudes de onda desde λ hasta $\lambda + d\lambda$. Conociendo la forma de la función (113.1) se puede calcular el flujo de energía transportado por las ondas comprendidas en un intervalo finito desde λ_1 hasta λ_2:

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda)\, d\lambda. \qquad (113.2)$$

La acción de la luz sobre el ojo (sensación luminosa) depende en alto grado de la longitud de onda. Esto es fácil de comprender si se tiene en cuenta que las ondas electromagnéticas con λ menor que 0,40 μm y mayor que 0,76 μm no producen sensación visual. La sensibilidad del ojo humano normal medio a la radiación de distinta longitud de onda la da la *curva de sensibilidad espectral relativa* (fig. 113.1). Sobre el eje horizontal se ha tomado la longitud de onda λ, y sobre el eje vertical, la sensibilidad espectral relativa $V(\lambda)$. La sensibilidad máxima del ojo corresponde a la radiación, cuya longitud de onda es de 0,555 μm [1]) (parte verde del espectro).

[1]) Es interesante que en la radiación solar esta longitud de onda está representada con la mayor intensidad.

La función $V(\lambda)$ para esta longitud de onda se toma como unidad. A igualdad del flujo de energía, la intensidad de la luz de otras longitudes de onda valorada visualmente resulta ser menor. Respectivamente, $V(\lambda)$ también es menor que la unidad para estas longitudes de onda. Los valores de la función $V(\lambda)$ son inversamente proporcionales a los valores de los flujos de energía que, por su intensidad, producen la misma sensación visual:

$$\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{(d\Phi_e)_2}{(d\Phi_e)_1}.$$

Por ejemplo, $V(\lambda) = 0{,}5$ significa que para obtener una sensación visual de la misma intensidad, la luz de la longitud de onda dada

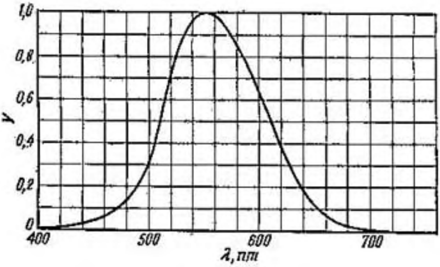


Fig. 113.1.

debe tener una densidad de flujo de energía dos veces mayor que la luz para la cual $V(\lambda) = 1$. Fuera del intervalo de las longitudes de onda visibles, la función $V(\lambda)$ es nula.

Para caracterizar la intensidad de la luz teniendo en cuenta su capacidad para producir sensación visual, se introduce la magnitud Φ, llamada *flujo luminoso*. Para un intervalo $d\lambda$ el flujo luminoso se define como el producto del flujo de energía por el valor correspondiente de la función $V(\lambda)$:

$$d\Phi = V(\lambda)\, d\Phi_e. \tag{113.3}$$

Expresando el flujo de energía por medio de la función de distribución de la energía entre las ondas (véase (113.1)), obtenemos

$$d\Phi = V(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{113.4}$$

El flujo luminoso total es

$$\Phi = \int_0^\infty V(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{113.5}$$

La función $V(\lambda)$ es una magnitud adimensional. Por consiguiente, la dimensión del flujo luminoso coincide con la dimensión del flujo de energía. Esto permite definir el flujo luminoso como un flujo de energía luminosa que se valora por la sensación visual que produce.

§ 114. Magnitudes y unidades fotométricas

Se llama fotometría la parte de la óptica que trata de la medición de los flujos luminosos y de las magnitudes relacionadas con ellos.

Intensidad de la luz. Una fuente o foco de luz, cuyas dimensiones se puedan despreciar en comparación con la distancia desde el punto de observación hasta dicha fuente, se dice que es *puntual*. En un medio homogéneo e isótropo, la onda emitida por una fuente puntual será esférica. Para caracterizar las fuentes puntuales de luz se utiliza la *intensidad de la luz* I, que se define como el flujo de radiación de la fuente que corresponde a la unidad de ángulo sólido:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \tag{114.1}$$

($d\Phi$ es el flujo luminoso radiado por el foco dentro de los límites del ángulo sólido $d\Omega$).

En el caso general la intensidad de la luz depende de la dirección: $I = I(\vartheta, \varphi)$, ($\vartheta$ y φ son los ángulos polar y azimutal del sistema de coordenadas esférico). Si I no depende de la dirección, la fuente de luz se llama *isótropa*. Para una fuente isótropa

$$I = \Phi/4\pi, \tag{114.2}$$

donde Φ es el flujo luminoso total radiado por la fuente en todas las direcciones.

En el caso de una fuente extensa se puede hablar de la intensidad de la luz de un elemento dS de su superficie. Entonces en la fórmula (114.1) debe entenderse por $d\Phi$ el flujo luminoso radiado por el elemento de superficie dS dentro de los límites del ángulo sólido $d\Omega$.

La unidad de intensidad de la luz, la *candela* (cd), es una de las unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI). Su valor se toma tal, que la luminancia (véase más adelante) del radiador completo a la temperatura de solidificación del platino sea igual a 60 cd por 1 cm². Por radiador completo o ideal se entiende un dispositivo que posee las propiedades del cuerpo negro (véase el tomo 3º).

Flujo luminoso. La unidad de flujo luminoso es el *lumen* (lm). Este es igual al flujo luminoso radiado por una fuente isótropa, cuya intensidad de la luz sea de 1 cd dentro de los límites de un ángulo sólido igual a un estereorradián:

$$1\ \text{lm} = 1\ \text{cd}\cdot 1\ \text{sr}. \tag{114.3}$$

Empíricamente se ha establecido que al flujo luminoso de 1 lm originado por una radiación de longitud de onda $\lambda = 0{,}555$ μm le corresponde un flujo de energía de 0,0016 W. Al flujo luminoso de 1 lm debido a una radiación de otra longitud de onda λ le corresponde un flujo de energía

$$\Phi_e = 0{,}0016/V(\lambda)\ \text{W}. \qquad (114.4)$$

Iluminación. El grado de iluminación de una superficie por la luz que incide sobre ella se caracteriza por la magnitud

$$E = \frac{d\Phi_{\text{inc}}}{dS}, \qquad (114.5)$$

llamada *iluminación* ($d\Phi_{\text{inc}}$ es el flujo luminoso que incide sobre el elemento de superficie dS).

La unidad de iluminación es el *lux* (lx), igual a la iluminación que crea el flujo de 1 lm distribuido uniformemente por la superficie de 1 m²:

$$1\ \text{lx} = 1\ \text{lm} : 1\ \text{m}^2. \qquad (114.6)$$

La iluminación E creada por una fuente puntual se puede expresar por medio de la intensidad de la luz I, la distancia r desde la superfi-

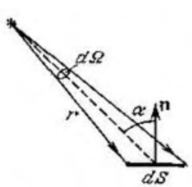


Fig. 114.1.

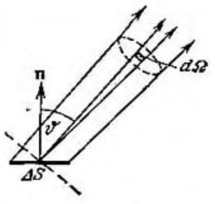


Fig. 114.2.

cie iluminada hasta la fuente, y el ángulo α entre la normal **n** a dicha superficie y la dirección a la fuente. Sobre la superficie dS (fig. 114.1) incide el flujo $d\Phi_{\text{inc}} = I\,d\Omega$ comprendido dentro de los límites del ángulo sólido $d\Omega$ que descansa sobre dS. El ángulo $d\Omega$ es igual a $dS\cos\alpha/r^2$. Por lo tanto, $d\Phi_{\text{inc}} = I\,dS\cos\alpha/r^2$. Dividiendo este flujo por dS, obtenemos

$$E = \frac{I\cos\alpha}{r^2} \qquad (114.7)$$

Emitancia luminosa. Una fuente de luz extensa se puede caracterizar por la *emitancia luminosa* M de sus distintas partes, entendiéndose por ésta el flujo luminoso emitido por la unidad de superficie hacia fuera en todas las direcciones (dentro de los límites de los valores de ϑ desde 0 hasta $\pi/2$; ϑ es el ángulo que forma la dirección

dada con la normal exterior a la superficie):

$$M = \frac{d\Phi_{\text{emit}}}{dS} \tag{114.8}$$

($d\Phi_{\text{emit}}$ es el flujo emitido hacia fuera en todas las direcciones por un elemento de superficie dS de la fuente).

La emitancia luminosa puede producirse a expensas de la reflexión por una superficie de la luz que incide sobre ella. Entonces se entiende por $d\Phi_{\text{emit}}$, en la fórmula (114.8), el flujo reflejado por un elemento dS de la superficie en todas las direcciones.

La unidad de emitancia luminosa es el *lumen por metro cuadrado* (lm/m^2).

Luminancia. La emitancia luminosa caracteriza la radiación (o reflexión) de luz por un punto dado de una superficie en todas las direcciones. Para caracterizar la radiación (reflexión) de la luz en una dirección determinada sirve la *luminancia* L. La dirección puede darse por medio del ángulo polar ϑ (medido desde la normal exterior $\mathbf{n}$ a la superficie radiante ΔS) y del ángulo azimutal φ. La luminancia se define como la razón de la intensidad de la luz de la superficie elemental ΔS en la dirección dada, a la proyección de la superficie ΔS sobre un plano perpendicular a la dirección tomada.

Consideremos el ángulo sólido elemental $d\Omega$ que descansa sobre la superficie luminosa ΔS y está orientado en la dirección (ϑ, φ) (fig. 114.2). La intensidad de la luz de la superficie ΔS en esta dirección, según la determina (114.1), es $I = d\Phi/d\Omega$, donde $d\Phi$ es el flujo luminoso que se propaga dentro de los límites del ángulo $d\Omega$. La proyección de ΔS sobre un plano perpendicular a la dirección (ϑ, φ) (en la fig. 114.2 la traza de este plano se representa con línea de trazos) será $\Delta S \cos\vartheta$. Por consiguiente, la luminancia

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega\, \Delta S \cos\vartheta}. \tag{114.9}$$

En el caso general la luminancia es diferente en distintas direcciones: $L = L(\vartheta, \varphi)$. Lo mismo que la emitancia luminosa, la luminancia puede ser utilizada para caracterizar una superficie que refleje la luz que incide sobre ella.

Según la fórmula (114.9), el flujo radiado por la superficie ΔS dentro de los límites del ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección determinada por ϑ y φ es

$$d\Phi = L(\vartheta, \varphi)\, d\Omega\, \Delta S \cos\vartheta. \tag{114.10}$$

Las fuentes, cuya luminancia es igual en todas las direcciones ($L = \text{const}$), se llaman *lambertianas* (porque se subordinan a la ley de Lambert) o *de coseno* (porque el flujo que emite un elemento de superficie de esta fuente es proporcional a $\cos\vartheta$). En rigor, la ley de Lambert sólo la cumple el cuerpo negro absolutamente.

La emitancia luminosa M y la luminancia L de una fuente lambertiana están ligadas entre sí por una relación simple. Para hallarla sustituimos en (114.10) $d\Omega = \text{sen}\,\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ y la expresión que se obtiene la integramos respecto de φ entre los límites de 0 a 2π, y respecto de ϑ, de 0 a $\pi/2$, teniendo en cuenta que $L = \text{const.}$ Como resultado hallamos el flujo luminoso total emitido hacia fuera en todas las direcciones por un elemento de superficie ΔS de la fuente lambertiana:

$$\Delta\Phi_{\text{emit}} = L\,\Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = \pi L\,\Delta S.$$

Dividiendo este flujo por ΔS, obtenemos la emitancia luminosa. Por lo tanto, para una fuente lambertiana

$$M = \pi L. \qquad (114.11)$$

De unidad de luminiscencia sirve la *candela por metro cuadrado* (cd/m^2). La luminiscencia de 1 cd/m^2 la posee una superficie plana, uniformemente luminosa, en la dirección de la normal a ella, si en esta dirección la intensidad de la luz de un metro cuadrado de la superficie es igual a una candela.

§ 115. Óptica geométrica

La longitud de las ondas luminosas que percibe el ojo humano es muy pequeña (del orden de 10^{-7} m). Por eso la propagación de la luz visible se puede considerar en primera aproximación prescindiendo de su naturaleza ondulatoria y suponiendo que la luz se propaga a lo largo de ciertas líneas llamadas *rayos*. En el caso extremo correspondiente a $\lambda \to 0$, las leyes de la óptica se pueden enunciar en el lenguaje de la geometría. De acuerdo con esto, la parte de la óptica en que se desprecia la finitud de la longitud de las ondas se llama *óptica geométrica*. También se le da el nombre de *óptica de los rayos luminosos*.

La base de la óptica geométrica la constituyen cuatro leyes: 1) la ley de la propagación rectilínea de la luz; 2) la ley de la independencia de los rayos luminosos, 3) la ley de la reflexión de la luz, y 4) la ley de la refracción de la luz.

La ley de la propagación rectilínea de la luz afirma que *en un medio homogéneo la luz se propaga rectilíneamente*. Esta ley es aproximada: cuando la luz pasa por orificios muy pequeños se observan desviaciones de su rectitud, tanto mayores cuanto menor es el orificio.

La ley de la independencia de los rayos luminosos establece que *los rayos, al intersecarse, no se perturban unos a otros*. Las intersecciones de los rayos no impiden que cada uno de ellos se propague independientemente de los otros. Esta ley sólo es justa si las intensidades

de la luz no son demasiado grandes. Cuando las intensidades son las que se consiguen con los láseres, la independencia de los rayos luminosos deja de observarse.

Las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz se enunciaron en el § 112 (véanse las fórmulas (112.7) y (112.8) y el texto posterior a ellas).

De fundamento de la óptica geométrica puede servir el principio establecido a mediados del siglo XVII por el matemático francés P. Fermat. De este principio se deducen las leyes de la propagación rectilínea, de la reflexión y de la refracción de la luz. Tal como lo enunció el mismo Fermat, este principio dice: *la luz se propaga por el camino para recorrer el cual es mínimo el tiempo que necesita.*

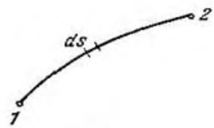


Fig. 115.1.

Para recorrer un trozo de camino ds (fig. 115.1) necesita la luz el tiempo $dt = ds/v$, donde v es la velocidad de la luz en el punto dado del medio. Sustituyendo v por c/n (véase (110.2)), obtenemos que $dt = (1/c)\, n\, ds$. Por consiguiente, el tiempo τ que tarda la luz en recorrer el camino desde el punto *1* hasta el punto *2*, será

$$\tau = \frac{1}{c}\int_1^2 n\, ds. \qquad (115.1)$$

La magnitud, con dimensión de longitud,

$$L = \int_1^2 n\, ds \qquad (115.2)$$

se llama *camino óptico* o *longitud del recorrido óptico*. En un medio homogéneo el camino óptico es igual al producto de la longitud geométrica s del camino por el índice de refracción n del medio:

$$L = ns. \qquad (115.3)$$

Según (115.1) y (115.2)

$$\tau = L/c. \qquad (115.4)$$

La proporcionalidad del tiempo de recorrido τ a la longitud del recorrido óptico L da la posibilidad de enunciar el principio de Fermat del modo siguiente: *la luz se propaga por el camino, cuya longitud óptica es mínima.* Más exactamente, la longitud del recorrido óptico debe ser extrema, es decir, mínima, máxima o estacionaria, igual para todos los caminos posibles. En este último caso todos los caminos de la luz entre dos puntos resultan ser *tautócronos* (del griego

tauto, el mismo, y *cronos*, tiempo, es decir, que requieren el mismo tiempo para ser recorridos).

Del principio de Fermat se infiere la reversibilidad de los rayos luminosos. En efecto, el camino óptico mínimo en el caso de la propagación de la luz desde el punto *1* hasta el punto *2*, también resulta ser mínimo en el caso de la propagación de la luz en sentido inverso. Por lo tanto, un rayo lanzado al encuentro del que recorre el camino del punto *1* al punto *2*, recorrerá este mismo camino, pero en sentido contrario.

Vamos a obtener, por medio del principio de Fermat, las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Supongamos que la luz del punto A llega al punto B después de reflejarse en la superficie

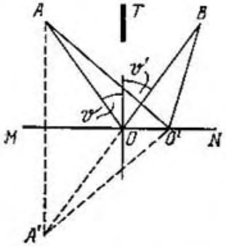


Fig. 115.2.

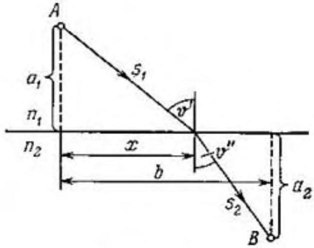


Fig. 115.3

MN (fig. 115.2; el camino directo de A a B lo intercepta la pantalla opaca T). El medio por el cual pasa el rayo es homogéneo. Por eso, la condición de longitud mínima del recorrido óptico se reduce a que su longitud geométrica sea mínima. La longitud geométrica de un camino tomado arbitrariamente $AO'B = A'O'B$ (el punto auxiliar A' es la imagen especular del punto A). Por la figura se ve que la longitud mínima es la del rayo que se refleja en el punto O, para el cual el ángulo de reflexión es igual al de incidencia. Advertimos que si el punto O' se aleja del O, la longitud geométrica del recorrido aumenta ilimitadamente, de manera que en este caso sólo existe un extremo, el mínimo.

Hallemos ahora el punto en que debe refractarse el rayo que se propaga del punto A al B para que la longitud del recorrido óptico sea extrema (fig. 115.3). Para un rayo arbitrario la longitud del recorrido óptico será

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}.$$

Para hallar el valor extremo se deriva L respecto de x y se iguala la derivada a cero:

$$\frac{dL}{dx}=\frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2+x^2}}-\frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}}=n_1\frac{x}{s_1}-n_2\frac{b-x}{s_2}=0.$$

Los factores de n_1 y n_2 son iguales respectivamente a sen ϑ y sen ϑ''. De este modo se obtiene la relación

$$n_1 \operatorname{sen} \vartheta = n_2 \operatorname{sen} \vartheta'',$$

que expresa la ley de la refracción (véase la fórmula (112.10)).

Consideremos la reflexión en la superficie interna de un elipsoide de revolución (fig. 115.4; F_1 y F_2 son los focos del elipsoide). De acuerdo con la definición del elipsoide, los caminos F_1OF_2, $F_1O'F_2$,

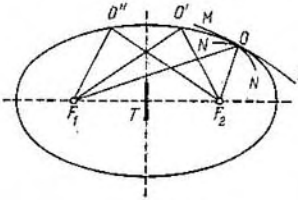


Fig. 115.4.

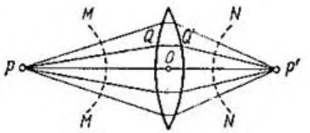


Fig. 115.5.

$F_1O''F_2$, etc., tienen la misma longitud. Por lo tanto, todos los rayos que parten del foco F_1 y que, después de reflejarse, llegan al foco F_2, son tautócronos. En este caso la longitud del recorrido óptico es estacionaria. Si la superficie del elipsoide se sustituye por la MM, cuya curvatura es menor y está orientada de forma que el rayo que parte del punto F_1, después de reflejarse en MM, incide sobre el punto F_2, el recorrido F_1OF_2 será mínimo. Para la superficie NN, de curvatura mayor que la del elipsoide, el recorrido F_1OF_2 será máximo.

Los caminos ópticos tienen también carácter estacionario cuando los rayos pasan a través de una lente (fig. 115.5). El rayo POP' recorre un camino más corto en el aire (donde el índice de refracción n es prácticamente igual a la unidad) y un camino más largo en el vidrio ($n \approx 1{,}5$). El rayo $PQQ'P'$ recorre un camino más largo en el aire, pero, en cambio, recorre un camino más corto en el vidrio. En definitiva, la longitud de los recorridos ópticos de todos los rayos resulta ser la misma. Por eso, los rayos son tautócronos y la longitud del recorrido óptico, estacionaria.

Examinemos una onda que se propague en un medio no homogéneo isótropo a lo largo de los rayos *1*, *2*, *3*, etc., (fig. 115.6). La no homogeneidad supondremos que es lo suficientemente pequeña para

que en trozos de rayo de longitud λ pueda considerarse constante el índice de refracción. Construimos las superficies de onda S_1, S_2, S_3, etc., de tal modo que las oscilaciones en los puntos de cada superficie siguiente tengan un retraso de fase de 2π respecto de las oscilaciones en los puntos de la superficie que la precede. Las oscilaciones de los puntos que se encuentran en un mismo rayo vienen descritas por la ecuación $\xi = a \cos(\omega t - kr + \alpha)$ (r es la distancia medida a lo largo del rayo). El retraso de fase se determina por la expresión $k\Delta r$, en la que Δr es la distancia entre las superficies contiguas. De la condición $k\Delta r = 2\pi$ obtenemos que $\Delta r = 2\pi/k = \lambda$. La longitud óptica de cada uno de los caminos de longitud geométrica λ es igual a $n\lambda = \lambda_0$ (véase (110.5)). Según (115.4), el tiempo τ que tarda la luz en recorrer cierto camino es proporcional a la longitud óptica de dicho camino. Por consiguiente, la igualdad de las longitudes ópticas significa la igualdad de los tiempos que tarda la luz en recorrer los respectivos caminos. Así, llegamos a la conclusión de que los trozos de rayos comprendidos entre dos superficies de onda tienen la misma longitud óptica y son tautócronos. En particular, son tautócronos los trozos de los rayos comprendidos entre las superficies de onda MM y NN representadas con líneas de trazos en la fig. 115.5.

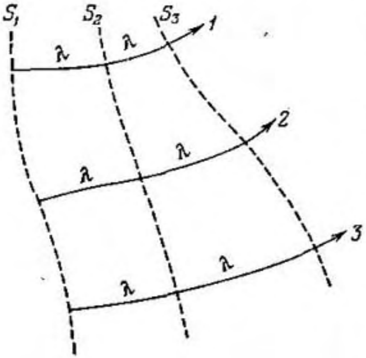


Fig. 115.6.

Del análisis que hemos hecho se deduce que el retraso de fase δ que se produce en el camino de longitud óptica L se determina por la expresión

$$\delta = \frac{L}{\lambda_0} 2\pi \tag{115.5}$$

(λ_0 es la longitud de la onda en el vacío).

§ 116. Sistema óptico centrado

Un conjunto de rayos forman un haz. Si los rayos al prolongarse se encuentran en un punto, el haz se llama homocéntrico. A un haz de rayos homocéntrico corresponde una superficie de onda esférica. En la fig. 116.1, *a* se muestra un haz homocéntrico convergente, y en la fig. 116.1, *b*, un haz homocéntrico divergente. Un caso par-

ticular de haz homocéntrico es el haz de rayos paralelos; a este haz corresponde una superficie de onda plana.

Todo sistema óptico efectúa una transformación de los haces luminosos. Si el sistema no altera la homocentricidad de los haces, los rayos que parten del punto P se cortan en un punto P'. Este punto es la *imagen óptica* del P. Si un punto cualquiera de un objeto da una imagen en forma de punto, esta imagen se llama *puntual* o *anastigmática*.

La imagen se dice que es *real*, si los rayos luminosos se cortan realmente en el punto P' (véase la fig. 116.1, *a*), y *virtual*, si en el punto P' se cortan las prolongaciones de los rayos trazadas en sentido contrario a aquel en que se propaga la luz (véase la fig. 116.1, *b*).

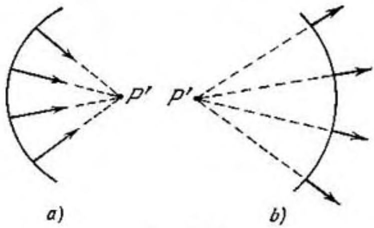


Fig. 116.1.

En virtud de la reversibilidad de los rayos luminosos, el foco de luz P y su imagen P' pueden trocar sus papeles, es decir, la fuente puntual situada en P' tendrá su imagen en P. Por esta razón P y P' se llaman *puntos conjugados*.

El sistema óptico que da una imagen anastigmática («estigmática»), geométricamente semejante al objeto representado, se llama *ideal*. Por medio de este sistema una continuidad espacial de puntos P da una imagen en forma de continuidad espacial de puntos P'. La primera de estas continuidades de puntos se denomina *espacio objeto*, la segunda, *espacio imagen*. En estos dos espacios los puntos, rectas y planos se corresponden unívocamente entre sí. Esta relación de dos espacios recibe en geometría el nombre de *correspondencia colineal*.

Un sistema óptico consiste en un conjunto de superficies reflectoras y refringentes que separan entre sí medios ópticamente homogéneos. Por lo general estas superficies suelen ser esféricas o planas (un plano se puede considerar como una esfera de radio infinito). Con menos frecuencia se utilizan superficies más complejas (elipsoide, hiperboloide, paraboloide de revolución y otras).

Un sistema óptico formado por superficies esféricas (y, en particular, planas) se llama *centrado* si los centros de todas las superficies se encuentran en una recta. Esta recta es el *eje óptico* del sistema.

A cada punto P o plano S del espacio objeto corresponde un punto P' o plano S', conjugado con él, del espacio imagen. Entre el conjunto infinito de puntos y planos conjugados existen puntos y planos que poseen propiedades especiales. Estos puntos y planos se llaman *cardinales*. A ellos pertenecen los puntos y planos *focales*,

principales y *nodales*. Las propiedades de un sistema óptico perfectamente centrado quedan totalmente determinadas si se dan sus puntos o planos cardinales.

Planos focales y focos de un sistema óptico. En la fig. 116.2 se muestran las superficies refringentes exteriores y el eje óptico de un sistema perfectamente centrado. Tomemos en el espacio objeto de este sistema un plano S perpendicular al eje óptico. De las razones de simetría se sigue que el plano S', conjugado de S, también será perpendicular al eje óptico. La traslación del plano S respecto del sistema hace que, respectivamente, se desplace el plano S'. Cuando el plano S está ya muy lejos, el ulterior aumento de su distancia al

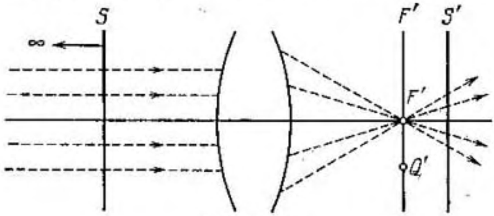


Fig. 116. 2.

sistema no produce prácticamente variación en la posición del plano S'. Esto significa que como resultado del alejamiento del plano S al infinito, el plano S' se encuentra en una determinada posición límite F'. El plano F', que coincide con la posición límite del S', se llama *plano focal posterior* del sistema óptico. Resumiendo, puede decirse que se denomina plano focal posterior F' el plano conjugado del S_∞, perpendicular al eje del sistema, que se encuentra en el infinito del espacio objeto.

El punto de intersección del plano focal posterior con el eje óptico recibe el nombre de *foco posterior* del sistema. Se designa también con la letra F'. Este punto es el conjugado del P_∞, situado en el infinito sobre el eje del sistema. Los rayos que parten del punto P_∞ forman un haz paralelo al eje (véase la fig. 116.2). Al salir del sistema, estos rayos constituyen un haz que converge en el foco F'. El haz paralelo que incide sobre un sistema óptico puede salir de él no en forma de haz convergente (como en la fig. 116.2), sino de haz divergente. En este caso en el punto F' no se cortarán los mismos rayos que salen, sino sus prolongaciones en sentido contrario. Respectivamente, el plano focal posterior resulta estar delante (según la marcha de los rayos) del sistema o dentro de él.

Los rayos que parten de un punto Q_∞, infinitamente alejado y no situado en el eje del sistema, forman un haz paralelo dirigido obli-

cuamente al eje de dicho sistema. Al salir de éste los rayos forman un haz que converge en el punto Q' del plano focal posterior, pero que no coincide con el foco F' (véase el punto Q' en la fig. 116.2). De lo expuesto se deduce que la imagen de un objeto infinitamente alejado se encontrará en el plano focal.

Si se aleja hasta el infinito el plano S', perpendicular al eje (fig. 116.3), su plano conjugado S se situará en la posición límite F, llamada *plano focal anterior* del sistema. Abreviando, se puede decir

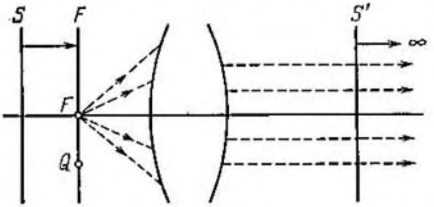


Fig. 116.3.

que el plano focal anterior F es el conjugado del S'_∞, perpendicular al eje del sistema, que se encuentra en el infinito del espacio imagen.

El punto de intersección del plano focal anterior F con el eje óptico se llama *foco anterior* del sistema. Este foco se designa también

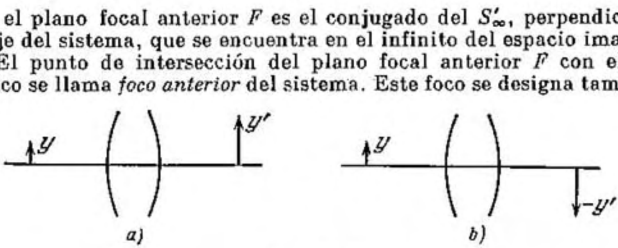


Fig. 116.4.

con la letra F. Los rayos que parten del foco F forman al salir del sistema un haz de rayos paralelos al eje. Los rayos que parten del punto Q, perteneciente al plano focal F (véase la fig. 116.3), forman, después de pasar por el sistema, un haz paralelo dirigido oblicuamente al eje. Puede ocurrir que el haz paralelo a la salida del sistema se obtenga cuando incida sobre éste no un haz de rayos divergente (como en la fig. 116.3), sino convergente. En este caso el foco anterior estará detrás del sistema o dentro de él.

Planos y puntos principales. Sean dos planos conjugados perpendiculares al eje óptico de un sistema. El segmento rectilíneo y (fig. 116.4), que se halla en uno de estos planos, tendrá su imagen en el segmento y' que se encuentra en el otro plano. De la simetría axial del sistema se infiere que los segmentos y e y' deben hallarse en un

plano que pase por el eje óptico (en el plano de la figura). La imagen y' puede estar dirigida en el mismo sentido que el objeto y (véase la fig. 116.4, *a*) o en sentido opuesto (véase la fig. 116.4, *b*). En el primer caso se dice que la imagen es *derecha* o *directa*; en el segundo, que es *invertida*. Los segmentos que se toman desde el eje óptico hacia arriba se consideran positivos, y los que se toman hacia abajo, negativos. En las figuras se indican las longitudes reales de los segmentos, es decir, para los segmentos negativos son positivas las magnitudes $(-y)$ y $(-y')$.

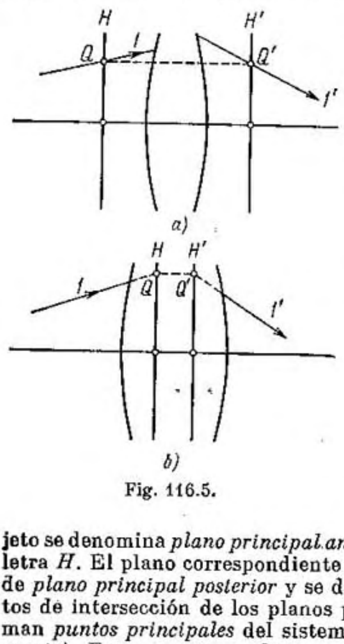


Fig. 116.5.

La relación entre las dimensiones lineales de la imagen y del objeto se llama *aumento lineal* o *lateral*. Designándolo por la letra β se puede escribir

$$\beta = \frac{y'}{y}. \qquad (116.1)$$

El aumento lineal es una magnitud algebraica. Es positivo si la imagen es derecha (los signos de y e y' son iguales), y negativo si la imagen es invertida (el signo de y' es contrario al de y).

Puede demostrarse que existen dos planos conjugados que se representan el uno al otro con el aumento lineal $\beta = +1$. Estos planos se llaman *principales*. El plano perteneciente al espacio objeto se denomina *plano principal anterior* del sistema y se designa con la letra H. El plano correspondiente al espacio imagen recibe el nombre de *plano principal posterior* y se designa con el símbolo H'. Los puntos de intersección de los planos principales con el eje óptico se llaman *puntos principales* del sistema (anterior y posterior, respectivamente). Estos puntos se designan con los mismos símbolos H y H' que los planos. En dependencia de la estructura del sistema, los planos y puntos principales pueden encontrarse tanto fuera del sistema como dentro de él. Puede ocurrir que uno de los planos pase por fuera del sistema y el otro por dentro. También es posible que ambos planos estén fuera del sistema y a un mismo lado de él.

De la definición de los planos principales se deduce que un rayo *1* que corte (en realidad, fig. 116.5, *a*, o mediante su prolongación imaginaria dentro del sistema, fig. 116.5, *b*) al plano principal anterior H en un punto Q, tendrá como conjugado un rayo *1'* que corta-

rá (directamente o por prolongación imaginaria) al plano principal H' en el punto Q', situado al mismo lado del eje y a la misma distancia de él que el punto Q. Esto es fácil de comprender si se recuerda que Q y Q' son puntos conjugados y se tiene en cuenta que todo rayo que pase por el punto Q debe tener como conjugado un rayo que pase por el punto Q'.

Planos y puntos nodales. Se llaman *puntos nodales* o *nodos* los puntos conjugados N y N' situados en el eje óptico que tienen la propiedad de que los rayos conjugados que pasan por ellos (en realidad o al ser prolongados imaginariamente dentro del sistema) son paralelos entre sí (véanse los rayos $1—1'$ y $2—2'$ en la fig. 116.6). Los planos perpendiculares al eje que pasan por los nodos se denominan *planos nodales* (anterior y posterior).

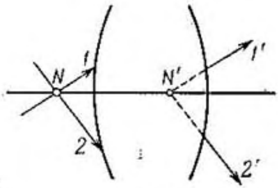


Fig. 116.6.

La distancia entre los nodos es siempre igual a la distancia entre los puntos principales. Cuando las propiedades ópticas de los medios que se encuentran a ambos lados del sistema son iguales (es decir, $n = n'$), los nodos coinciden con los puntos principales.

Distancias focales y potencia óptica de un sistema. La distancia desde el punto principal anterior H hasta el foco anterior F se llama

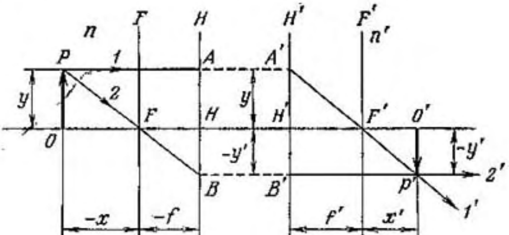


Fig. 117.7.

distancia focal anterior f del sistema. Se da el nombre de *distancia focal posterior* f' a la distancia desde H' hasta F'. Las distancias focales f y f' son magnitudes algebraicas. Son positivas si el foco dado se encuentra a la derecha del punto principal correspondiente, y negativas, en el caso contrario. Por ejemplo, en el sistema representado en la fig. 116.7 (véase más adelante), la distancia focal

posterior f' es positiva, y la distancia focal anterior f, negativa. En esta figura se indica la longitud verdadera del segmento HF, o sea, la magnitud positiva $(-f)$, igual al módulo de f.

Se puede demostrar que entre las distancias focales f y f' de un sistema óptico centrado, constituido por superficies refringentes esféricas, existe la relación

$$\frac{f}{f'}=-\frac{n}{n'}. \tag{116.2}$$

en la que n es el índice de refracción del medio que hay delante del sistema óptico, y n', el índice de refracción del medio que hay detrás de él. De (116.2) se sigue que cuando los índices de refracción de los medios que hay por ambos lados del sistema óptico son iguales, las distancias focales sólo se diferencian en el signo:

$$f' = -f. \tag{116.3}$$

La magnitud

$$\Phi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f} \tag{116.4}$$

se llama *potencia óptica* o *convergencia* del sistema. Cuanto mayor sea Φ menor será la distancia focal f' y, por consiguiente, tanto mayor será la refracción de los rayos por el sistema óptico. La potencia óptica se mide en *dioptrías* (dptr). Para obtener Φ en dioptrías, en la fórmula (116.4) hay que tomar la distancia focal en metros. Si Φ es positiva, la distancia focal posterior f' también es positiva; por consiguiente, el sistema da una imagen real de un punto infinitamente lejano, es decir, el haz de rayos paralelos se convierte en convergente. En este caso el sistema se dice que es *convergente*. Si Φ es negativa, la imagen de un punto infinitamente alejado será virtual, o sea, el haz de rayos paralelos es transformado por el sistema en divergente. Este sistema se llama *divergente*.

Fórmula de un sistema. Las propiedades ópticas de un sistema se determinan totalmente dando sus planos o puntos cardinales. En particular, conociendo la posición de los planos cardinales se puede construir la imagen óptica que produce el sistema. Tomemos en el espacio objeto un segmento OP perpendicular al eje óptico (fig. 116.7; los nodos no se muestran en esta figura). La posición de este segmento se puede dar por medio de la distancia x medida desde el punto F hasta el O, o de la distancia s desde H hasta O. Las magnitudes x y s, lo mismo que las distancias focales f y f', son algebraicas (en la figura se muestran sus módulos).

Desde el punto P trazamos el rayo *1*, paralelo al eje óptico. Este rayo atraviesa el plano H en el punto A. De acuerdo con las propiedades de los planos principales, el rayo *1'*, conjugado del *1*, debe pasar por el punto A', conjugado del A en el plano H'. Como el rayo *1* es paralelo al eje óptico, el rayo *1'*, conjugado suyo, pasa

por el foco posterior F'. Ahora tracemos desde el punto P el rayo 2, que pasa por el foco anterior F. Este rayo atraviesa el plano H en el punto B. El rayo $2'$, conjugado del 2, pasará por el punto B', conjugado del B en el plano H', y será paralelo al eje óptico. El punto P' de intersección de los rayos $1'$ y $2'$ es la imagen del punto P. La imagen $O'P'$, lo mismo que el segmento OP, es perpendicular al eje óptico.

La posición de la imagen $O'P'$ se puede caracterizar por la distancia x' desde el punto F' hasta O', o por la distancia s' desde H' hasta O'. Las magnitudes x' y s' son algebraicas. En el caso que representa la fig. 116.7, estas magnitudes son positivas.

La magnitud x', que determina la posición de la imagen, está relacionada por una ley con la magnitud x, que determina la posición del objeto, y con las distancias focales f y f'. Para los triángulos rectángulos con vértice común en el punto F (véase la fig. 116.7) se puede escribir la relación

$$\frac{OP}{HB}=\frac{y}{-y'}=\frac{-x}{-f}. \qquad (116.5)$$

Análogamente, para los triángulos con vértice común en el punto F' tenemos que

$$\frac{H'A'}{O'P'}=\frac{y}{-y'}=\frac{f'}{x'}. \qquad (116.6)$$

Juntando ambas relaciones se obtiene que $(-x)/(-f) = f'/x'$, de donde

$$xx' = ff'. \qquad (116.7)$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de *fórmula de Newton*. Si se cumple la condición $n = n'$, la fórmula de Newton toma la forma

$$xx' = -f^2 \qquad (116.8)$$

(véase (116.2)).

De la fórmula que relaciona las distancias x y x' del objeto y la imagen a los respectivos focos del sistema, es fácil pasar a la fórmula que establece la relación entre las distancias s y s' a los puntos principales. Por la fig. 116.7 se ve que $(-x) = (-s) - (-f)$ (es decir, $x = s - f$), y $x' = s' - f'$. Sustituyendo estas expresiones de x y x' en la fórmula (116.7) y haciendo transformaciones, obtenemos que

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1. \qquad (116.9)$$

Si se cumple la condición $f' = -f$ (véase (116.3)), la fórmula (116.9) se simplifica de la forma siguiente

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}. \qquad (116.10)$$

Las relaciones (116.7)—(116.10) son las fórmulas del sistema óptico centrado.

§ 117. Lente delgada

El sistema óptico centrado más simple es una *lente*. Esta es un cuerpo transparente (generalmente de vidrio) limitado por dos superficies esféricas[1]) (como caso particular una de las superficies puede ser plana). Los puntos de intersección de las superficies con el eje óptico de la lente se denominan *vértices* de las superficies refringentes. La distancia entre los vértices es el *espesor* o *grosor* de la lente. Si el grosor de la lente es despreciable en comparación con el menor de los radios de curvatura de las superficies que limitan la lente, ésta se dice que es *delgada*.

Los cálculos, que aquí no vamos a hacer, dan que, en el caso de una lente delgada, los planos principales H y H' se puede considerar que coinciden y que pasan por el centro O de la lente (fig. 117.1). Para las distancias focales de una lente delgada se obtiene la expresión

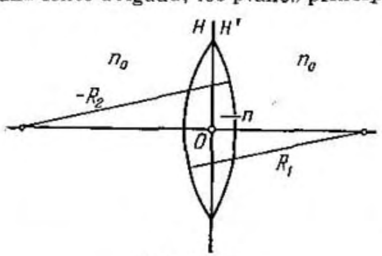


Fig. 117. 1.

$$f' = -f = \frac{n_0}{n-n_0}\,\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}; \qquad (117.1)$$

aquí n es el índice de refracción de la lente; n_0, el índice de refracción del medio que rodea la lente, y R_1 y R_2, los radios de curvatura de las superficies de la lente. Con los radios de curvatura se puede operar como con las magnitudes algebraicas: el radio de curvatura de la superficie convexa (es decir, en el caso en que el centro de curvatura está a la derecha del vértice) debe considerarse positivo, y el de la superficie cóncava (o sea, en el caso en que el centro de curvatura se halla a la izquierda del vértice), negativo. En los dibujos se indica el módulo del radio de curvatura, es decir, $-R$, si $R < 0$.

Si los índices de refracción de los medios que se encuentran a ambos lados de la lente delgada son iguales, los nodos N y N' coinciden con los puntos principales, o sea, se encuentran en el centro O de la lente. Por lo tanto, en este caso todo rayo que pase por el centro de la lente no cambiará de dirección. Si los índices de refracción de los medios que hay delante y detrás de la lente son distintos, los nodos no coinciden con los puntos principales, de manera que un rayo que pase por el centro de la lente sufrirá desviación.

Un haz de rayos paralelos, después de pasar por la lente, converge en uno de los puntos del plano focal (véase el punto Q' en la

[1]) Hay lentes con superficies más complejas.

fig. 117.2). Para determinar la posición de este punto hay que prolongar el rayo que pasa por el centro de la lente hasta su intersección con dicho plano focal (véase el rayo OQ' representado con línea de trazos). En este punto de intersección convergerán los demás rayos. Este procedimiento sirve si las propiedades ópticas del medio son las mismas por ambos lados de la lente ($n = n'$). En el caso contrario el rayo que pasa por el centro sufre desviación. Para hallar el punto Q' en este caso hay que conocer la posición de los puntos nodales de la lente.

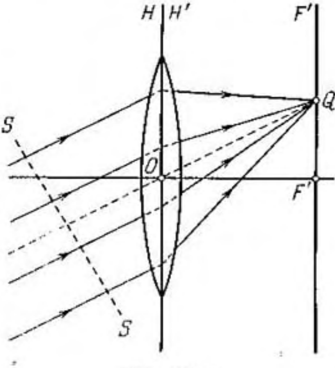


Fig. 117.2.

Conviene indicar que los caminos tomados a lo largo de los rayos que comienzan en la superficie SS (véase la fig. 117.2) y terminan en el punto Q' tienen la misma longitud óptica y son tautócronos (véase el final del § 115).

Para terminar hay que decir que una lente es un sistema óptico que dista mucho de ser perfecto. Las imágenes que da de los objetos tienen una serie de defectos. Pero el estudio de éstos queda fuera de los límites de este libro.

§ 118. Principio de Huygens

En los dos capítulos siguientes tenemos que estudiar los procesos que tienen lugar detrás de un obstáculo opaco con orificios, en el caso de que sobre él incida una onda luminosa. En la aproximación opticogeométrica, detrás del obstáculo no debe penetrar la luz en la región de la sombra geométrica. Pero en realidad la onda luminosa se propaga en principio por todo el espacio que hay detrás del obstáculo y penetra en dicha región. Esta penetración es tanto más importante cuanto menores son las dimensiones de los orificios. Cuando el diámetro de los orificios o la anchura de las rendijas son comparables con la longitud de la onda luminosa, la aproximación de la óptica geométrica resulta totalmente inaceptable.

El comportamiento de la luz detrás de un obstáculo con un orificio se puede explicar cualitativamente valiéndose del *principio de Huygens*, el cual establece el procedimiento para construir el frente de onda en un instante $t + \Delta t$ si se conoce la posición de dicho frente en el instante t. Según el principio de Huygens, cada punto hasta el

cual llega el movimiento oscilatorio sirve de centro de ondas secundarias; la envolvente de estas ondas da la posición del frente en el siguiente instante (fig. 118.1; el medio se supone que no es homogéneo: la velocidad de la onda en la parte inferior del dibujo es mayor que en la superior).

Supongamos que sobre un obstáculo plano con un orificio incide un frente de onda paralelo a él (fig. 118.2). De acuerdo con Huygens, cada punto de la parte del frente de onda separada por el orificio sirve de centro de ondas secundarias que, en un medio homogéneo o isótropo, serán esféricas. Construyendo la envolvente de las ondas secundarias nos convencemos de que detrás del orificio penetra la onda en la región de la sombra geométrica (cuyos límites se indican en la figura con líneas de trazos), rodeando el borde del obstáculo.



Fig. 118.1.

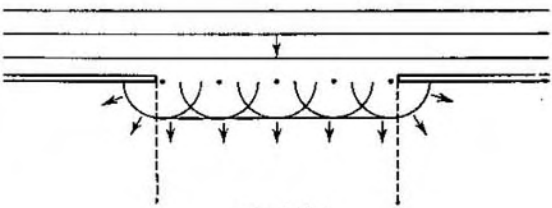


Fig. 118.2.

El principio de Huygens no da ninguna indicación acerca de la intensidad de las ondas que se propagan en distintas direcciones. Este inconveniente fue superado por Fresnel. El principio perfeccionado por él y llamado de Huygens—Fresnel se expone en el § 126. En ese mismo párrafo se da el fundamento físico de dicho principio.

CAPÍTULO XVII

INTERFERENCIA DE LA LUZ

§ 119. Interferencia de las ondas luminosas

Sean dos ondas de igual frecuencia que, superponiéndose una a otra, excitan en cierto punto del espacio oscilaciones de la misma dirección:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

La amplitud de la oscilación resultante en dicho punto se determina por la expresión

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta,$$

en la que $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ (véase la fórmula (55.2) del tomo 1°).

Si la diferencia de fase δ de las oscilaciones excitadas por las ondas permanece constante con el tiempo, las ondas se llaman *coherentes* [1]).

En el caso de ondas no coherentes, δ varía continuamente, tomando con igual probabilidad valores cualesquiera, a causa de lo cual el valor medio de $\cos\delta$ respecto del tiempo es nulo. Por eso

$$\langle A^2\rangle = \langle A_1^2\rangle + \langle A_2^2\rangle.$$

De aquí, teniendo en cuenta la relación (110.10), concluimos que la intensidad que se observa cuando se superponen ondas no coherentes es igual a la suma de las intensidades que crea cada una de ellas por separado:

$$I = I_1 + I_2. \tag{119.1}$$

En el caso de ondas coherentes, $\cos\delta$ tiene un valor constante con el tiempo (pero propio de cada punto del espacio), de manera que

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \tag{119.2}$$

En los puntos del espacio en que $\cos\delta > 0$, I será mayor que $I_1 + I_2$; en los puntos en que $\cos\delta < 0$, I será menor que $I_1 + I_2$. De este modo, al superponerse las ondas luminosas coherentes se produce una redistribución del flujo luminoso en el espacio, como resultado de la cual en unos puntos surgen máximos de intensidad y en otros, mínimos. Este fenómeno se conoce con el nombre de *interferencia de las ondas*. La interferencia se manifiesta con especial claridad cuando la intensidad de las dos ondas que interfieren es la misma:

---

[1]) En el párrafo siguiente estudiaremos el concepto de coherencia con más detalles.

$I_1 = I_2$. Entonces, según (119.2), en los máximos $I = 4I_1$, y en los mínimos, $I = 0$. Para las ondas no coherentes con la misma condición se obtiene en todas partes la misma intensidad $I_L = 2I_1$ (véase (119.1)).

De lo dicho se infiere que si se ilumina una superficie cualquiera con varias fuentes de luz (por ejemplo, con dos lámparas), al parecer, debe observarse una figura de interferencia con su característica alternancia de máximos y mínimos de intensidad. Sin embargo, por la experiencia cotidiana sabemos que en este caso la iluminación de la superficie decrece monótonamente a medida que se aleja de las fuentes de luz sin que se observe ninguna figura de interferencia. Esto se explica porque las fuentes naturales de luz no son coherentes.

La no coherencia de las fuentes naturales de luz se debe a que la radiación del cuerpo luminoso se compone de las ondas emitidas por muchos átomos. Los átomos aislados radían trenes de ondas, cuya duración es del orden de 10^{-8} s y su extensión, de cerca de 3 m (véase el § 110). La fase de un nuevo tren no está ligada en absoluto con la fase del precedente. En la onda luminosa emitida por el cuerpo, la radiación de un grupo de átomos es sustituida al cabo de un tiempo del orden de 10^{-8} s por la radiación de otro grupo, y la fase de la onda resultante sufre variaciones casuales.

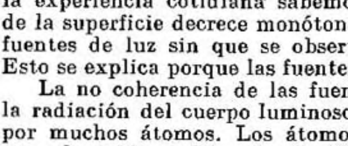


Fig. 119.1.

Las ondas luminosas coherentes se pueden obtener dividiendo en dos partes (por medio de reflexiones o refracciones) la onda radiada por una fuente. Si se hace que las dos ondas así obtenidas recorran caminos ópticos distintos y después se superpongan una a otra, se observa la interferencia. La diferencia de longitud de los caminos ópticos recorridos por las ondas que interfieren no debe ser muy grande, ya que las oscilaciones que han de superponerse deben pertenecer a un mismo tren de ondas resultante. Si esta diferencia es del orden de 1 m, se superponen ondas correspondientes a distintos trenes y la diferencia de fases entre ellas cambiará continuamente de un modo caótico.

Supongamos que las ondas coherentes, resultantes del desdoblamiento, proceden del punto O (fig. 119.1). Hasta el punto P la primera onda recorre, en un medio de índice de refracción n_1, el camino s_1, y la segunda onda recorre, en un medio de índice de refracción n_2, el camino s_2. Si en el punto O la fase de las oscilaciones es igual a ωt, la primera onda excita en el punto P oscilaciones $A_1 \cos \omega \times \times (t - s_1/v_1)$, y la segunda, oscilaciones $A_2 \cos \omega (t - s_2/v_2)$ ($v_1 = = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$ son las velocidades de fase de las ondas). Por

consiguiente, la diferencia de fase de las oscilaciones que excitan las ondas en el punto P será

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Sustituyendo ω/c por $2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 es la longitud de la onda en el vacío), a la expresión de la diferencia de fase se le puede dar la forma

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \qquad (119.3)$$

donde

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \qquad (119.4)$$

es una magnitud igual a la diferencia de las longitudes ópticas de los caminos recorridos por las ondas, llamada *diferencia de marcha, de camino* o *de recorrido óptico* (véase la fórmula (115.5)).

Por la fórmula (119.3) se ve que si la diferencia de marcha es igual a un número entero de longitudes de onda en el vacío

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (119.5)$$

la diferencia de fase δ resulta ser múltiple de 2π y las oscilaciones excitadas en el punto P por ambas ondas se efectuarán en la misma fase. De este modo, (119.5) es la condición de máximo de interferencia.

Si Δ es igual a un número semientero de longitudes de las ondas en el vacío,

$$\Delta = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (119.6)$$

será $\delta = \pm (2m + 1) \pi$ de manera que las oscilaciones en el punto P se encontrarán en oposición de fase. Por consiguiente, (119.6) es la condición de mínimo de interferencia.

Consideremos dos ondas luminosas cilíndricas coherentes que procedan de dos fuentes, S_1 y S_2 en forma de hilos delgados luminosos o de dos rendijas estrechas (fig. 119.2). La región en que estas ondas se superponen se llama *campo de interferencia*. En toda esta región se observa la alternancia de los sitios con intensidad de la luz máxima y mínima. Si en el campo de interferencia se introduce una pantalla, se verá en ella la figura de interferencia, formada por franjas brillantes y oscuras que se suceden alternativamente. Calculemos la anchura de estas franjas suponiendo que la pantalla es paralela al plano que pasa por las fuentes S_1 y S_2. La posición de un punto en la pantalla la vamos a caracterizar por la coordenada x medida en dirección perpendicular a las líneas S_1 y S_2. El punto de referencia lo elegimos en el punto O, respecto del cual S_1 y S_2 son simétricas. Consideraremos que las fuentes oscilan en concordan-

cia de fase. Por la fig. 119.2 se ve que

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Por lo tanto,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Más adelante se aclarará que para obtener una figura de interferencia distinguible, la distancia d entre las fuentes debe ser mucho menor que la distancia l hasta la pantalla. La distancia x, dentro de cuyos límites se forman las franjas de interferencia, también suele ser mucho menor que l. Con estas condiciones se puede suponer que

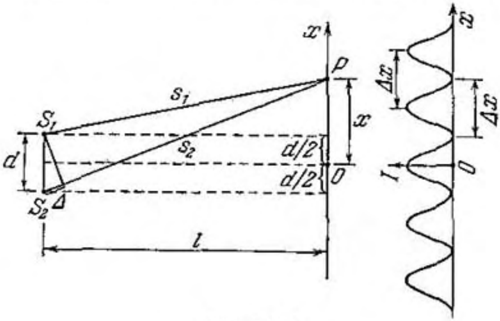


Fig. 119.2.

$s_2 + s_1 \approx 2l$. Entonces $s_2 - s_1 = xd/l$. Multiplicando $s_2 - s_1$ por el índice de refracción del medio n, obtenemos la diferencia de marcha óptica

$$\Delta = n\frac{xd}{l}. \tag{119.7}$$

La sustitución de este valor de Δ en la condición (119.5) da que los máximos de intensidad se observan donde los valores de x son iguales a

$$x_{\text{máx}} = \pm m \frac{l}{d}\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{119.8}$$

Aquí $\lambda = \lambda_0/n$ es la longitud de onda en el medio que llena el espacio entre la fuente y la pantalla.

Sustituyendo el valor (119.7) en la condición (119.6), obtenemos las coordenadas de los mínimos de intensidad:

$$x_{\text{mín}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d}\lambda \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{119.9}$$

La distancia entre dos máximos de intensidad vecinos la llamaremos *distancia entre las franjas de interferencia*, y la distancia entre los mínimos de intensidad vecinos, *anchura de las franjas de interferencia*. De las fórmulas (119.8) y (119.9) se sigue que la distancia entre las franjas y la anchura de éstas tienen un mismo valor

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda. \tag{119.10}$$

Según la fórmula (119.10), la distancia entre las franjas crece al disminuir la distancia d entre las fuentes. Si d fuera comparable con l, la distancia entre las franjas sería del mismo orden que λ, es decir, constituiría varias decenas de μm. En este caso las franjas por separado serían indistinguibles totalmente. Para que la figura de interferencia se haga clara es necesario que se cumpla la condición antes mencionada: $d \ll l$.

Si las ondas que interfieren tienen la misma intensidad ($I_1 = I_2 = I_0$), según (119.2), la intensidad resultante en los puntos en que la diferencia de fase es δ se determina por la expresión

$$I = 2I_0(1+\cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}.$$

Como $\delta \sim \Delta$, de acuerdo con (119.7), δ crece proporcionalmente a x. Por consiguiente, la intensidad varía a lo largo de la pantalla según la ley del cuadrado del coseno. En la fig. 119.2, a la derecha, se muestra la dependencia de I respecto de x que se obtiene en la luz monocromática.

La anchura de las franjas de interferencia y la distancia entre ellas depende de la longitud de onda λ. Unicamente en el centro de la figura, donde $x = 0$, coinciden los máximos de todas las longitudes de onda. A medida que se alejan del centro de la figura, los máximos de los distintos colores se desplazan unos de otros cada vez más. Esto hace que la figura de interferencia pierda nitidez cuando se observa en la luz blanca. En la luz monocromática el número de franjas de interferencia distinguibles aumenta sensiblemente.

Midiendo la distancia entre las franjas Δx y conociendo l y d, se puede calcular λ por la fórmula (119.10). Precisamente basándose en los experimentos de interferencia de la luz fueron halladas por vez primera las longitudes de onda de los rayos de distinto color.

Hemos estudiado la interferencia de dos ondas cilíndricas. Veamos lo que ocurre cuando se superponen dos ondas planas. Supongamos que las amplitudes de estas ondas son iguales y las direcciones en que se propagan forman un ángulo 2φ (fig. 119.3). Las direcciones en que oscila el vector luz consideraremos que son perpendiculares al plano del dibujo. Los vectores de onda $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ se encuentran en dicho plano y tienen el mismo módulo, $k = 2\pi/\lambda$. Escribamos las

ecuaciones de estas ondas:

$$A\cos(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) = A\cos(\omega t - k \operatorname{sen}\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y),$$

$$A\cos(\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}) = A\cos(\omega t + k \operatorname{sen}\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y).$$

La onda resultante en los puntos de coordenadas x e y tiene la forma

$$A\cos(\omega t - k\operatorname{sen}\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y) + \\ + A\cos(\omega t + k\operatorname{sen}\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y) = \\ = 2A\cos(k\operatorname{sen}\varphi\cdot x)\cos(\omega t - k\cos\varphi\cdot y). \quad \textbf{(119.11)}$$

De esta expresión se sigue que, en los puntos en que $k \operatorname{sen}\varphi\cdot x = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), la amplitud de las oscilaciones es igual a $2A$; y en los puntos en que $k \operatorname{sen}\varphi \times \times x = \pm (m + {}^1/_2)\pi$, la amplitud de las oscilaciones es nula. Dondequiera que coloquemos la pantalla P perpendicularmente al eje, se observará en ella un sistema de franjas sucesivamente brillantes y oscuras, paralelas al eje z (este eje es perpendicular al plano del dibujo). Las coordenadas de los máximos de intensidad serán

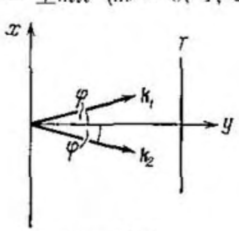


Fig. 119.3.

$$x_{\text{máx}} = \pm\frac{m\pi}{k\operatorname{sen}\varphi} = \pm\frac{m\lambda}{2\operatorname{sen}\varphi}. \quad (119.12)$$

De la posición de la pantalla (es decir, de la coordenada y) sólo depende la fase de las oscilaciones (véase (119.11)).

Hemos supuesto para simplificar que las fases iniciales de las ondas que interfieren son nulas. Si la diferencia de estas fases es distinta de cero, en la fórmula (119.12) aparece un sumando constante y la figura de las franjas se desplaza a lo largo de la pantalla.

§ 120. Coherencia

Se llama *coherencia* el transcurso coordinado de varios procesos oscilatorios u ondulatorios. El grado de coordinación puede ser diverso. Respectivamente se puede introducir el concepto de *grado de coherencia* de dos ondas.

Se distinguen las coherencias *temporal* y *espacial*. Empezaremos por el estudio de la coherencia temporal.

Coherencia temporal. El proceso de interferencia descrito en el párrafo anterior está idealizado. En realidad este proceso es mucho más complejo. Esto se debe a que la onda monocromática que define la expresión

$$A\cos(\omega t - kr + \alpha),$$

en la que A, ω y α son constantes y representan una abstracción. Toda onda luminosa real está formada por la superposición de oscilaciones de todas las frecuencias (o longitudes de onda) comprendidas en un intervalo más o menos estrecho, pero finito, de frecuencias $\Delta\omega$ (o, respectivamente, de longitudes de ondas $\Delta\lambda$). Incluso para la luz considerada monocromática (es decir, de un solo color) el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ es finito[1]). Además, la amplitud de la onda A y la fase α sufren con el tiempo variaciones casuales (caóticas) continuas. Por eso las oscilaciones excitadas en un punto determinado del espacio por dos ondas luminosas que se superponen una a otra tienen la forma

$$A_1(t)\cos[\omega_1(t)\cdot t+\alpha_1(t)],\quad A_2(t)\cos[\omega_2(t)\cdot t+\alpha_2(t)], \qquad (120.1)$$

siendo las variaciones caóticas de las funciones $A_1(t)$, $\omega_1(t)$, $\alpha_1(t)$, $A_2(t)$, $\omega_2(t)$ y $\alpha_2(t)$ totalmente independientes.

Para simplificar vamos a suponer que las amplitudes A_1 y A_2 son constantes. Las variaciones de la frecuencia y de la fase se pueden reducir a la sola variación de la fase o a la sola variación de la frecuencia. Representemos la función

$$f(t)=A\cos[\omega(t)\cdot t+\alpha(t)] \qquad (120.2)$$

en la forma

$$f(t)=A\cos\{\omega_0 t+[\omega(t)-\omega_0]\,t+\alpha(t)\},$$

donde ω_0 es cierto valor medio de la frecuencia, e introduzcamos la designación $[\omega(t)-\omega_0]\,t+\alpha(t)=\alpha'(t)$. Entonces la fórmula (120.2) toma la forma

$$f(t)=A\cos[\omega_0 t+\alpha'(t)]. \qquad (120.3)$$

Hemos obtenido una función en la cual sólo sufre variaciones caóticas la fase de las oscilaciones.

Por otra parte, en matemáticas se demuestra que una función inarmónica, por ejemplo, la (120.2), se puede representar en forma de suma de funciones armónicas, cuyas frecuencias estén comprendidas en cierto intervalo $\Delta\omega$ (véase la fórmula (120.4)).

De este modo, cuando se estudia el problema de la coherencia, son posibles dos enfoques: el «de la fase» y el «de la frecuencia». Empezaremos por el «de la fase». Supongamos que en las fórmulas (120.1) las frecuencias ω_1 y ω_2 satisfacen la condición $\omega_1=\omega_2=$ $=\text{const}$ y veamos qué influencia ejerce la variación de las fases α_1 y α_2. De acuerdo con la fórmula (119.2), con las suposiciones hechas la intensidad de la luz en un punto dado se determina por la expresión

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(t),$$

[1]) Las rayas espectrales que emiten los átomos tienen una anchura «natural» $\Delta\omega$ del orden de 10^8 s^{-1} ($\Delta\lambda\sim10^{-4}$ Å).

en la que $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$. El último sumando de esta fórmula recibe el nombre de *término de interferencia*.

Todo dispositivo con el cual se puede observar una figura de interferencia (el ojo[1]), una placa fotográfica, etc.), tiene cierta inercia. Por eso registra la figura promediada por el intervalo de tiempo t_{disp} necesario para que «actúe» el dispositivo. Si durante el tiempo t_{disp} el factor $\cos\delta(t)$ toma todos los valores desde -1 hasta $+1$, el valor medio del término de interferencia será nulo. Por eso la intensidad que registre el dispositivo será igual a la suma de las intensidades que crean en el punto dado cada una de las ondas por separado: no habrá interferencia y nos veremos obligados a reconocer que las ondas no son coherentes.

En cambio, si durante el tiempo t_{disp} el valor de $\cos\delta(t)$ permanece prácticamente invariable[2]), el dispositivo pone de manifiesto la interferencia y hay que reconocer que las ondas son coherentes.

De lo dicho se deduce que el concepto de coherencia es relativo: dos ondas pueden comportarse como coherentes al ser observadas con un dispositivo (de pequeña inercia) y como incoherentes al serlo con otro dispositivo (de mayor inercia). Para caracterizar las propiedades de coherencia de las ondas se introduce el *tiempo de coherencia* t_{coher}, que se define como el tiempo durante el cual la variación casual de la fase de la onda $\alpha(t)$ alcanza un valor del orden de π. Durante el tiempo t_{coher} la oscilación parece que se olvida de su fase inicial y se hace incoherente con respecto a sí misma.

Aprovechando el concepto de tiempo de coherencia se puede decir que en aquellos casos en que la constante de tiempo del dispositivo es mucho mayor que el tiempo de coherencia de las ondas que se superponen ($t_{disp} \gg t_{coher}$), el dispositivo no registra la interferencia. Pero si $t_{disp} \ll t_{coher}$, el dispositivo pone de manifiesto una figura de interferencia clara. Con valores intermedios de t_{disp} la claridad de la figura disminuirá a medida que t_{disp} crezca desde los valores menores que t_{coher} hasta valores mayores que t_{coher}.

La distancia $l_{coher} = ct_{coher}$ en que la onda se desplaza durante el tiempo t_{coher} se llama *longitud de coherencia* (o *longitud del tren*). La longitud de coherencia es la distancia, a la cual la variación casual de la fase alcanza el valor $\sim\pi$. Para obtener la figura de interferencia dividiendo una onda natural en dos partes, es necesario que la diferencia de marcha óptica Δ sea menor que la longitud de coherencia. Esta condición limita el número de franjas de interfe-

---

[1]) Se recordará que la demostración de las películas cinematográficas se basa n la inercia de la percepción visual (persistencia de las imágenes en la retina), que, aproximadamente, es de 0,1 s.

[2]) La diferencia de fase $\delta(t)$ es distinta en diferentes puntos del espacio. La influencia del término de interferencia se manifiesta en aquellos puntos en que éste es distinto de cero.

rencia visibles que se observan valiéndose del esquema representado en la fig. 119.2. Al ir aumentando el número m de la franja crece la diferencia de marcha, por lo que la claridad de las franjas se va haciendo cada vez peor.

Pasemos ahora a esclarecer el papel de la no monocromaticidad de las ondas luminosas. Supongamos que la luz está constituida por una sucesión de trenes de ondas idénticos, de frecuencia ω_0 y duración τ. Al ser reemplazado un tren por el siguiente, la fase sufre variaciones desordenadas, por lo que los trenes resultan ser mutuamente incoherentes. Con estas suposiciones la duración τ de un tren coincide prácticamente con el tiempo de coherencia t_{coher}.

En matemáticas se demuestra el teorema de Fourier, según el cual toda función finita integrable $F(t)$ se puede representar en forma de suma de un número infinito de componentes armónicas de frecuencia continuamente variable:

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (120.4)$$

La expresión (120.4) se llama *integral de Fourier*. La función $A(\omega)$, que figura bajo el signo de integral, es la amplitud de la componente monocromática correspondiente. Según la teoría de las integrales de Fourier, la forma analítica de la función $A(\omega)$ se determina por la expresión

$$A(\omega)=2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi, \qquad (120.5)$$

en la que ξ es la variable auxiliar de integración.

Supongamos que la función $F(t)$ describe la perturbación luminosa, en cierto punto en el instante t, producida por un solo tren de ondas. En este caso se determina por las condiciones

$$F(t)=A_0 e^{i\omega_0 t} \quad \text{para} \quad |t|\leqslant\tau/2,$$
$$F(t)=0 \quad \text{para} \quad |t|>\tau/2.$$

La gráfica de la parte real de esta función se da en la fig. 120.1.

Fuera del intervalo de $-\tau/2$ a $+\tau/2$ la función $F(t)$ es nula. Por eso la expresión (120.5), que determina la amplitud de las componentes armónicas, tiene la forma

$$A(\omega)=2\pi \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} [A_0 e^{i\omega_0\xi}]\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi=2\pi A_0 \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(\omega_0-\omega)\xi}\, d\xi=$$
$$=2\pi A_0 \frac{e^{i(\omega_0-\omega)\xi}}{i(\omega_0-\omega)}\Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2}.$$

Después de sustituir los límites de integración y de hacer transformaciones fáciles, llegamos a la fórmula

$$A(\omega)=\pi A_0\tau\frac{\operatorname{sen}[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{(\omega-\omega_0)\tau/2}.$$

La intensidad $I(\omega)$ de la componente armónica de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir, a la expresión

$$f(\omega)=\frac{\operatorname{sen}^2[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{[(\omega-\omega_0)\tau/2]^2}. \qquad (120.6)$$

La gráfica de la función (120.6) se muestra en la fig. 120.2. Por esta figura se ve que la intensidad de las componentes, cuyas frecuencias

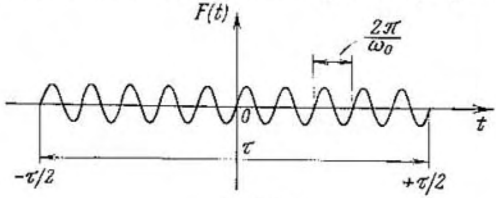


Fig. 120.1.

están comprendidas en el intervalo $\Delta\omega=2\pi/\tau$, supera considerablemente la intensidad de las demás componentes. Esta circunstancia

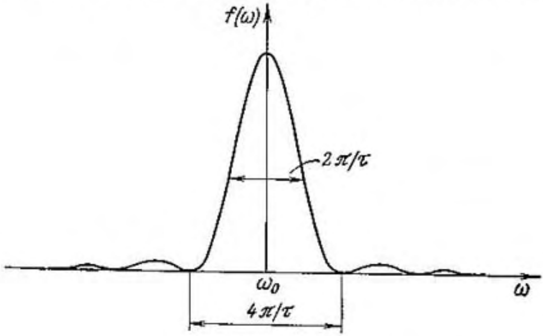


Fig. 120.2.

permite relacionar la duración τ del tren de ondas con las frecuencias eficaces del intervalo $\Delta\omega$ del espectro de Fourier

$$\tau=\frac{2\pi}{\Delta\omega}=\frac{1}{\Delta\nu}.$$

Identificando τ con el tiempo de coherencia, llegamos a la relación

$$t_{\text{coher}} \sim \frac{1}{\Delta\nu} \tag{120.7}$$

(el signo $\sim$ significa «es igual en orden de magnitud a»).

De la relación (120.7) se sigue que cuanto más ancho sea el intervalo de frecuencias representadas en una onda luminosa dada, tanto menor será el tiempo de coherencia de dicha onda.

La frecuencia está ligada con la longitud de onda en el vacío por la relación $\nu = c/\lambda_0$. Derivando esta relación hallamos que $\Delta\nu = c\Delta\lambda_0/\lambda_0^2 \approx c\Delta\lambda/\lambda^2$ (hemos omitido el signo menos que se obtiene al hallar la diferencial y hemos supuesto $\lambda_0 \approx \lambda$). Sustituyendo en la fórmula (120.7) $\Delta\nu$ por su expresión mediante λ y $\Delta\lambda$, se obtiene para el tiempo de coherencia la expresión

$$t_{\text{coher}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \tag{120.8}$$

De aquí se obtiene para la longitud de coherencia el valor siguiente:

$$l_{\text{coher}} = ct_{\text{coher}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda. \tag{120.9}$$

De la fórmula (119.5) se infiere que la diferencia de marcha, con la cual se obtiene el máximo de orden m-ésimo, se determina por la relación

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Cuando esta diferencia de marcha alcanza un valor del orden de la longitud de coherencia, las franjas se hacen indistinguibles. Por consiguiente, el orden de interferencia límite que se puede observar lo determina la condición

$$m_{\text{lím}}\,\lambda \sim l_{\text{coher}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda,$$

de donde

$$m_{\text{lím}} \sim \lambda/\Delta\lambda. \tag{120.10}$$

De (120.10) se deduce que el número de franjas de interferencia observables valiéndose del esquema representado en la fig. 119.2, aumenta al disminuir el intervalo de longitudes de onda representadas en la luz que se emplea.

Coherencia espacial. Según la fórmula $k = \omega/v = n\omega/c$, a una dispersión de los valores de las frecuencias $\Delta\omega$ corresponde una dispersión de los valores de k. Hemos establecido que la coherencia temporal se determina por el valor de $\Delta\omega$. Por lo tanto, la coherencia temporal está relacionada con la dispersión de los valores del módulo del vector de onda $\mathbf{k}$. La coherencia espacial está ligada con la dispersión de las direcciones del vector $\mathbf{k}$, que se caracteriza por la marnitud $\Delta\mathbf{e}_k$.

La aparición en un punto cualquiera del espacio de oscilaciones excitadas por ondas con $\mathbf{e}_k$ distinta es posible si estas ondas son emitidas por partes diferentes de una fuente de luz extensa (no puntual). Admitamos, para simplificar, que la fuente tiene la forma de un disco, el cual se ve desde el punto dado bajo el ángulo φ. En



Fig. 120.3.

la fig. 120.3 se puede ver que el ángulo φ caracteriza el intervalo en que están comprendidos los versores $\mathbf{e}_k$. Vamos a considerar que este ángulo es pequeño.

Supongamos que la luz de la fuente incide sobre dos rendijas estrechas, detrás de las cuales se encuentra una pantalla (fig. 120.4).

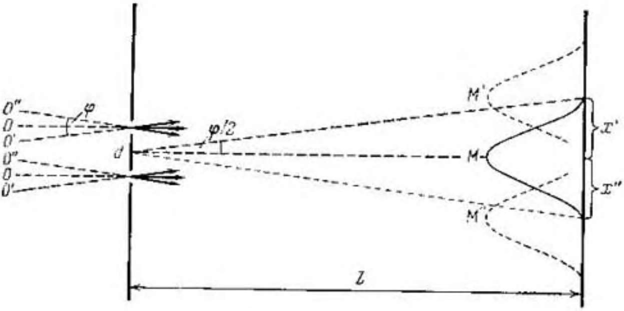


Fig. 120.4.

El intervalo de frecuencias que emite la fuente consideraremos que es pequeño, para que el grado de coherencia temporal sea suficiente para obtener una figura de interferencia nítida. La onda procedente de la parte de la superficie designada por O en la fig. 120.4, crea el máximo de orden nulo M en el centro de la pantalla. El máximo de orden nulo M' creado por la onda procedente de la parte O' estará desplazado del centro de la pantalla la distancia x'. En virtud de la pequeñez del ángulo φ y de la relación d/l, se puede admitir que $x' = l\varphi/2$. El máximo de orden nulo M'' que crea la onda procedente de la parte O'', está desplazado del centro de la pantalla, hacia el

lado opuesto, la distancia x'', igual a x'. Los máximos de orden nulo de las demás partes de la fuente se encuentran entre los máximos M' y M''.

Las partes aisladas de la fuente de luz excitan ondas, cuyas fases no tienen ninguna relación entre sí. Por eso la figura de interferencia que aparezca en la pantalla será la superposición de las figuras que crean cada una de las partes por separado. Si el desplazamiento x' es mucho menor que la anchura de las franjas de interferencia $\Delta x = l\lambda/d$ (véase la fórmula (119.10)), los máximos de las diversas partes de la fuente se superponen prácticamente unos a otros y la figura será la misma que la debida a una fuente puntual. Cuando $x' \approx \Delta x$, los máximos de unas partes se superponen a los mínimos de otras y la figura de interferencia no se observa. De este modo, la figura de interferencia se podrá distinguir a condición de que $x' < \Delta x$, es decir,

$$\frac{l\varphi}{2} < \frac{l\lambda}{d}, \qquad (120.11)$$

o bien

$$\varphi < \lambda/d. \qquad (120.12)$$

Al pasar de (120.11) a (120.12) hemos omitido el factor 2.

La fórmula (120.12) determina las dimensiones angulares de la fuente, con las cuales se observa la interferencia. Valiéndose de esta fórmula también se puede determinar la distancia máxima entre las rendijas, con la cual aún se puede observar la interferencia si la fuente tiene la dimensión angular φ. Multiplicando la desigualdad (120.12) por d/φ, llegamos a la condición

$$d < \lambda/\varphi. \qquad (120.13)$$

El conjunto de ondas con distinta $\mathbf{e}_k$ se puede sustituir por la onda resultante que incide sobre la pantalla con las rendijas. La ausencia de figura de interferencia significa que las oscilaciones que excita esta onda en los sitios en que se encuentran las rendijas primera y segunda son incoherentes. Por lo tanto, también las oscilaciones de la onda misma en los puntos que se encuentran a la distancia d uno de otro son incoherentes. Si la fuente fuera idealmente monocromática (es decir, que $\Delta\nu = 0$ y $t_{coher} = \infty$), la superficie que pasa por las rendijas sería una superficie de onda y las oscilaciones en todos sus puntos se efectuarían en la misma fase. Hemos establecido que en el caso de que $\Delta\nu \neq 0$ y las dimensiones de la fuente sean finitas ($\varphi \neq 0$), las oscilaciones en los puntos de la superficie que se encuentren a una distancia $d > \lambda/\varphi$ serán incoherentes.

A la superficie que sería de onda a condición de que la fuente fuera monocromática, la denominaremos, para abreviar, seudosu-

perficie de onda[1]). La condición (120.12) podríamos satisfacerla disminuyendo la distancia d entre las rendijas, es decir, tomando puntos más próximos entre sí de la seudosuperficie de onda. Por consiguiente, las oscilaciones que excita la onda en puntos de la seudosuperficie de onda suficientemente próximos, resultan ser coherentes. Esta coherencia se llama *espacial*.

Así, la fase de las oscilaciones, al pasar de un punto de la seudosuperficie de onda a otro, varía desordenadamente. Introducimos la distancia ρ_{coher} a la cual desplazándose a lo largo de la seudosuperficie de onda, la variación casual de la fase alcanza el valor de $\sim\pi$. Las oscilaciones en dos puntos de la seudosuperficie de onda que se hallen entre sí a una distancia menor que ρ_{coher} serán aproximadamente coherentes. La distancia ρ_{coher} recibe el nombre de *longitud de coherencia espacial* o *radio de coherencia*. De (120.13) se sigue que

$$\rho_{coher} \sim \lambda/\varphi. \qquad (120.14)$$

La dimensión angular del Sol es de cerca de 0,01 rd. y la longitud de las ondas luminosas es igual, aproximadamente, a 0,5 μm. Por consiguiente, el radio de coherencia de las ondas luminosas procedentes del Sol tiene un valor del orden de

$$\rho_{coher} = 0{,}5/0{,}01 = 50\ \mu\text{m} = 0{,}05\ \text{mm}. \qquad (120.15)$$

Todo el espacio que ocupa una onda se puede dividir en partes, dentro de cada una de las cuales dicha onda conserve aproximadamente la coherencia. El volumen de esta parte del espacio, llamada *volumen de coherencia*, es igual en orden de magnitud al producto de la longitud de coherencia temporal por el área del círculo de radio ρ_{coher}.

La coherencia espacial de una onda luminosa en las proximidades de la superficie del cuerpo caldeado que la emite está limitada por un radio de coherencia ρ_{coher}, cuya dimensión es de varias longitudes de onda solamente. A medida que aumenta la distancia a la fuente, el grado de coherencia espacial crece. La radiación de láser[2]) posee una enorme coherencia temporal y espacial. En el orificio de salida del láser la coherencia espacial se observa en toda la sección transversal del haz luminoso.

Al parecer, la interferencia se podría observar haciendo pasar por dos rendijas practicadas en una pantalla opaca la luz que se propaga desde una fuente cualquiera. Pero si la coherencia espacial de la onda que incide sobre las rendijas es pequeña, los haces de luz que pasan a través de ellas resultan ser no coherentes y la figura de

---

[1]) Debe tenerse en cuenta que este término no se utiliza en la literatura científica. Nosotros lo empleamos convencionalmente para darle a la exposición mayor claridad.

[2]) Acerca de los láseres se tratará en el tomo 3º de este Curso.

interferencia no se observa. T. Young consiguió en 1802 la interferencia de dos rendijas aumentando la coherencia espacial de la luz incidente sobre ellas. Este aumento lo logró haciendo pasar previamente la luz por un orificio pequeño practicado en una pantalla opaca. Con la luz que había pasado por ese orificio se iluminaban las rendijas de una segunda pantalla opaca. De este modo Young fue el primero que observó la interferencia de las ondas luminosas y determinó la longitud de éstas.

§ 121. Procedimientos para observar la interferencia de la luz

Vamos a examinar dos esquemas de interferencia concretos, en uno de ellos se emplea, para dividir en dos la onda luminosa, la reflexión, y en el otro, la refracción de la luz.

Espejos de Fresnel. Dos espejos planos en contacto OM y ON se sitúan de tal modo que sus superficies reflectoras formen un ángulo aproximadamente igual a π (fig. 121.1). Respectivamente, el ángulo

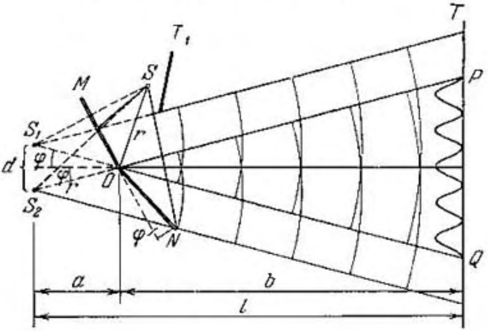


Fig. 121.1.

φ de la figura es muy pequeño. Paralelamente a la línea de intersección O de los espejos y a la distancia r de ella se coloca una fuente rectilínea de luz S (por ejemplo, una rendija luminosa estrecha). Los espejos proyectan sobre la pantalla T dos ondas cilíndricas coherentes que se propagan como si procedieran de las fuentes virtuales S_1 y S_2. La pantalla opaca T_1 impide el paso de la luz de la fuente S hacia la pantalla T.

El rayo OQ es el reflejado del SO en el espejo OM y el rayo OP, el reflejado del SO en el espejo ON. Se comprende fácilmente que el

ángulo entre los rayos OP y OQ es igual a 2φ. Como S y S_1 están situados simétricamente con respecto a OM, la longitud del segmento OS_1 será igual a OS, es decir, a r. Razonamientos análogos conducen al mismo resultado para el segmento OS_2. De este modo, la distancia entre las fuentes S_1 y S_2 es

$$d = 2r \operatorname{sen} \varphi \approx 2r\varphi.$$

En la fig. 121.1 se ve que $a = r \cos \varphi \approx r$. Por consiguiente,

$$l = r + b,$$

donde b es la distancia desde la línea de intersección O de los espejos hasta la pantalla T.

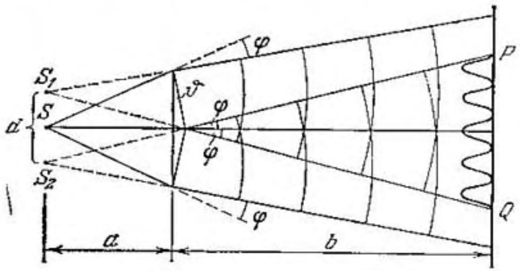


Fig. 121.2.

Sustituyendo en la fórmula (119.10) los valores de d y l que hemos hallado, obtenemos la anchura de una franja de interferencia:

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\varphi}\lambda. \qquad (121.1)$$

La región PQ en que se superponen las ondas tiene la extensión $2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b\varphi$. Dividiendo esta longitud por la anchura de la franja Δx, hallamos el número máximo de franjas de interferencia que se pueden observar valiéndose de los espejos de Fresnel con unos parámetros dados del esquema:

$$N = \frac{4br\varphi^2}{\lambda (r+b)}. \qquad (121.2)$$

Para que estas franjas se vean realmente es preciso que $N/2$ no supere al $m_{\text{lím}}$ determinado por la fórmula (120.10).

Biprisma de Fresnel. Es un sistema de dos prismas iguales, de ángulo de refracción ϑ muy pequeño, unidos por sus bases (fig. 121.2). Ambos prismas forman un solo trozo de vidrio. Paralela a la arista

común, y a la distancia a de la cara opuesta a dicha arista, se sitúa una fuente rectilínea S de luz.

Se puede mostrar que cuando el ángulo de refracción ϑ de los prismas es muy pequeño y el ángulo de incidencia de los rayos sobre la cara del prisma no es muy grande, todos los rayos son desviados por el prisma prácticamente un mismo ángulo

$$\varphi = (n - 1)\,\vartheta$$

(n es el índice de refracción del prisma). El ángulo de incidencia de los rayos sobre el prisma es pequeño. Por eso todos los rayos son desviados por cada una de las mitades del biprisma el mismo ángulo. Como resultado se forman dos ondas cilíndricas coherentes que parten de las fuentes virtuales S_1 y S_2 que se encuentran en el mismo plano que S. La distancia entre las fuentes es

$$d = 2a \operatorname{sen} \varphi \approx 2a\varphi = 2a\,(n - 1)\,\vartheta.$$

La distancia de las fuentes a la pantalla

$$l = a + b.$$

La anchura de una franja de interferencia la hallamos por la fórmula (119.10):

$$\Delta x = \frac{a+b}{2a\,(n-1)\,\vartheta}\,\lambda. \qquad (121.3)$$

La región PQ en que las ondas se superponen tiene la extensión

$$2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b\varphi = 2b\,(n - 1)\,\vartheta.$$

El número máximo de franjas observables es

$$N = \frac{4ab\,(n-1)^2\,\vartheta^2}{\lambda\,(a+b)}. \qquad (121.4)$$

§ 122. Interferencia de la luz al reflejarse en láminas delgadas

Cuando una onda luminosa incide sobre una lámina delgada (o una película) transparente se produce su reflexión en las dos superficies de la lámina. Como resultado surgen dos ondas luminosas que, en determinadas condiciones, pueden interferir.

Sea una lámina transparente planoparalela, sobre la cual incide una onda luminosa plana, que se puede considerar como un haz de rayos paralelos (fig. 122.1). La lámina proyecta hacia arriba dos haces paralelos de luz, de los cuales uno se ha formado a expensas de la reflexión en la superficie superior de la lámina y el otro, a causa de la reflexión en la superficie inferior (en la fig. 122.1 cada uno de estos haces se representa por un solo rayo). Al entrar en la lámina y salir de ella, el segundo haz sufre la refracción. Además de estos

dos haces la lámina proyecta hacia arriba los haces que se producen como resultado de la triple, quíntuple, etc., reflexión en sus superficies. Pero debido a la pequeñez de su intensidad, estos haces no serán tenidos en cuenta[1]). Tampoco nos vamos a interesar por los haces que pasan a través de la lámina.

La diferencia de marcha que adquieren los rayos *1* y *2* antes de encontrarse en el punto C, es

$$\Delta = ns_2 - s_1, \tag{122.1}$$

donde s_1 es la longitud del segmento BC; s_2, la longitud total de los segmentos AO y OC; n, el índice de refracción de la lámina. El

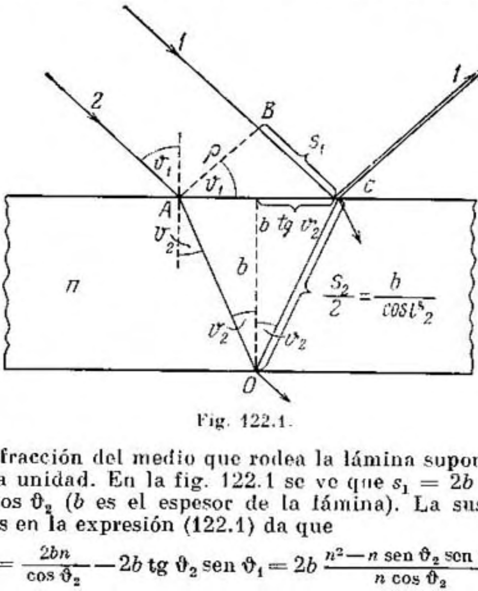


Fig. 122.1.

índice de refracción del medio que rodea la lámina supondremos que es igual a la unidad. En la fig. 122.1 se ve que $s_1 = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1$ y $s_2 = 2b/\cos \vartheta_2$ (b es el espesor de la lámina). La sustitución de estos valores en la expresión (122.1) da que

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \operatorname{sen} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

Haciendo la sustitución $n \operatorname{sen} \vartheta_2 = \operatorname{sen} \vartheta_1$ y teniendo en cuenta que

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1},$$

[1]) Siendo $n = 1{,}5$, en la superficie de la lámina se refleja aproximadamente un 5% del flujo luminoso incidente (véase el último párrafo del § 112). Después de la segunda reflexión, la intensidad será igual a 0,05·0,05, o sea, al 0,25% de la intensidad del haz inicial. Después de la tercera reflexión, a 0,05·0,05·0,05 ó al 0,0125%, lo que constituye la 1/400 parte de la intensidad del haz reflejado una sola vez.

es fácil reducir la fórmula para Δ a la forma

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}. \qquad (122.2)$$

Al calcular la diferencia de fase δ entre las oscilaciones en los rayos *1* y *2* hay que tomar en consideración, además de la diferencia de marcha óptica Δ, la posibilidad del cambio de fase de la onda al reflejarse (véase el § 112). En el punto C (véase la fig. 122.1) la reflexión se produce en el límite de separación entre un medio ópticamente menos denso y un medio ópticamente más denso. Por eso la fase de la onda sufre un cambio igual a π. En el punto O la reflexión tiene lugar en el límite de separación entre un medio ópticamente más denso y un medio ópticamente menos denso, de manera que el salto de fase no se produce. En conclusión, entre los rayos *1* y *2* se crea una diferencia de fase adicional igual a π. Esta diferencia se puede tener en cuenta añadiendo (o restando) a Δ media longitud de onda en el vacío. Como resultado obtenemos

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (122.3)$$

Así, cuando sobre la lámina incide una onda plana se forman dos ondas reflejadas, cuya diferencia de fase se determina por la fórmula (122.3). Veamos las condiciones, con las cuales estas ondas resultan coherentes y pueden interferir. Consideraremos dos casos.

1. Lámina planoparalela. Las dos ondas planas reflejadas se propagan en una dirección, que forma con la normal a la lámina un ángulo igual al de incidencia ϑ_1. Estas ondas pueden interferir si se cumplen las condiciones tanto de coherencia temporal como espacial.

Para que se produzca la coherencia temporal, la diferencia de marcha (122.3) no debe ser mayor que la longitud de coherencia, igual a $\lambda^2/\Delta\lambda \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda_0$ (véase la fórmula (120.9)). Por consiguiente, debe cumplirse la condición

$$2b\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$$

o bien

$$b < \frac{\lambda_0 (\lambda_0/\Delta\lambda_0 + 1/2)}{2\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}}.$$

En la relación obtenida $1/2$ se puede despreciar en comparación con $\lambda_0/\Delta\lambda_0$. La expresión $\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}$ tiene un valor del orden de la unidad[1]). Por lo tanto, se puede escribir que

$$b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0} \qquad (122.4)$$

---

[1]) Para $n = 1{,}5$ la magnitud de esta expresión varía entre los límites de 1,12 (cuando $\vartheta_1 = \pi/2$) a 1,5 (cuando $\vartheta_1 = 0$).

(el espesor duplicado de la lámina debe ser menor que la longitud de coherencia).

De este modo, las ondas reflejadas serán coherentes únicamente si el espesor de la lámina b no supera la magnitud determinada por la relación (122.4). Suponiendo $\lambda_0 = 5000$ Å y $\Delta\lambda_0 = 20$Å, obtenemos el valor límite del espesor, igual a

$$\frac{5000^2}{2 \cdot 20} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ Å} = 0{,}06 \text{ mm}. \qquad (122.5)$$

Veamos ahora la condición con que se cumple la coherencia espacial. Interpongamos en el camino de los haces reflejados una pantalla T (fig. 122.2). Los rayos $1'$ y $2'$ que llegan al punto P' se hallan

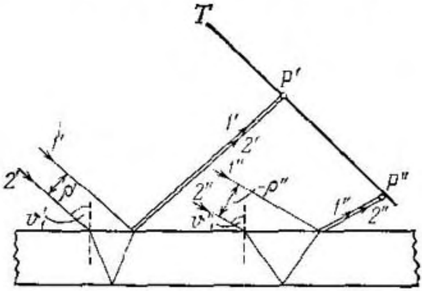


Fig. 122.2.

entre sí, en el haz incidente, a la distancia ρ'. Si esta distancia no es mayor que el radio de coherencia ρ_{coher} de la onda incidente, los rayos $1'$ y $2'$ serán coherentes y crearán en el punto P' la iluminación determinada por el valor de la diferencia de marcha Δ correspondiente al ángulo de incidencia ϑ_1'. Los otros pares de rayos, que inciden también bajo el mismo ángulo ϑ_1', crean en los demás puntos de la pantalla la misma iluminación. De este modo, la pantalla resultará iluminada uniformemente (o en el caso en que $\Delta = (m+{}^1/_2)\lambda_0$ estará oscura). Si varía la inclinación del haz (es decir, si varía el ángulo ϑ_1) variará también la iluminación de la pantalla.

En la fig. 122.1 se ve que la distancia entre los rayos incidentes 1 y 2 es

$$\rho = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \cos \vartheta_1 = \frac{b \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}}. \qquad (122.6)$$

Si se toma $n = 1{,}5$, entonces para $\vartheta_1 = 45°$ se obtiene $\rho = 0{,}8\, b$, y para $\vartheta_1 = 10° - \rho = 0{,}1b$. Si la incidencia es normal ($\vartheta_1 = 0$), $\rho = 0$ cualquiera que sea n.

El radio de coherencia de la luz solar tiene un valor del orden de 0,05 mm (véase (120.15)). Si el ángulo de incidencia es de 45° se puede suponer $\rho \approx b$. Por lo tanto, para que se produzca la interferencia en estas condiciones debe cumplirse la relación

$$b < 0{,}05 \text{ mm} \qquad (122.7)$$

(compárese con (122.5)). Para un ángulo de incidencia del orden de 10° la coherencia espacial se conservará si el espesor de la lámina no es mayor de 0,5 mm. De este modo, llegamos a la conclusión de que, a causa de las limitaciones que imponen las coherencias temporal y espacial, cuando la lámina se ilumina con luz solar, la interferencia sólo se observa si el espesor de dicha lámina no supera

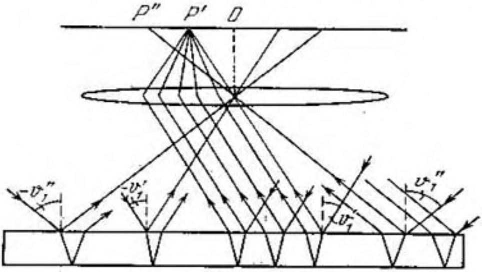


Fig. 122.3.

varias centésimas de milímetro. Empleando para la iluminación una luz, cuyo grado de coherencia sea mayor, la interferencia se observa también en láminas o películas más gruesas.

En la práctica la interferencia que produce una lámina planoparalela se observa interponiendo en el camino de los rayos reflejados una lente que los hace convergir en uno de los puntos de una pantalla situada en el plano focal de la lente (fig. 122.3). La iluminación en este punto depende del valor de la magnitud (122.3). Cuando $\Delta = m\lambda_0$ se obtienen los máximos de intensidad, y cuando $\Delta = (m + {}^1/_2)\,\lambda_0$, los mínimos ($m$ es un número entero). La condición de máximo de intensidad tiene la forma

$$2b\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1} = (m + {}^1/_2)\,\lambda_0. \qquad (122.8)$$

Sea una lámina planoparalela delgada iluminada con luz monocromática difusa (véase la fig. 122.3). Coloquemos paralelamente a la lámina una lente, en cuyo plano focal pondremos una pantalla. En la luz difusa hay rayos de las más diversas direcciones. Los rayos paralelos al plano del dibujo, e incidentes sobre la lámina bajo el ángulo ϑ_1', después de reflejarse de ambas superficies de la lámina

son hechos convergir por la lente en el punto P' y crean en él una iluminación que se determina por el valor de la diferencia de marcha óptica. Los rayos que marchan siguiendo otros planos, pero que inciden sobre la lámina bajo el mismo ángulo ϑ_1', son reunidos por la lente en otros puntos, que se encuentran a la misma distancia del centro O de la pantalla que el punto P'. La iluminación en todos estos puntos será igual. Por lo tanto, los rayos que inciden sobre la lámina bajo un mismo ángulo ϑ_1' crean en la pantalla un conjunto de puntos igualmente iluminados, dispuestos formando una circunferencia con centro en O. Análogamente, los rayos que inciden bajo otro ángulo ϑ_1'' crean en la pantalla un conjunto de puntos igualmente iluminados (pero diferente del anterior, puesto que Δ es otra), situados formando una circunferencia con otro radio. Como resultado, surge en la pantalla un sistema de franjas circulares, alternativamente brillantes y oscuras, con centro común en el punto O. Cada franja está formada por los rayos que inciden sobre la lámina bajo un mismo ángulo ϑ_1. Por esta razón las franjas de interferencia que se obtienen en las condiciones descritas reciben el nombre de *franjas de igual inclinación*. Si la lente se coloca en otra posición con respecto a la lámina (la pantalla debe coincidir en todos los casos con el plano focal de la lente), la forma de las franjas de igual inclinación será otra.

Cada punto de la figura de interferencia se debe a los rayos que antes de pasar por la lente formaban un haz paralelo. Por eso, para observar las franjas de igual inclinación, la pantalla debe colocarse en el plano focal de la lente, es decir, como si se colocara para obtener en ella las imágenes de los objetos infinitamente lejanos. De acuerdo con esto se dice que las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito. El papel de la lente lo puede desempeñar el cristalino y el de la pantalla, la retina del ojo. En este caso, para observar las franjas de igual inclinación, el ojo debe acomodarse como si fuera a mirar objetos muy lejanos.

Según la fórmula (122.8), la posición de los máximos depende de la longitud de onda λ_0. Por eso con la luz blanca se obtiene un conjunto de franjas, desplazadas una respecto de otra, formadas por los rayos de los distintos colores, y la figura de interferencia toma una coloración irisada. La posibilidad de observar la figura de interferencia con luz blanca viene determinada por la capacidad del ojo humano para distinguir los matices de las luces de longitudes de ondas próximas. Los rayos, cuyas longitudes de onda se diferencian en menos de 20 Å, son percibidos por un ojo medio como si tuvieran el mismo color. Por eso, para valorar las condiciones en que puede observarse la interferencia producida por las láminas con la luz blanca, se debe considerar $\Delta\lambda_0$ igual a 20 Å. Este valor precisamente es el que tomamos para determinar el espesor de la lámina (véase (122.5)).

2. Lámina de espesor variable. Tomemos una lámina en forma de cuña con ángulo en el vértice φ (fig. 122.4). Supongamos que sobre ella incide un haz de rayos paralelos. Ahora los rayos reflejados en distintas superficies de la lámina no serán paralelos. Dos rayos que hasta la incidencia se confundían prácticamente (en la fig. 122.4 se representan en forma de una sola recta, designada con la cifra *1'*) se cortan en el punto Q' después de reflejarse. Otros dos rayos, *1"*, que prácticamente se confundían, se cortan en el punto Q''. Se puede demostrar que los puntos Q', Q'' y otros análogos a ellos se encuentran en un plano que pasa por el vértice de la cuña O. El rayo *1'* reflejado en la superficie inferior de la cuña y el rayo *2'* reflejado

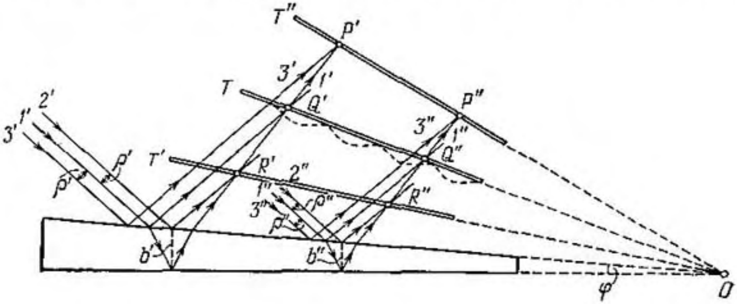


Fig. 122.4.

en su superficie superior, se intersecan en el punto R' situado más cerca de la cuña que el Q'. Análogamente, los rayos *1'* y *3'* se cortan en el punto P', que está más lejos de la superficie de la cuña que el Q'.

Las direcciones en que se propagan las ondas reflejadas en las superficies superior e inferior de la cuña no coinciden. La coherencia temporal sólo se cumplirá en las partes de las ondas reflejadas en los sitios de la cuña, en los cuales el espesor satisface la condición (122.4). Supongamos que esta condición se cumple en toda la cuña. Admitamos, además, que el radio de coherencia es mucho mayor que la longitud de la cuña. Entonces las ondas reflejadas serán coherentes en todo el espacio que hay sobre la cuña y, cualquiera que sea la distancia a que la pantalla se encuentre de la cuña, se observará en ella una figura de interferencia en forma de franjas paralelas al vértice O de la cuña (véanse los tres últimos párrafos del § 119). Así, en particular, se plantea la cuestión cuando la cuña se ilumina con la luz emitida por un láser.

Si la coherencia espacial es limitada, la región en que se localiza la figura de interferencia (es decir, la región del espacio en la cual, colocando la pantalla, se puede observar en ella la figura de interferencia) también resulta limitada. Si la pantalla se coloca de forma que pase por los puntos Q', Q'', . . . (véase la pantalla T en la fig. 122.4), en ella surge la figura de interferencia incluso si la coherencia espacial de la onda incidente es extremadamente pequeña (en puntos de la pantalla se cortan los rayos que antes de incidir sobre la cuña coincidían). Cuando el ángulo φ de la cuña es pequeño, la diferencia de marcha de los rayos se puede calcular con suficiente grado de exactitud por la fórmula (122.3), tomando como b el espesor de la lámina en el sitio en que los rayos inciden sobre ella. Como la diferencia de marcha de los rayos reflejados en distintas partes de la cuña no es igual ahora, la iluminación de la pantalla no será uniforme, sino que aparecerán franjas brillantes y oscuras (véase en la fig. 122.4 la curva de trazos que indica la iluminación de la pantalla T). Cada una de estas franjas surge como resultado de la reflexión en partes de la cuña que tienen el mismo espesor, por cuya razón se les da el nombre de *franjas de igual espesor.*

Cuando la pantalla se desplaza desde la posición T, alejándola o aproximándola a la cuña, empieza a manifestarse el grado de coherencia espacial de la onda incidente. Si en la posición de la pantalla designada por T' en la fig. 122.4 la distancia ρ' entre los rayos incidentes $1'$ y $2'$ se hace del orden del radio de coherencia, en la pantalla T' no se observará la figura de interferencia. Análogamente desaparece la figura de interferencia en la pantalla situada en la posición T''.

De este modo, la figura de interferencia que se obtiene al reflejarse en la cuña una onda plana, resulta localizada en cierta región próxima a la superficie de dicha cuña; esta región será tanto más estrecha cuanto menor sea el grado de coherencia espacial de la onda incidente. En la fig. 122.4 se ve que a medida que nos acercamos al vértice de la cuña, las condiciones para la coherencia, tanto temporal como espacial, se hacen más favorables. Por eso la nitidez de la figura de interferencia disminuye al trasladarse del vértice de la cuña hacia su base. Puede ocurrir que la figura se observe en la zona correspondiente a la parte más delgada de la cuña. En la zona correspondiente de la parte restante, la iluminación de la pantalla es uniforme.

En la práctica, las franjas de igual espesor se observan colocando cerca de la cuña una lente y detrás de ella una pantalla (fig. 122.5). El papel de la lente lo puede desempeñar el cristalino, y el de la pantalla, la retina del ojo. Cuando la pantalla que hay detrás de la lente se encuentra en el plano conjugado del designado por T en la fig. 122.4 (o, respectivamente, el ojo se acomoda a este plano), la figura tendrá la nitidez máxima. Si se desplaza la pantalla, sobre

la cual se proyecta la imagen (o se desplaza la lente), la figura empeora, y desaparece totalmente cuando el plano conjugado de la pantalla sale de los límites de la región en que se localiza la figura de interferencia que se observa sin la lente.

Si la observación se hace con luz blanca, las franjas serán coloreadas, de manera que la superficie de la lámina o película aparecerá irisada. Esta coloración la tienen, por ejemplo, las delgadas capas de petróleo o aceite que se extienden sobre la superficie del agua, así como las pompas de jabón. Los colores de recocido que aparecen

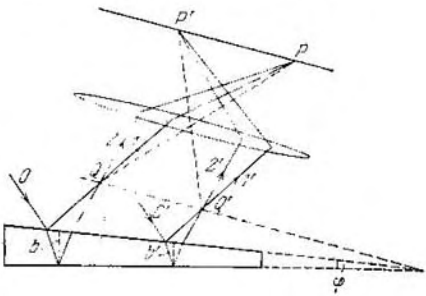


Fig. 112.5.

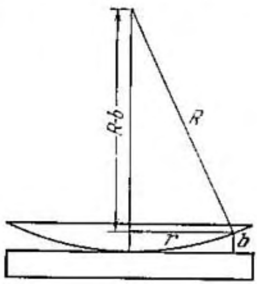


Fig. 122.6.

en las superficies de las piezas de acero templadas, también se deben a la interferencia producida por la película de óxidos transparentes.

Comparemos los dos casos de interferencia por reflexión en películas delgadas que hemos estudiado. Las franjas de igual inclinación se obtienen al iluminar una lámina de espesor constante ($b =$ $=$ const) con luz difusa, en la cual hay rayos de distintas direcciones (ϑ_1 varía dentro de unos límites más o menos anchos). Las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito. Las franjas de igual espesor se observan iluminando una lámina de espesor no constante (b varía) con un haz paralelo de luz ($\vartheta_1 =$ const). Las franjas de igual espesor están localizadas cerca de la lámina. En condiciones reales, por ejemplo, cuando se observan las irisaciones de una película jabonosa o de aceite, varía tanto el ángulo de incidencia como el espesor de la película. En este caso se observan franjas de tipo mixto.

Advertimos que la interferencia producida por películas delgadas no sólo se puede observar en la luz reflejada, sino también en la transmitida.

Anillos de Newton. Un ejemplo clásico de franjas de igual espesor son los *anillos de Newton*. Éstos se observan cuando la luz se refleja

en las superficies en contacto de una gruesa lámina planoparalela de vidrio y de una lente plano-convexa de gran radio de curvatura (fig. 122.6). El papel de película delgada, en cuyas superficies se reflejan las ondas coherentes, lo desempeña el espacio de aire que hay entre la lámina y la lente (a causa del gran espesor de la lámina y de la lente, a expensas de la reflexión en las otras superficies no se producen franjas de interferencia). Cuando la luz incide normalmente, las franjas de igual espesor tienen la forma de circunferencias concéntricas, y si la incidencia es oblicua, de elipses. Hallemos los radios de los anillos de Newton que se obtienen cuando la luz incide según la normal a la lámina. En este caso sen $\vartheta_1 = 0$ y la diferencia de marcha óptica es igual al doble del espesor del espacio de aire (véase la fórmula (122.2); se supone que en este espacio $n = 1$). De la fig. 122.6 se deduce que

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2, \qquad (122.9)$$

donde R es el radio de curvatura de la lente, r, el radio de la circunferencia de todos los puntos, a los cuales corresponde un mismo espacio de aire b. En virtud de la pequeñez de b, hemos despreciado la magnitud b^2 en comparación con $2Rb$. De acuerdo con (122.9), $b = r^2/2R$. Para tener en cuenta el cambio de fase en π que se produce durante la reflexión en la lámina, a $2b = r^2/R$ hay que añadirle $\lambda_0/2$. Como resultado se obtiene

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (122.10)$$

En los puntos para los cuales $\Delta = m'\lambda_0 = 2m' (\lambda_0/2)$, surgen los máximos de intensidad y en los puntos para los cuales $\Delta = (m' + {}^1/_2)\,\lambda_0 = (2m' + 1)(\lambda_0/2)$, los mínimos. Ambas condiciones se pueden unificar:

$$\Delta = m\,\frac{\lambda_0}{2},$$

en este caso a los valores pares de m corresponderán los máximos de intensidad, y a los impares, los mínimos. Sustituyendo aquí Δ por su valor (122.10) y resolviendo la ecuación que se obtiene respecto de r, hallamos los radios de los anillos de Newton brillantes y oscuros:

$$r = \sqrt{R\lambda_0 (m - 1)/2} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (122.11)$$

A los m pares corresponden los radios de los anillos brillantes, y a los m impares, los radios de los anillos oscuros. Al valor de $m = 1$ corresponde $r = 0$, es decir, el punto de contacto de la lámina con la lente. En este punto se observa un mínimo de intensidad, debido al cambio de fase en π que experimenta la onda al reflejarse en la lámina.

Óptica antirreflectora. En la interferencia por reflexión en películas delgadas se basa la «clarificación» de la óptica. El paso de la luz a través de cada superficie refractora de una lente va acompañado de la reflexión de, aproximadamente, un 4% de la luz que incide sobre ella. En los objetivos compuestos estas reflexiones son múltiples y la pérdida total de flujo luminoso alcanza una magnitud apreciable. Además, la reflexión en las superficies de las lentes producen reflejos. En la óptica antirreflectora, para eliminar la reflexión de la luz, cada superficie libre de las lentes se recubre con una película delgada de una substancia, cuyo índice de refracción es distinto del de la lente. El espesor de la película se elige de tal forma que las ondas reflejadas en sus dos superficies se extingan entre sí. Un buen resultado se obtiene si el índice de refracción de la película es igual a la raíz cuadrada del índice de refracción de la lente. Con esta condición la intensidad de las dos ondas reflejadas en las superficies de la película es la misma.

§ 123. Interferómetro de Michelson

Existe una gran variedad de instrumentos de interferencia llamados *interferómetros*. En la fig. 123.1 se representa el esquema del *interferómetro de A. Michelson*. El haz de luz de la fuente S incide sobre la lámina semitransparente P_1, recubierta de una tenue capa de plata (esta capa se muestra en la figura con puntos). La mitad del flujo luminoso incidente es reflejada por la lámina P_1 en la dirección del rayo *1*, la otra mitad pasa a través de la lámina y se propaga en la dirección del rayo *2*. El haz *1* se refleja en el espejo M_1 y retorna a P_1, donde se divide en dos haces de igual intensidad. Uno de ellos pasa a través de la lámina y forma el haz *1'*, el otro se refleja en dirección a S; este haz no nos va a interesar más. El haz *2*, después de reflejarse en el espejo M_2, también retorna a la lámina P_1, donde se divide en dos partes: el haz *2'* reflejado en la capa semitransparente, y otro haz, que pasa a través de dicha capa, el cual tampoco volverá a interesarnos. Los haces de luz *1'* y *2'* tienen la misma intensidad.

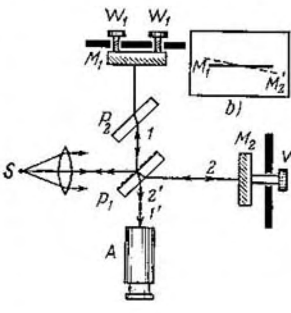


Fig. 123.1.

Si se cumplen las condiciones de coherencia temporal y espacial, los haces *1'* y *2'* interferirán. El resultado de la interferencia depende

de la diferencia de marcha óptica desde la lámina P_1 hasta los espejos M_1 y M_2 y viceversa. El rayo *2* atraviesa el espesor de la lámina tres veces; el rayo *1*, sólo una vez. Para compensar la diferencia de marcha óptica de las distintas longitudes de onda que a costa de esto se produce (debido a la dispersión), en el camino del rayo *1* se interpone una lámina P_2, igual a la P_1, pero sin recubrimiento de plata. Con esto se igualan los caminos de los rayos *1* y *2* en el vidrio. La figura de interferencia se observa con el anteojo A.

Sustituyamos mentalmente el espejo M_2 por su imagen virtual M'_2 en la lámina semitransparente P_1. Entonces se puede considerar que los rayos *1'* y *2'* aparecen como resultado de la reflexión en una lámina transparente limitada por los planos M_1 y M'_2. Valiéndose de los tornillos correctores W_1 se puede variar el ángulo entre estos planos, en particular, se pueden colocar rigurosamente paralelos uno al otro. Girando el tornillo micrométrico W_2 se puede desplazar suavemente el espejo M_2, sin cambiar su inclinación. Con esto se puede variar el espesor de la «lámina», en particular, se puede hacer que los planos M_1 y M'_2 se corten (fig. 123.1, *b*).

El carácter de la figura de interferencia depende del ajuste de los espejos y de la divergencia del haz de luz que incide en el instrumento. Si el haz es paralelo y los planos M_1 y M'_2 forman un ángulo distinto de cero, en el campo visual del anteojo se observan franjas rectilíneas de igual espesor dispuestas paralelamente a la línea de intersección de los planos M_1 y M'_2. Cuando la luz es blanca todas las franjas, excepto la que coincide con la línea de intersección de las franjas de orden nulo, estarán coloreadas. La franja de orden nulo resulta negra, ya que el rayo *1* es reflejado por la lámina P_1 afuera, y el rayo *2*, adentro, a causa de lo cual se produce entre ellos una diferencia de fase igual a π. Con luz blanca las franjas sólo se observan si el espesor de la «lámina» $M_1M'_2$ es pequeño (véase (122.5)). Con la luz monocromática correspondiente a la raya roja del cadmio, A. Michelson observó una figura de interferencia clara siendo la diferencia de marcha del orden de 500 000 longitudes de onda (en este caso la distancia entre M_1 y M'_2 era aproximadamente de 150 mm).

Si el haz de luz es ligeramente divergente y la posición de los planos M_1 y M'_2 es rigurosamente paralela, se obtienen franjas de igual inclinación en forma de anillos concéntricos. Al girar el tornillo micrométrico W_2 el diámetro de dichos anillos aumenta o disminuye. En este caso en el centro de la figura aparecen nuevos anillos o los anillos van disminuyendo hasta reducirse a un punto y luego desaparecer. El desplazamiento de la figura en una franja corresponde a un traslado del espejo M_2 igual a media longitud de onda.

Con el instrumento que acabamos de describir, A. Michelson efectuó varios experimentos que han pasado a la historia de la física. El más célebre de ellos, realizado en colaboración con E. W. Morley

en 1887, tuvo por objeto descubrir el movimiento de la Tierra con respecto al hipotético éter (de este experimento se hablará en el § 150). En 1890—1895, Michelson, valiéndose del interferómetro de su invención, hizo la primera comparación de la longitud de onda de la raya roja del cadmio con la longitud del metro patrón.

En 1920 construyó Michelson el *interferómetro estelar*, con el cual midió las dimensiones angulares de algunas estrellas. Este aparato se montaba en un telescopio. Ante el objetivo de dicho telescopio se ponía una pantalla con dos rendijas (fig. 123.2). La luz procedente de la estrella se reflejaba en un sistema simétrico

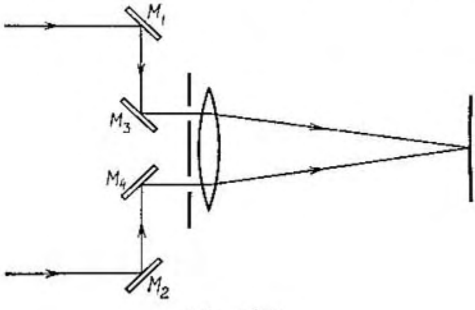


Fig. 123.2.

de espejos M_1, M_2, M_3 y M_4 montados en un bastidor rígido sujeto a una carretilla. Los espejos interiores M_3 y M_4 eran fijos, y los exteriores M_1 y M_2 podían desplazarse simétricamente alejándose de los espejos M_3 y M_4 o acercándose a ellos. La marcha de los rayos se ve claramente en la figura. En el plano focal del objetivo del telescopio aparecían franjas de interferencia, cuya eficacia luminosa[1] dependía de la distancia entre los espejos exteriores. Desplazando estos espejos determinaba Michelson la distancia l entre ellos, con la cual la eficacia luminosa de las franjas se anulaba. Esta distancia debe ser del orden del radio de coherencia de la onda luminosa que llega de la estrella. Según (120.14), el radio de coherencia es igual a λ/φ. De la condición $l = \lambda/\varphi$ se obtiene el diámetro angular de

[1]) Se llama eficacia luminosa de una franja la magnitud

$$\mathcal{V} = \frac{I_{máx} - I_{mín}}{I_{máx} + I_{mín}},$$

en la que $I_{máx}$ e $I_{mín}$ son, respectivamente, las intensidades máxima y mínima de a luz en la región de dicha franja.

la estrella

$$\varphi = \frac{\lambda}{l}.$$

El cálculo exacto conduce a la fórmula

$$\varphi = A\,\frac{\lambda}{l},$$

en la que $A = 1,22$ para una fuente en forma de disco circular uniformemente iluminado. Si los bordes del disco son más oscuros que el centro, el coeficiente es mayor que 1,22 y su valor depende de la velocidad con que decrece la iluminación en el sentido del centro hacia el borde. El cálculo exacto da, además, que la eficacia luminosa, anulada para cierto valor de l, si se sigue aumentando l vuelve a hacerse distinta de cero, pero los valores que alcanza en este caso son pequeños.

La distancia máxima entre los espejos exteriores era, en el interferómetro estelar construido por Michelson, igual a 6,1 m (el diámetro del telescopio era de 2,5 m). A esta distancia correspondía un diámetro angular mínimo medible de, aproximadamente, 0,02″. La primera estrella cuyo diámetro angular se midió fue Betelgeuze (α Orionis). El valor de φ obtenido fue igual a 0,047″.

§ 124. Interferencia de muchos rayos

Hasta aquí hemos estudiado la interferencia de dos rayos. Analicemos ahora el caso en que interfieren muchos rayos luminosos.

Supongamos que a un punto dado de una pantalla llegan N rayos de igual intensidad y que el desplazamiento de la fase de cada rayo posterior, respecto de la del anterior, tiene la misma magnitud δ. Representamos las oscilaciones que excitan los rayos en forma de exponente:

$$E_1 = ae^{i\omega t},\ E_2 = ae^{i(\omega t+\delta)},\ \ldots,\ E_m = ae^{i[\omega t+(m-1)\delta]},\ \ldots,$$
$$E_N = ae^{i[\omega t+(N-1)\delta]}.$$

La oscilación resultante se determina por la fórmula

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = ae^{i\omega t} \sum_{m=1}^{N} e^{i(m-1)\delta}.$$

La expresión obtenida es la suma de N términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es igual a la unidad y cuya razón es $e^{i\delta}$. Por consiguiente,

$$E = ae^{i\omega t}\,\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} = \hat{A}e^{i\omega t},$$

donde

$$\hat{A} = a\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} \qquad (124.1)$$

es la amplitud compleja, que se puede representar en la forma

$$\hat{A} = Ae^{i\alpha} \qquad (124.2)$$

(A es la amplitud ordinaria de la oscilación resultante y α, su fase inicial).

El producto de la magnitud (124.2) por su conjugada compleja da el cuadrado de la amplitud de la oscilación resultante:

$$\hat{A}\hat{A}^* = Ae^{i\alpha}Ae^{-i\alpha} = A^2. \qquad (124.3)$$

Sustituyendo en (124.3) $\hat{A}$ por su valor (124.1), obtenemos la expresión siguiente del cuadrado de la amplitud:

$$A^2 = \hat{A}\hat{A}^* = a^2\frac{(1-e^{iN\delta})(1-e^{-iN\delta})}{(1-e^{i\delta})(1-e^{-i\delta})} =$$

$$= a^2\frac{2-e^{iN\delta}-e^{-iN\delta}}{2-e^{i\delta}-e^{-i\delta}} = a^2\frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} = a^2\frac{\operatorname{sen}^2(N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)}. \qquad (124.4)$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por lo tanto, la intensidad que se produce cuando interfieren los N rayos que consideramos, se determina por la expresión

$$I(\delta) = Ka^2\frac{\operatorname{sen}^2(N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)} = I_0\frac{\operatorname{sen}^2(N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)} \qquad (124.5)$$

(K es un coeficiente de proporcionalidad e $I_0 = Ka^2$, la intensidad que crea cada uno de los rayos por separado).

Para los valores

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (124.6)$$

la expresión (124.5) se hace indeterminada. Suprimimos la indeterminación aplicando la regla de l'Hospital:

$$\lim_{\delta\to 2\pi m}\frac{\operatorname{sen}^2(N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)} = \lim_{\delta\to 2\pi m}\frac{2\operatorname{sen}(N\delta/2)\cos(N\delta/2)\cdot N/2}{2\operatorname{sen}(\delta/2)\cos(\delta/2)\cdot 1/2} =$$

$$= \lim_{\delta\to 2\pi m} N\frac{\operatorname{sen}(N\delta)}{\operatorname{sen}\delta}.$$

La expresión obtenida también es indeterminada. Por eso aplicamos de nuevo la regla de l'Hospital:

$$\lim_{\delta\to 2\pi m}\frac{\operatorname{sen}^2(N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)} = \lim_{\delta\to 2\pi m} N\frac{\operatorname{sen}(N\delta)}{\operatorname{sen}\delta} = \lim_{\delta\to 2\pi m} N\frac{N\cos(N\delta)}{\cos\delta} = N^2.$$

De este modo, cuando $\delta = 2\pi m$ (o las diferencias de marcha $\Delta = m\lambda_0$) la intensidad resultante es

$$I = I_0N^2. \qquad (124.7)$$

Este resultado podía preverse de antemano. En efecto, a los puntos en que $\delta = 2\pi m$ todas las oscilaciones llegan en igual fase. Por consiguiente, la amplitud resultante es N veces mayor que la amplitud de una oscilación aislada, y la intensidad, N^2 veces mayor que la de ésta.

Los puntos, en los cuales se observa la intensidad determinada por la fórmula (124.7), se llaman *máximos principales*. Su posición se halla por la condición (124.6). El número m es el *orden* del máximo principal. De la expresión (124.5) se sigue que en el intervalo entre dos máximos principales vecinos hay $N - 1$ mínimo de intensidad. Para cerciorarnos de esto consideremos, por ejemplo, el intervalo entre los máximos de orden nulo ($m = 0$) y de primer orden ($m = 1$). En este intervalo δ varía desde cero hasta 2π, y $\delta/2$, desde cero hasta π. El denominador de la expresión (124.5) es en todas partes, excepto en los extremos del intervalo, distinto de cero, y en la mitad de dicho intervalo alcanza su valor máximo, igual a la unidad. La magnitud $N\delta/2$ toma en este intervalo todos los valores desde cero hasta $N\pi$. Para los valores π, 2π, . . ., $(N - 1)\pi$ el numerador de la expresión (124.5) se anula. Éstos serán los mínimos de intensidad. Sus posiciones corresponden a los valores de δ siguientes:

$$\delta = \frac{k'}{N} 2\pi \quad (k' = 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1). \tag{124.8}$$

En los intervalos entre los $N - 1$ mínimos se encuentran $N - 2$ máximos secundarios. Los máximos secundarios de mayor intensidad son los que están más cerca de los máximos principales. El máximo secundario más próximo al principal de orden nulo está entre los mínimos primero ($k' = 1$) y segundo ($k' = 2$). Estos mínimos corresponden a los valores de δ iguales a $2\pi/N$ y $4\pi/N$. Por consiguiente, al máximo que consideramos le corresponde $\delta = 3\pi/N$. La sustitución de este valor en la fórmula (124.5) da

$$I(3\pi/N) = Ka^2 \frac{\operatorname{sen}^2(3\pi/2)}{\operatorname{sen}^2(3\pi/2N)}.$$

El numerador es igual a la unidad. Si N es grande se puede suponer que en el denominador el seno es igual al argumento (sen $(3\pi/2N \approx$ $\approx 3\pi/2N$). Entonces

$$I(3\pi/N) = Ka^2 \frac{1}{(3\pi/2N)^2} = \frac{Ka^2N^2}{(3\pi/2)^2}.$$

En el numerador se ha obtenido la intensidad del máximo principal (véase (124.7)). Por lo tanto, cuando N es grande, el máximo secundario más próximo al principal tiene una intensidad $(3\pi/2)^2 \approx 22$ veces menor que la de éste. Los demás máximos secundarios son más débiles aún.

En la fig. 124.1 se representa la gráfica de la función $I(\delta)$ para $N = 10$. Como término de comparación se da, con línea de trazos,

la gráfica de la intensidad para $N = 2$ (interferencia de dos rayos; véase la curva $I(x)$ en la fig. 119.2). En esta misma figura se ve que a medida que aumenta el número de rayos que interfieren, los máximos principales se estrechan. Los máximos secundarios son tan débiles que, en la práctica, la figura de interferencia tiene la forma de estrechas rayas brillantes sobre un fondo oscuro.

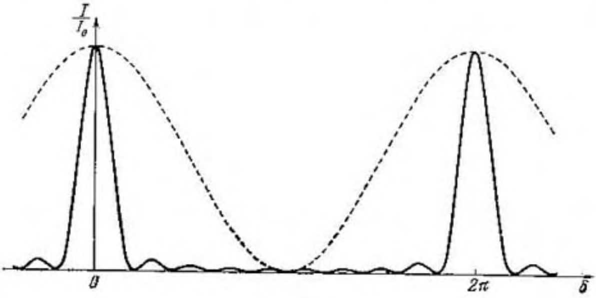


Fig. 124.1.

Consideremos ahora la interferencia de un gran número de rayos, cuya intensidad decrezca en proporción geométrica. Las oscilaciones que se componen tienen la forma:

$$E_1 = ae^{i\omega t},\ E_2 = a\rho e^{i(\omega t+\delta)},\ \ldots,$$
$$E_m = a\rho^{m-1}e^{i[\omega t+(m-1)\delta]},\ \ldots \tag{124.9}$$

(ρ es una magnitud constante menor que la unidad). La oscilación resultante viene descrita por la fórmula

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = ae^{i\omega t}\sum_{m=1}^{N} \rho^{m-1}e^{i(m-1)\delta}.$$

Aplicando la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica, obtenemos

$$E = ae^{i\omega t}\,\frac{1-\rho^N e^{iN\delta}}{1-\rho e^{i\delta}} = \hat{A}e^{i\omega t}.$$

De este modo, la amplitud compleja es

$$\hat{A} = a\,\frac{1-\rho^N e^{iN\delta}}{1-\rho e^{i\delta}}. \tag{124.10}$$

Si N es grande, el número complejo $\rho^N e^{iN\delta}$ se puede despreciar en comparación con la unidad (como ejemplo diremos que $0.9^{100} \approx$

$\approx 3\cdot10^{-5}$). Entonces la expresión (124.10) se simplifica del modo siguiente:

$$\hat{A}=a\frac{1}{1-\rho e^{i\delta}}.$$

Multiplicando esta expresión por su conjugada compleja, obtenemos el cuadrado de la amplitud ordinaria de la oscilación resultante:

$$A^2=\hat{A}\hat{A}^*=\frac{a^2}{(1-\rho e^{i\delta})(1-\rho e^{-i\delta})}=\frac{a^2}{1+\rho^2-\rho(e^{i\delta}+e^{-i\delta})}=$$

$$=\frac{a^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\delta}=\frac{a^2}{(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos\delta)}=\frac{a^2}{(1-\rho)^2+4\rho\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)}.$$

De aquí

$$I(\delta)=\frac{Ka^2}{(1-\rho)^2+4\rho\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)}=\frac{I_1}{(1-\rho)^2+4\rho\,\mathrm{sen}^2(\delta/2)},\qquad(124.11)$$

donde $I_1 = Ka^2$ es la intensidad del rayo primero (más intenso).

Para los valores

$$\delta = 2\pi m\quad(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)\qquad(124.12)$$

la expresión (124.11) tiene los máximos

$$I_{\text{máx}}=\frac{I_1}{(1-\rho)^2}.\qquad(124.13)$$

En los intervalos entre los máximos la función varía monótonamente, alcanzando en la mitad del intervalo el valor

$$I_{\text{mín}}=\frac{I_1}{(1-\rho)^2+4\rho}=\frac{I_1}{(1+\rho)^2}.\qquad(124.14)$$

Por lo tanto, la razón de la intensidad en el máximo a la intensidad en el mínimo

$$\frac{I_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}}=\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2\qquad(124.15)$$

resulta ser tanto mayor cuanto más se aproxima ρ a la unidad, es decir, cuanto más lentamente decrezca la intensidad de los rayos que interfieren. En la fig. 124.2 se da la gráfica de la función (124.11) para $\rho = 0{,}8$. De ella se deduce que la figura de interferencia tiene la forma de estrechas rayas nítidas sobre un fondo prácticamente oscuro. A diferencia de la fig. 124.1, los máximos secundarios están ausentes.

Un caso práctico de gran número de rayos de intensidad decreciente tiene lugar en el *interferómetro de Fabry y Perot*. Este aparato consta de dos láminas de vidrio o cuarzo separadas por un espacio de aire (fig. 124.3). Mediante un acabado meticuloso se consigue que las irregularidades de las superficies interiores de las láminas no superen varias centésimas de la longitud de onda. Después,

sobre estas superficies se extienden capas metálicas parcialmente transparentes o películas dieléctricas[1]). Las superficies exteriores de las láminas se hacen ligeramente sesgadas respecto de las interiores, para evitar los reflejos debidos a la reflexión de la luz en estas superficies. En la forma inicial que se dio a este interferómetro, una de las

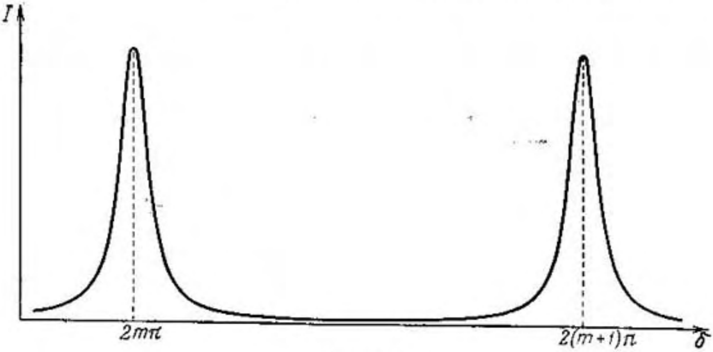


Fig. 124.2.

láminas podía desplazarse, con relación a la otra fija, por medio de un tornillo micrométrico. Pero la inseguridad de esta estructura hizo que dejara de usarse. En los modelos modernos las láminas

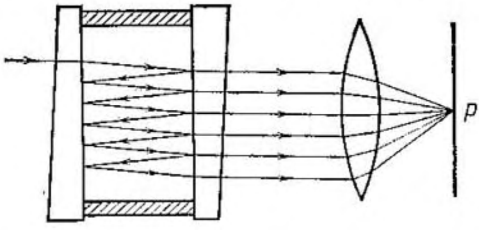


Fig. 124.3.

son fijas. El paralelismo de los planos interiores, de trabajo, se logra colocando entre las láminas un anillo de invar o de cuarzo[2]).

[1]) Las capas metálicas tienen el inconveniente de que absorben intensamente la luz. Por eso en los últimos años se han empezado a sustituir por recubrimientos dieléctricos de muchas capas, que poseen un gran poder reflectante.

[2]) Estos dos materiales se caracterizan por tener un coeficiente de dilatación muy pequeño.

Este anillo tiene a cada lado tres salientes con los extremos bien rectificados. Las láminas se aprietan al anillo con unos muelles. Esta estructura asegura el paralelismo riguroso de las láminas y la permanencia de la distancia entre ellas. Un interferómetro semejante, con distancia fija entre las láminas, se llama *patrón de Fabry—Perot.*

Veamos lo que ocurre con un rayo que penetre en el espacio entre las láminas (fig. 124.4). Sea I_0 la intensidad de dicho rayo. En el punto A_1 se divide en el rayo *1*, que sale fuera, y el rayo reflejado *1'*. Si el índice de reflexión de la superficie de la lámina es ρ, la intensidad del rayo *1* será $I_1 = (1-\rho) I_0$, mientras que la del rayo re-

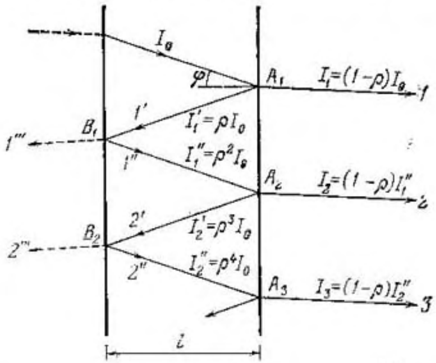


Fig. 124.4.

flejado $I_1' = \rho I_0$ [1]). En el punto B_1 el rayo *1'* se divide en dos. El rayo *1'''* indicado con línea de trazos queda fuera de juego y el *1''* tendrá la intensidad $I_1'' = \rho I_1' = \rho^2 I_0$. En el punto A_2 el rayo *1''* se divide en dos, el rayos *2* que sale fuera con la intensidad $I_2 = (1-\rho) I_1'' = (1-\rho)\rho^2 I_0$ y el rayo reflejado *2'*, y así sucesivamente. De este modo, entre las intensidades de los rayos *1*, *2*, *3*, etc., que salen del instrumento existe la relación

$$I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : \rho^2 : \rho^4 : \ldots$$

Respectivamente, entre las amplitudes de las oscilaciones se obtiene la relación

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots = 1 : \rho : \rho^2 : \ldots$$

(compárese con (124.9)).

[1]) Despreciamos la absorción de la luz por las capas reflectoras y en el espesor de las láminas.

En cada uno de los rayos *2*, *3*, *4*, . . . la oscilación tiene un retraso de fase, respecto de la oscilación en el rayo que le precede, igual a una misma magnitud δ, determinada por la diferencia de marcha óptica Δ que se produce en el camino $A_1 - B_1 - A_2$ ó $A_2 - B_2 - A_3$, etc. (véase la fig. 124.4). En la figura se ve que $\Delta = 2l/\cos\varphi$, donde φ es el ángulo de incidencia de los rayos sobre la capa reflectora.

Si con una lente se hacen convergir los rayos *1*, *2*, *3* . . . en el punto P de su plano focal (véase la fig. 124.3), las oscilaciones crea-

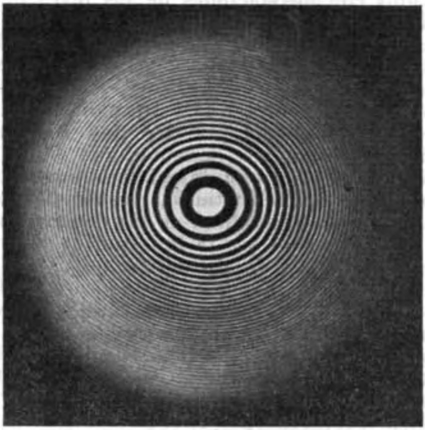


Fig. 124.5.

das por estos rayos tendrán la forma (124.9). Por consiguiente, la intensidad en el punto P se determina por la fórmula (124.11), en la cual ρ tiene el sentido de índice de reflexión y

$$\delta \quad \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{2l}{\cos\varphi}.$$

Si a través del instrumento se hace pasar un haz divergente de luz, en el plano focal de la lente aparecen franjas de igual inclinación en forma de anillos nítidos (fig. 124.5).

El interferómetro de Fabry y Perot se utiliza en espectroscopia para estudiar la estructura fina de las rayas espectrales. También se emplea mucho en metrología para comparar la longitud del metro patrón con las longitudes de onda de algunas rayas espectrales.

CAPÍTULO XVIII

DIFRACCÍÓN DE LA LUZ

§ 125. Introducción

Se llama difracción el conjunto de fenómenos que se observan cuando la luz se propaga en un medio con bruscas heterogeneidades[1]) y que están relacionados con desviaciones de las leyes de la óptica geométrica. La difracción, en particular, hace que las ondas luminosas bordeen los obstáculos y que la luz penetre en la región de la sombra geométrica. El rodeo de los obstáculos por las ondas sonoras (es decir, la difracción de las ondas sonoras) se observa constantemente en la vida ordinaria. Para observar la difracción de las ondas luminosas hay que crear condiciones especiales. Esto se debe a la pequeñez de la longitud de estas ondas. Sabemos que en el límite, cuando $\lambda \to 0$, las leyes de la óptica ondulatoria se transforman en las leyes de la óptica geométrica. Por lo tanto, las desviaciones de las leyes de la óptica geométrica, a igualdad de las demás condiciones, serán tanto menores cuanto menor sea la longitud de la onda.

Entre la interferencia y la difracción no existe una diferencia física esencial. Ambos fenómenos consisten en la redistribución del flujo luminoso debida a la superposición de las ondas. Por razones históricas, la redistribución de la intensidad que se produce como resultado de la superposición de las ondas excitadas por un número finito de fuentes coherentes discretas se llama interferencia de las ondas. Y la redistribución de la intensidad causada por la superposición de las ondas excitadas por fuentes coherentes dispuestas de un modo continuo, se denomina difracción de las ondas. Por eso se dice, por ejemplo, figura de interferencia producida por dos rendijas estrechas y figura de difracción por una rendija.

La difracción se observa por lo general valiéndose del esquema siguiente. En el camino de la onda luminosa que se propaga desde una fuente, se interpone un obstáculo opaco que tapa parte de su superficie de onda. Detrás de este obstáculo se coloca una pantalla, en la cual aparece la figura de difracción.

Hay dos tipos de difracción. Si la fuente de luz S y el punto de observación P están tan lejos del obstáculo que los rayos que inciden sobre éste y los que van hacia el punto P forman haces prácticamente paralelos, se dice que la *difracción es de rayos paralelos* o *de Fraunhofer*. En el caso contrario se dice que la *difracción es de Fresnel*. La difracción de Fraunhofer se puede observar colocando una lente

[1]) Por ejemplo, cerca de los bordes de cuerpos opacos o transparentes, a través de orificios, etc.

detrás del foco de luz S y otra delante del punto de observación P, de modo que los puntos S y P se encuentren en el plano focal de la lente respectiva (fig. 125.1).

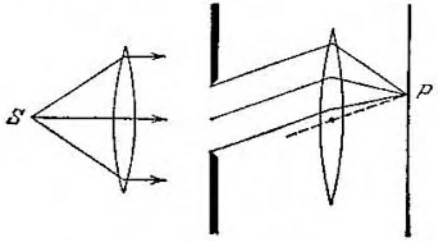


Fig. 125.1.

El criterio para determinar de qué tipo de difracción —de Fresnel o de Fraunhofer— se trata en cada caso concreto se dará en el § 129.

§ 126. Principio de Huygens—Fresnel

La penetración de las ondas luminosas en la región de la sombra geométrica se puede explicar por medio del principio de Huygens (véase el § 118). Pero este principio no proporciona información sobre la amplitud y, por consiguiente, sobre la intensidad de las ondas que se propagan en distintas direcciones. Fresnel completó el principio de Huygens con la representación de la interferencia de las ondas secundarias. La toma en consideración de las amplitudes y fases de las ondas secundarias permite hallar la amplitud de la onda resultante en cualquier punto del espacio. El principio de Huygens desarrollado por este procedimiento recibe el nombre de *principio de Huygens—Fresnel.*

Según este último principio, cada elemento de una superficie de onda S (fig. 126.1) sirve de fuente de una onda esférica secundaria, cuya amplitud es proporcional a la magnitud del elemento dS. La amplitud de una onda esférica disminuye con la distancia r a la fuente según la ley $1/r$ (véase la fórmula (94.10)). Por consiguiente, desde cada parte dS de la superficie de onda llegará al punto P, que se encuentra delante de esta superficie, una oscilación

$$dE = K\frac{a_0\,dS}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0). \qquad (126.1)$$

En esta expresión $(\omega t + \alpha_0)$ es la fase de la oscilación en el sitio en que se halla la superficie de onda S; k es el número de onda; r,

la distancia desde el elemento dS de la superficie hasta el punto P. El factor a_0 viene determinado por la amplitud de la oscilación luminosa en el sitio en que se encuentra dS. El coeficiente K depende del ángulo φ entre la normal $\mathbf{n}$ a la superficie dS y la dirección que va desde dS hasta el punto P. Cuando $\varphi = 0$, este coeficiente es máximo, y cuando $\varphi = \pi/2$, se anula.

La oscilación resultante en el punto P es la superposición de las oscilaciones (126.1) tomadas para toda la superficie de onda S:

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0)\, dS. \qquad (126.2)$$

Esta fórmula es la expresión analítica del principio de Huygens—Fresnel.

Para fundamentar el principio de Huygens—Fresnel se pueden aducir los razonamientos siguientes. Supongamos que en el camino

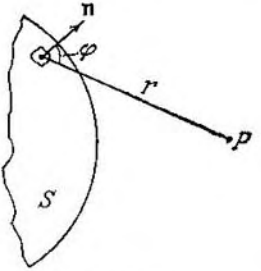


Fig. 126.1.

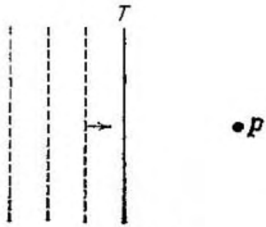


Fig. 126.2.

que sigue una onda luminosa (que para simplificar consideraremos plana) se interpone una pantalla opaca delgada T (fig. 126.2). Detrás de la pantalla la intensidad de la luz es en todas partes nula. Esto se debe a que la onda luminosa que incide sobre la pantalla excita oscilaciones de los electrones que hay en el material de que está hecha. Los electrones que oscilan radían ondas electromagnéticas. El campo que hay detrás de la pantalla es la superposición de la onda primaria (que incide sobre la pantalla) y todas las ondas secundarias. Las amplitudes y las fases de las ondas secundarias resultan ser tales que, al superponerse estas ondas a la primaria, en cualquier punto P detrás de la pantalla se obtiene una amplitud nula. Por lo tanto, si la onda primaria crea en el punto P la oscilación

$$A_{\text{prim}} \cos(\omega t + \alpha),$$

la oscilación resultante excitada en este mismo punto por las ondas secundarias tiene la forma

$$A_{sec}\cos(\omega t+\alpha-\pi),$$

siendo $A_{ses}=A_{prim}$.

Esto significa que al calcular la amplitud de la oscilación originada en el punto P por la onda luminosa que se propaga desde una fuente real, se puede sustituir esta fuente por el conjunto de las fuentes secundarias situadas a lo largo de la superficie de onda. En esto consiste la esencia del principio de Huygens—Fresnel.

Dividamos el obstáculo opaco en dos partes. Una de ellas, que llamaremos tapón, tiene dimensiones finitas y forma arbitraria (circular, rectangular, etc.). La otra incluye toda la superficie restante del obstáculo infinito. Mientras el tapón está en su sitio, la oscilación resultante en el punto P detrás de la pantalla es nula. Esta oscilación se puede representar como la suma de las creadas por la onda primaria, por la onda originada por el tapón y por la producida por la parte restante del obstáculo:

$$A_{prim}\cos(\omega t+\alpha)+A_{tap}\cos(\omega t+\alpha')+$$
$$+A_{obst}\cos(\omega t+\alpha'')=0. \quad (126.3)$$

Si se quita el tapón, es decir, si se deja que la onda pase por el orificio que queda en el obstáculo opaco, la oscilación en el punto P tendrá la forma

$$E_P=A_{prim}\cos(\omega t+\alpha)+A_{obst}\cos(\omega t+\alpha'')=$$
$$=-A_{tap}\cos(\omega t+\alpha')=A_{tap}\cos(\omega t+\alpha'-\pi).$$

Hemos aplicado la condición (126.3) y supuesto que por quitar el tapón no varía el carácter de las oscilaciones de los electrones en la parte que queda del obstáculo.

De este modo, se puede considerar que las oscilaciones en el punto P las crea el conjunto de las fuentes de ondas secundarias situadas en la superficie del orificio originado al quitar el tapón.

§ 127. Zonas de Fresnel

Los cálculos por la fórmula (126.2) son en el caso general un problema muy difícil. Pero, como demostró Fresnel, en los casos que se caracterizan por su simetría, la amplitud de la oscilación resultante se puede hallar por medio de una simple suma algebraica o geométrica.

Para comprender la esencia del método elaborado por Fresnel vamos a determinar la amplitud de la oscilación luminosa excitada en un punto P por una onda esférica que se propaga en un medio homogéneo isótropo desde un foco puntual S (fig. 127.1). Las super-

ficies de onda son en este caso simétricas con respecto a la recta SP. Aprovechando esto, dividimos la superficie de onda representada en la figura en zonas anulares construidas de tal modo que las distancias desde los bordes de cada zona hasta el punto P se diferencien en $\lambda/2$ (λ es la longitud de la onda en el medio en que se propaga). Las zonas que tienen esta propiedad se llaman *zonas de Fresnel*.

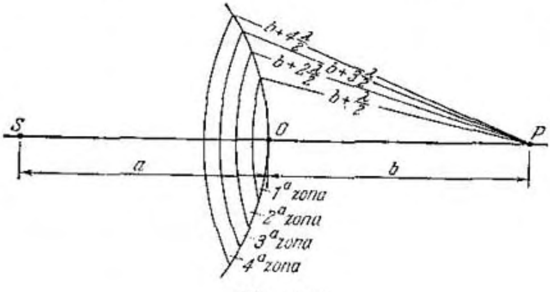


Fig. 127.1.

En la fig. 127.1 se ve que la distancia b_m desde el borde exterior de la m-ésima zona hasta el punto P es

$$b_m = b + m\frac{\lambda}{2} \tag{127.1}$$

(b es la distancia desde el vértice de la superficie de onda O hasta el punto P).

Las oscilaciones que llegan al punto P desde puntos análogos de dos zonas colindantes (es decir, desde puntos que se encuentran en la mitad de cada zona, en sus bordes, etc.), se hallan en oposición de fase. Por eso, entre la oscilación resultante creada por cada zona en conjunto y las originadas por las zonas contiguas habrá una diferencia de fase igual a π.

Calculemos el área de las zonas. El límite exterior de la m-ésima zona separa en la superficie de onda un segmento esférico de altura h_m (fig. 127.2). El área de este segmento la designaremos por S_m. Entonces el área de la m-ésima zona se puede representar en la forma

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

donde S_{m-1} es el área del segmento esférico separado por el límite exterior de la $(m-1)$-ésima zona.

En la fig. 127.2 se ve que

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2$$

(a es el radio de la superficie de onda y r_m, el radio del límite exterior de la m-ésima zona). Elevando al cuadrado las expresiones entre paréntesis, obtenemos

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \qquad (127.2)$$

De aquí

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \qquad (127.3)$$

Limitándonos a considerar los números m no demasiado grandes, en

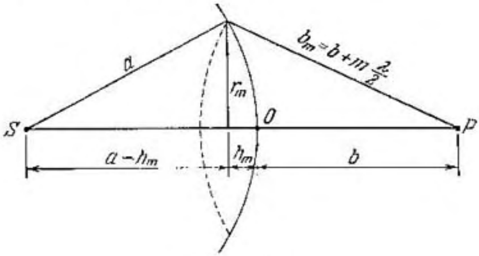


Fig. 127.2.

virtud de la pequeñez de λ se puede despreciar el sumando que contiene λ^2. En esta aproximación

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \qquad (127.4)$$

El área del segmento esférico $S = 2\pi Rh$ (R es el radio de la esfera y h la altura del segmento). Por consiguiente,

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

y el área de la m-ésima zona

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

La expresión que hemos obtenido no depende de m. Esto significa que cuando los números m no son demasiado grandes, las áreas de las zonas de Fresnel son aproximadamente iguales

De la igualdad (127.2) se pueden deducir los radios de las zonas. Cuando los números m no son demasiado grandes, la altura del segmento $h_m \ll a$, por lo tanto se puede considerar que $r_m^2 = 2ah_m$. Sustituyendo h_m por su valor (127.4), obtenemos para el radio del límite exterior de la m-ésima zona la expresión

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \qquad (127.5)$$

Si suponemos $a = b = 1$ m y $\lambda = 0{,}5$ μm, para el radio de la primera zona (central) se obtiene el valor $r_1 = 0{,}5$ mm. Los radios de las zonas siguientes crecen como $\sqrt{m}$.

Así, las áreas de las zonas de Fresnel son aproximadamente iguales. La distancia b_m desde la zona hasta el punto P crece lentamente con el número m de la zona. El ángulo φ entre la normal a los elementos de la zona y la dirección al punto P también crece con m. Todo esto conduce a que la amplitud A_m de la oscilación excitada por la m-ésima zona en el punto P decrece monótonamente al crecer m. Incluso cuando los números m son muy grandes y el área de la zona empieza a crecer apreciablemente con m (véase (127.3)), la disminución del factor $K(\varphi)$ es mayor que el crecimiento ΔS_m de manera que A_m continúa disminuyendo. De este modo, las amplitudes de las oscilaciones que excitan en el punto P las zonas de Fresnel forman una sucesión monótonamente decreciente:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \ldots$$

Las fases de las oscilaciones excitadas por zonas vecinas difieren en π. Por lo tanto, la amplitud A de la oscilación resultante en el punto P se puede representar en la forma

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \qquad (127.6)$$

En esta expresión todas las amplitudes correspondientes a las zonas impares figuran con un signo y las correspondientes a las zonas pares, con otro.

Escribamos la expresión (127.6) en la forma

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \ldots \qquad (127.7)$$

Como A_m decrece monótonamente, se puede considerar aproximadamente que

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Entonces las expresiones entre paréntesis serán iguales a cero y la fórmula (127.7) se simplificará del modo siguiente:

$$A = A_1/2. \qquad (127.8)$$

Según la fórmula (127.8), la amplitud creada en un punto determinado P por toda la superficie de onda esférica es igual a la mitad de la amplitud que crea la zona central sola. Si en el camino de la onda se interpone una pantalla opaca con un orificio que deje abierta solamente la zona centro de Fresnel, la amplitud en el punto P será igual a A_1, es decir, dos veces mayor que la amplitud (127.8). Respectivamente, la intensidad de la luz en el punto P será en este caso cuatro veces mayor que en ausencia de obstáculos entre los puntos S y P.

Resolvamos ahora el problema de la propagación de la luz desde el foco S al punto P por el método de la composición gráfica de las amplitudes. Dividamos la superficie de onda en zonas anulares análogas a las de Fresnel pero de anchura mucho menor (la diferencia de marcha desde los bordes de la zona hasta el punto P constituye una pequeña fracción de λ igual para todas las zonas). La oscilación que crea en el punto P cada una de las zonas la representaremos en forma de un vector de longitud igual a la amplitud de la oscilación y cuya dirección forme con la tomada como referencia un ángulo que dé la fase inicial de la oscilación (véase el § 55 del tomo 1º).



Fig. 127.3.

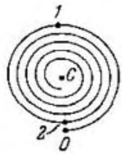


Fig. 127.4.

La amplitud de las oscilaciones creadas por estas zonas en el punto P disminuye lentamente al pasar de una zona a otra. Cada oscilación siguiente está retrasada en fase respecto de la anterior una misma magnitud. Por consiguiente, el diagrama vectorial que se obtiene al componer las oscilaciones excitadas por las zonas aisladas tiene la forma que se muestra en la fig. 127.3.

Si las amplitudes creadas por las zonas aisladas fueran iguales, el final del último de los vectores representados en la fig. 127.3 coincidiría con el principio del primer vector. En realidad el valor de la amplitud disminuye, aunque muy débilmente, por lo que los vectores no forman una figura cerrada, sino una línea quebrada en espiral.

En el límite, cuando la anchura de las zonas anulares tiende a cero (su número aumenta ilimitadamente en este caso) el diagrama vectorial toma la forma de espiral que se arrolla al punto C (fig. 127.4). Las fases de las oscilaciones en los puntos O y 1 se diferencian en π (los vectores infinitamente pequeños que forman la espiral están dirigidos en estos puntos en sentidos opuestos). Por lo tanto, la parte $O—1$ de la espiral corresponde a la primera zona de Fresnel. El vector trazado del punto O al punto 1 (fig. 127.5, *a*) representa la oscilación que excita en el punto P esta zona. Análogamente, el vector trazado del punto 1 al 2 (fig. 127.5, *b*) representa la oscilación que excita la segunda zona de Fresnel. Las oscilaciones de las zonas primera y segunda están en oposición de fase; de acuerdo con esto, los vectores $O1$ y 12 están dirigidos en sentidos opuestos.

Las oscilaciones excitadas en el punto P por toda la superficie de onda viene representada por el vector OC (fig. 127.5, *c*). En la figura se ve que la amplitud es en este caso igual a la mitad de la amplitud que crea la primera zona. Este resultado lo obtuvimos antes algebraicamente (véase la fórmula (127.8)). Advertimos que la oscilación que excita la mitad interior de la primera zona de Fresnel se representa por el vector OB (fig. 127.5, *d*). De este modo,

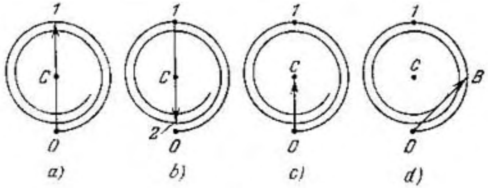


Fig. 127.5.

la acción de la mitad interior de la primera zona de Fresnel no es equivalente a la mitad de la acción de dicha primera zona. El vector OB es $\sqrt{2}$ veces mayor que el vector OC. Por lo tanto, la intensidad de la luz creada por la mitad interior de la primera zona de Fresnel es dos veces mayor que la intensidad que crea toda la superficie de onda.

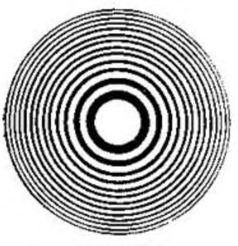


Fig. 127.6.

Las oscilaciones de las zonas de Fresnel pares e impares están en oposición de fase y, por consiguiente, se debilitan unas a otras. Si en el camino de la onda luminosa se interpusiera una lámina que tapara todas las zonas pares o impares, la intensidad de la luz en el punto P aumentaría bruscamente. Esta lámina, llamada *placa zonal*, actúa de un modo semejante a una lente convergente. En la fig. 127.6 se representa una placa que tapa las zonas pares. Un efecto todavía mayor se puede lograr, sin tapar las zonas pares (o impares), cambiando en π la fase de sus oscilaciones. Esto se puede realizar por medio de una lámina transparente, cuyo espesor en los lugares correspondientes a las zonas pares o impares se diferencie en una magnitud debidamente elegida. Esta lámina se llama *placa zonal fásica*. En comparación con la *placa zonal de amplitudes* que tapa las zonas, la fásica da un aumento adicional de la amplitud igual al doble, y de la intensidad de la luz, igual al cuadruple.

§ 128. Difracción de Fresnel por obstáculos simples

Los métodos algebraico y gráfico de composición de las amplitudes estudiados en el párrafo anterior permiten resolver una serie de problemas de difracción de la luz.

Difracción por un orificio circular. Pongamos en el camino de una onda luminosa esférica una pantalla opaca que tenga un orificio circular de radio r_0. La colocaremos de tal modo que la perpendicular bajada desde el foco de luz S incida sobre el centro del orificio (fig. 128.1). En la prolongación de esta perpendicular tomamos un

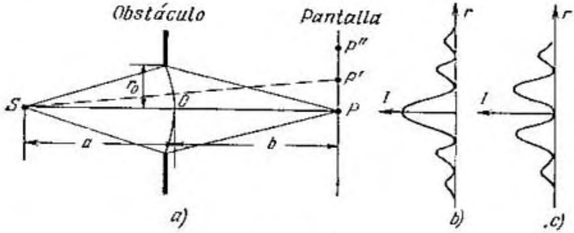


Fig. 128.1.

punto P. Si el radio r_0 del orificio es mucho menor que las longitudes a y b que se indican en la figura, la longitud a se puede considerar igual a la distancia desde el foco S hasta el obstáculo, y la longitud b, igual a la distancia desde el obstáculo hasta el punto P. Cuando las distancias a y b satisfacen la condición

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \tag{128.1}$$

en la que m es un número entero, el orificio deja descubiertas exactamente las m primeras zonas de Fresnel construidas para el punto P (véase la fórmula (127.5)). Por consiguiente, el número de zonas de Fresnel descubiertas se determina por la expresión

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{128.2}$$

De acuerdo con (127.6), la amplitud en el punto P será

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \pm A_m. \tag{128.3}$$

A_m se toma con signo más si m es impar y con signo menos si m es par. Representando (128.3) de una forma análoga a (127.7) y suponiendo que las expresiones entre paréntesis son iguales a cero,

llegamos a las fórmulas

$$A=\frac{A_1}{2}+\frac{A_m}{2} \qquad \text{(si } m \text{ es impar),}$$

$$A=\frac{A_1}{2}+\frac{A_{m-1}}{2}-A_m \quad \text{(si } m \text{ es par).}$$

Las amplitudes de dos zonas contiguas son prácticamente iguales. Por eso $(A_{m-1}/2)-A_m$ se puede sustituir por $-A_m/2$. Como resultado se obtiene:

$$A=\frac{A_1}{2}\pm\frac{A_m}{2}, \qquad (128.4)$$

donde el signo más se toma para los m impares, y el menos, para los pares.

Para números m pequeños la amplitud A_m se diferencia poco de A_1. Por lo tanto, cuando los números m son impares, la amplitud en el punto P será aproximadamente igual a A_1, y cuando son pares, nula. Este resultado es fácil de obtener por medio del diagrama vectorial representado en la fig. 127.4.

Si se quita el obstáculo, la amplitud en el punto P se hace igual a $A_1/2$ (véase (127.8)). De este modo, un obstáculo con orificio que descubra un pequeño número impar de zonas, no sólo no debilita la iluminación en el punto P, sino que, al contrario, hace que aumente la amplitud casi dos veces y la intensidad casi cuatro veces.

Veamos el carácter que tiene la figura de difracción que se observa en una pantalla situada detrás del obstáculo (véase la fig. 128.1). Como el orificio está situado simétricamente con respecto a la recta SP, la iluminación en distintos puntos de la pantalla dependerá únicamente de su distancia r al punto P. En este mismo punto la intensidad alcanzará un máximo o un mínimo en dependencia de que el número de zonas de Fresnel descubiertas sea par o impar. Supongamos, por ejemplo, que dicho número es igual a tres. Entonces en el centro de la figura de difracción se obtiene un máximo de intensidad. La figura de las zonas de Fresnel para el punto P se da en la fig. 128.2, *a*. Ahora nos desplazamos por la pantalla al punto P'. La figura de las zonas de Fresnel, limitada por los bordes del orificio, para el punto P' tiene la forma que muestra la fig. 128.2, *b*. El borde del orificio cubre parte de la tercera zona y al mismo tiempo descubre parcialmente la zona cuarta. Como resultado la intensidad de la luz disminuye y en cierta posición del punto P' alcanza un mínimo. Si nos desplazamos por la pantalla al punto P'', el borde del orificio cubre parcialmente no sólo la tercera zona de Fresnel, sino también la segunda, y al mismo tiempo descubre una parte de la quinta zona (fig. 128.2, *c*). En definitiva la acción de las partes descubiertas de las zonas impares supera la acción de las partes descubiertas de las zonas pares y la intensidad alcanza un

máximo, aunque más débil que el que se observa en el punto P.

De este modo, la figura de difracción por un orificio circular tiene la forma de anillos concéntricos, brillantes y oscuros, que se suceden unos a otros. En el centro de la figura habrá una mancha brillante (si m es impar) u oscura (si m es par) (fig. 128.3). La marcha de la intensidad I con la distancia r al centro de la figura se representa en la fig. 128.1, b (para m impar) y en la fig. 128.1, c (para m

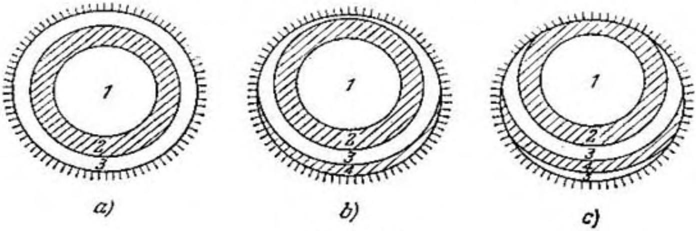


Fig. 128.2.

par). Si la pantalla se desplaza paralelamente a sí misma a lo largo de la recta SP, las figuras representadas en la fig. 128.3 se reemplazan una a otra (de acuerdo con (128.2), al variar b, el valor de m se hace unas veces impar y otras par).

Si el orificio sólo descubre una parte de la zona central de Fresnel, en la pantalla se obtiene una mancha brillante difuminada; en este

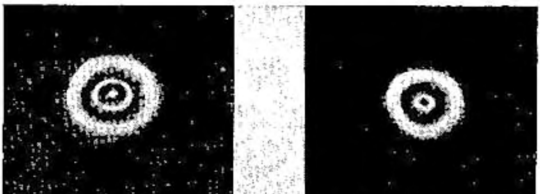


Fig. 128.3.

caso no surge la sucesión de anillos brillantes y oscuros. Y si el orificio descubre un gran número de zonas, la sucesión de los anillos brillantes y oscuros sólo se observa en una región muy estrecha en el límite de la sombra geométrica; dentro de esta región la iluminación es prácticamente constante.

Difracción por un disco circular. Coloquemos entre el foco de luz S y el punto de observación P un disco circular opaco de radio r_0 (fig. 128.4). Si el disco cubre las m primeras zonas de Fresnel, la amplitud en el punto P será

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \ldots =$$
$$= \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2}\right) + \ldots$$

Las expresiones que figuran entre paréntesis se pueden suponer iguales a cero, por consiguiente,

$$A = A_{m+1}/2. \tag{128.5}$$

Veamos el carácter de la figura que se obtiene sobre la pantalla (véase la fig. 128.4). Es evidente que la iluminación puede depender

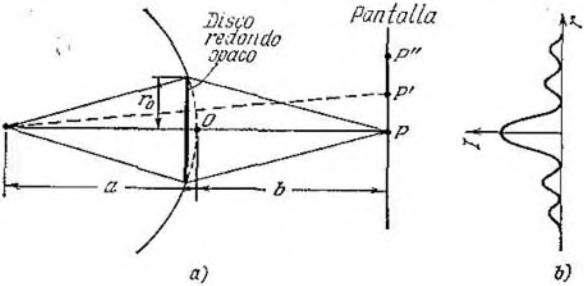


Fig. 128.4.

únicamente de la distancia r al punto P. Cuando el número de zonas cubiertas es pequeño, la amplitud A_{m+1} se diferencia poco de A_1. Por eso la intensidad en el punto P será casi la misma que en ausencia del obstáculo entre el foco S y el punto P (véase (127.8)). Para el punto P', desplazado con respecto al P en cualquier dirección radial, el disco cubrirá parte de la $(m + 1)$-ésima zona de Fresnel y al mismo tiempo descubrirá parte de la m-ésima zona. Esto hace que disminuya la intensidad. En cierta posición del punto P' la intensidad alcanza un mínimo. Si nos desplazamos del centro de la figura aún más, el disco cubrirá adicionalmente una parte de la $(m + 2)$-ésima zona y al mismo tiempo descubrirá parte de la $(m - 1)$-ésima. Como resultado la intensidad aumenta y en el punto P'' alcanza un máximo.

De este modo, en el caso de un disco circular opaco, la figura de difracción tiene la forma de anillos concéntricos, brillantes

y oscuros, que se suceden. En el centro de la figura hay una mancha brillante (fig. 128.5). La variación de la intensidad I de la luz con la distancia r al punto P se representa en la fig. 128.4, *b*.

Si el disco cubre solamente una parte pequeña de la zona central de Fresnel, no proyecta sombra en absoluto y la iluminación de la pantalla permanece igual que en ausencia del obstáculo. Y si son muchas las zonas de Fresnel que cubre el disco, la sucesión de los anillos brillantes y oscuros sólo se observa en una región estrecha en el límite de la sombra geométrica. En este caso $A_{m+1} \ll A_1$, por lo que la mancha brillante central está ausente y la iluminación en la región de la sombra geométrica es en todas partes prácticamente nula.

Una mancha brillante en el centro de la sombra proyectada por el disco fue causa de un incidente entre S. Poisson y A. I. Fresnel. La Academia de Ciencias de París propuso la difracción de la luz como tema para el premio del año 1818. Los organizadores del concurso eran partidarios de la teoría corpuscular de la luz y esperaban que los trabajos que se presentasen a él contribuirían al triunfo definitivo de su teoría. Pero Fresnel presentó un trabajo, en el cual todos los fenómenos ópticos conocidos hasta entonces se explicaban desde el punto de vista de la teoría ondulatoria. Al examinar este trabajo, Poisson, que era miembro del jurado del concurso, advirtió que de la teoría de Fresnel se deducía una conclusión «absurda»: en el centro de la sombra proyectada por un disco circular pequeño debía haber una mancha blanca. D. F. Arago hizo inmediatamente el experimento y descubrió que, efectivamente, la mancha existía. Esto acarreó la victoria y el reconocimiento general de la teoría ondulatoria de la luz.

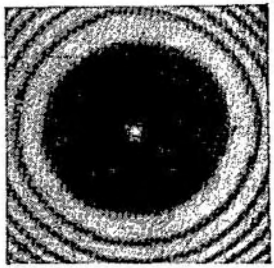


Fig. 128.5.

Difracción por el borde rectilíneo de un semiplano. Interpongamos en el camino de una onda luminosa (que para simplificar consideraremos plana) un semiplano opaco de borde rectilíneo. Coloquémoslo de manera que coincida con una de las superficies de onda. A una distancia b, detrás del semiplano, ponemos una pantalla, paralela a él, en la cual tomamos un punto P (fig. 128.6). La parte descubierta de la superficie de onda la dividimos en zonas en forma de franjas rectilíneas muy estrechas, paralelas al borde del semiplano. La anchura de estas zonas la elegimos de manera que las distancias desde el punto P hasta los bordes de cualquier zona, medidas en el plano de la figura, se diferencien en una misma magni-

tud Δ. Con esta condición la diferencia de fase entre las oscilaciones que creen en el punto P zonas vecinas será una magnitud constante.

A las zonas que se encuentran a la derecha del punto P les atribuiremos los números *1*, *2*, *3*, etc., y a las situadas a su izquierda, los números *1'*, *2'*, *3'*, etc. Las zonas, cuyos números son m y m',

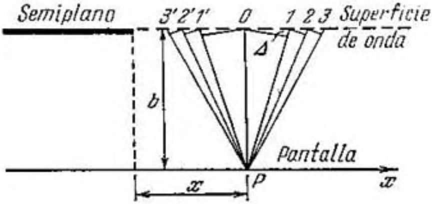


Fig. 128.6.

tienen la misma anchura y son simétricas con respecto al punto P. Por eso, las oscilaciones que ellas crean en P coinciden en amplitud y en fase.

Para establecer la dependencia de la amplitud respecto del número m de la zona, vamos a calcular el área de las zonas. En la

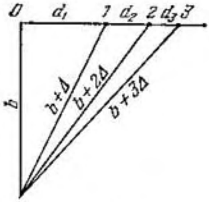


Fig. 128.7.

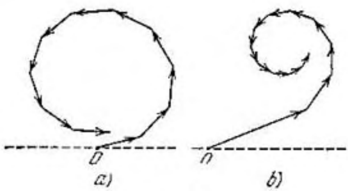


Fig. 128.8.

fig. 128.7 se ve que la anchura total de las m primeras zonas es igual a

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=\sqrt{(b+m\Delta)^2-b^2}=\sqrt{2bm\Delta+m^2\Delta^2}.$$

Debido a la estrechez de las zonas, $\Delta \ll b$. Por eso, cuando los números m no son muy grandes, el término elevado al cuadrado que hay bajo el signo de raíz se puede despreciar. Entonces

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=\sqrt{2bm\Delta}.$$

Suponiendo en esta fórmula que $m = 1$, obtenemos que $d_1 = \sqrt{2b\,\Delta}$. Por consiguiente, a la expresión de la anchura total de las m primeras zonas se le puede dar la forma

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = d_1 \sqrt{m}.$$

De aquí

$$d_m = d_1 (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}). \qquad (128.6)$$

El cálculo por la fórmula (128.6) da que

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 : \ldots = 1 : 0{,}41 : 0{,}32 : 0{,}27 : \ldots \qquad (128.7)$$

En estas mismas relaciones se encuentran las áreas de las zonas.

De (128.7) se infiere que la amplitud de las oscilaciones que crean en el punto P las zonas aisladas decrece al principio (para las primeras zonas) muy de prisa, y luego este decrecimiento se hace más lento. Por esta razón la línea quebrada que se obtiene en la composición gráfica de las oscilaciones excitadas por las zonas rectilíneas marcha al principio con una inclinación más suave que en el caso de las zonas anulares (cuyas áreas son aproximadamente iguales para una construcción análoga). En la fig. 128.8 se comparan ambos diagramas vectoriales. En los dos casos el retraso en fase de cada oscilación posterior se ha tomado el mismo. El valor de la amplitud para las zonas anulares (fig. 128.8, *a*) se ha tomado constante, y para las zonas rectilíneas (fig. 128.8, *b*), decreciente de acuerdo con la proporción (128.7). Las gráficas de la fig. 128.8 son aproximadas. En la construcción exacta de estas gráficas hay que tener en cuenta la dependencia de la amplitud respecto de r y φ (véase (126.1)). No obstante, esto no influye en el carácter general de los diagramas.

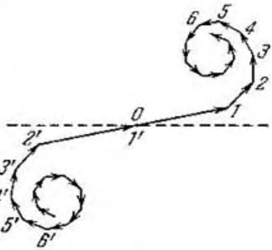


Fig. 128.9.

En la fig. 128.8, *b* sólo se muestran las oscilaciones debidas a las zonas que se encuentran a la derecha del punto P. Las zonas con números m y m' son simétricas respecto de P. Por eso es natural que al construir el diagrama, los vectores que representan las oscilaciones correspondientes a estas zonas sean simétricos con respecto al origen de coordenadas O (fig. 128.9). Si la anchura de las zonas tiende a cero, la línea quebrada que representa la fig. 128.9 se transforma en la curva suave (fig. 128.10) llamada *espiral de Cornu*.

La ecuación de la espiral de Cornu en forma paramétrica tiene la forma

$$\xi=\int_0^v \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du, \qquad \eta=\int_0^v \operatorname{sen}\frac{\pi u^2}{2}\,du. \tag{128.8}$$

Estas integrales se llaman *integrales de Fresnel*. En las funciones elementales no se toman dichas integrales, pero hay tablas con las

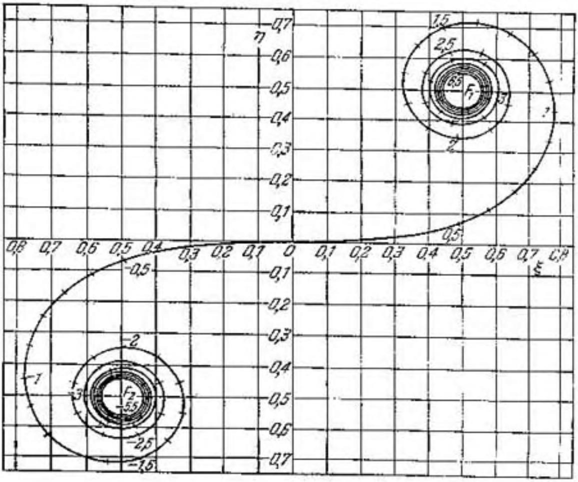


Fig. 128.10.

cuales se pueden hallar sus valores para distintos v. El sentido del parámetro v consiste en que $|v|$ da la longitud del arco de la curva de Cornu medido desde el origen de coordenadas.

Los números marcados a lo largo de la curva en la fig. 128.10 dan los valores del parámetro v. Los puntos F_1 y F_2, a los cuales se aproxima asintóticamente la curva cuando v tiende a $+\infty$ y $-\infty$, son los *focos* o *polos* de la espiral de Cornu. Sus coordenadas son

$$\xi=+\frac{1}{2}, \quad \eta=+\frac{1}{2} \quad \text{para el punto } F_1,$$

$$\xi=-\frac{1}{2}, \quad \eta=-\frac{1}{2} \quad \text{para el punto } F_2.$$

El bucle derecho de la espiral (parte OF_1) corresponde a las zonas situadas a la derecha del punto P y el izquierdo (parte OF_2), a las zonas que están a la izquierda de este punto.

Hallemos la derivada $d\eta/d\xi$ en el punto de la curva correspondiente a un valor dado del parámetro v. Según (128.8), a un incremento de v igual a dv corresponde

$$d\xi = \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \quad d\eta = \operatorname{sen}\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Por lo tanto, $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}(\pi v^2/2)$. Al mismo tiempo, $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}\theta$, siendo θ el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en el punto dado. De este modo,

$$\theta = \frac{\pi}{2} v^2. \tag{128.9}$$

De aquí se sigue que en el punto correspondiente a $v = 1$, la tangente a la curva de Cornu es perpendicular al eje ξ. Cuando $v = 2$, el ángulo θ es igual a 2π, de manera que la tangente es paralela al eje ξ. Para $v = 3$, el ángulo θ es igual a $9\pi/2$, de modo que la tangente es otra vez perpendicular al eje ξ y así sucesivamente.

La espiral de Cornu da la posibilidad de hallar la amplitud de la oscilación luminosa en cualquier punto de la pantalla. La posición del punto la vamos a caracterizar por la coordenada x, medida desde el límite de la sombra geométrica (véase la fig. 128.6). Para el punto P, que se encuentra en dicho límite ($x = 0$), todas las zonas rayadas estarán cubiertas. A las oscilaciones de las zonas no rayadas corresponde el bucle derecho de la espiral. Por consiguiente, la oscilación resultante se representa por un vector, cuyo origen se encuentra en el punto O y su extremo, en el punto F_1 (fig. 128.11, *a*). Cuando el punto P se desplaza en la región de la sombra geométrica, el semiplano cubre cada vez un número mayor de zonas no rayadas. Por eso el origen del vector resultante se traslada por el bucle derecho en dirección al polo F_1 (fig. 128.11, *b*). Como resultado, la amplitud de la oscilación tiende monótonamente a cero.

Si el punto P se desplaza desde el límite de la sombra geométrica hacia la derecha, como adición a las zonas no rayadas se descubre un número cada vez mayor de zonas rayadas. Por eso el origen del vector resultante se deslizará por el bucle izquierdo en dirección al polo F_2. Con esto la amplitud pasa por una serie de máximos (el primero de los cuales es igual a la longitud del segmento MF_1 en la fig. 128.11, *c*) y de mínimos (el primero de ellos es igual a la longitud del segmento NF_1 en la fig. 128.11, *d*). Cuando la superficie de onda está totalmente descubierta, la amplitud es igual a la longitud del segmento F_2F_1 (fig. 128.11, *e*), es decir, exactamente dos veces mayor que la amplitud en el límite de la sombra geométrica (véase la fig. 128.11, *a*). Respectivamente, la intensidad en dicho

límite constituye $1/4$ de la intensidad I_0 que se obtiene en la pantalla en ausencia de obstáculos.

La dependencia de la intensidad de la luz I respecto de la coordenada x se da en la fig. 128.12. En esta figura se ve que al pasar a la región de la sombra geométrica, la intensidad no varía de un golpe, sino que paulatinamente tiende a cero. A la derecha del límite de la sombra geométrica se encuentra una serie de máximos y mínimos de intensidad sucesivos. Los cálculos dan que para $b = 1$ m

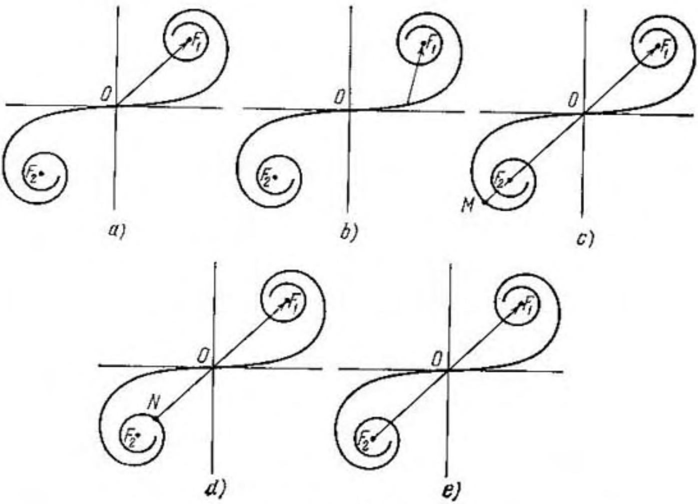


Fig. 128.11.

y $\lambda = 0{,}5$ μm, las coordenadas de los máximos (véase la fig. 128.12) tienen los valores siguientes: $x_1 = 0{,}61$ mm, $x_2 = 1{,}17$ mm, $x_3 = 1{,}54$ mm, $x_4 = 1{,}85$ mm y así sucesivamente. Al variar la distancia b desde el semiplano hasta la pantalla, los valores de las coordenadas de los máximos y mínimos varían como $\sqrt{b}$. De los datos citados se sigue que los máximos se disponen bastante densamente. Con ayuda de la curva de Cornu se puede hallar también la magnitud relativa de la intensidad en los máximos y mínimos. Para el primer máximo se obtiene el valor de $1{,}37\ I_0$, y para el primer mínimo, el de $0{,}78\ I_0$.

En la fig. 128.13 se reproduce la fotografía de la figura de difracción por el borde de un semiplano.

Difracción por una rendija. Una rendija infinitamente larga se puede formar colocando uno junto a otro dos semiplanos orientados en sentidos opuestos. Por consiguiente, el problema de la difracción de Fresnel por una rendija se puede resolver valiéndose de la

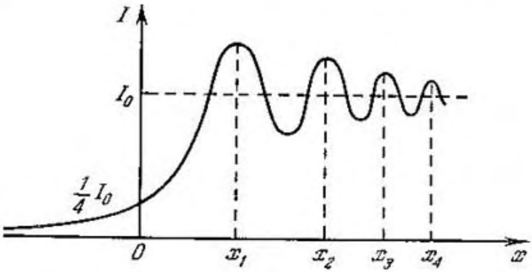


Fig. 128.12.

espiral de Cornu. La superficie de onda, el plano de la rendija y la pantalla en que se observa la difracción consideraremos que son paralelos entre sí (fig. 128.14).

Para el punto P, que se encuentra enfrente del centro de la rendija, el principio y el fin del vector resultante se encuentran en

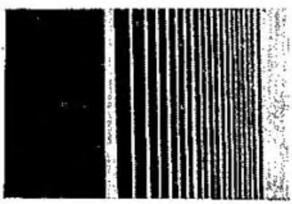


Fig. 128.13.

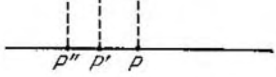


Fig. 128.14.

puntos de la espiral simétricos con respecto al origen de coordenadas (fig. 128.15). Si nos desplazamos al punto P', que está enfrente de un borde de la rendija, el origen del vector resultante se trasladará a la mitad de la espiral O. Y el extremo del vector se desplaza por la espiral en dirección al polo F_1. Si nos adentramos en la región de la sombra geométrica, el principio y el fin del vector resultante se deslizarán por la espiral y en definitiva se encontrarán a la distancia mínima uno del otro (véase en la fig. 128.15 el vector correspon-

diente al punto P''). La intensidad de la luz alcanza en este caso un mínimo. Si continúan deslizándose por la espiral, el principio y el fin del vector volverán a alejarse uno del otro y la intensidad crecerá. Lo mismo ocurrirá cuando el desplazamiento tenga lugar desde el punto P en el sentido contrario, puesto que la figura de difracción es simétrica con respecto al centro de la rendija.

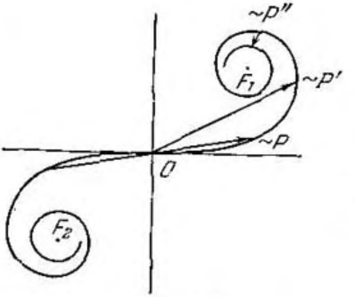


Fig. 128.15.

Si se varía la anchura de la rendija, corriendo los semiplanos en sentidos opuestos, la intensidad en el punto medio P pulsará, pasando alternativamente por máximos (fig. 128.16, *a*) y por mínimos distintos de cero (fig. 128.16, *b*).

Así, la figura de difracción de Fresnel por una rendija está formada por una franja central brillante (en el caso representado en la fig. 128.16, *a*) o relativamente oscura (en el caso que representa la fig. 128.16, *b*), a ambos lados de la cual se encuentran franjas oscuras y brillantes, simétricas a ella, que se suceden unas a otras.

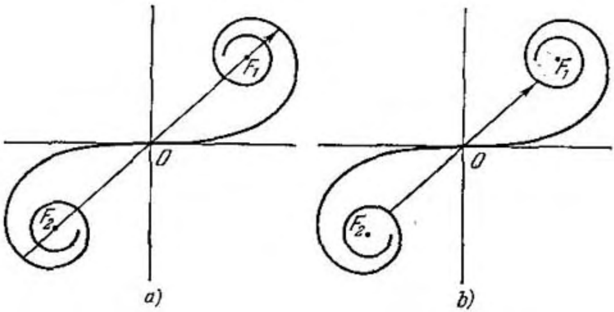


Fig. 128.16.

Cuando la anchura de la rendija es grande, el principio y el fin del vector resultante para el punto P se encuentran en las espiras internas de la espiral, cerca de los polos F_1 y F_2. Por eso la intensidad de la luz en los puntos situados frente a la rendija será practicamente constante. Sólo en los límites de la sombra geométrica se for-

ma un sistema de franjas brillantes y oscuras densamente dispuestas.

Advertimos que todos los resultados obtenidos en este párrafo son válidos a condición de que el radio de coherencia de la onda luminosa que incide sobre el obstáculo sea mucho mayor que la dimensión característica de éste (el diámetro del orificio o disco, la anchura de la rendija, etc.).

§ 129. Difracción de Fraunhofer por una rendija

Sea una onda luminosa plana que incide sobre una rendija infinitamente larga[1]) (fig. 129.1). Coloquemos detrás de la rendija una lente convergente y en su plano focal, una pantalla. La superficie de la onda incidente, el plano de la rendija y la pantalla son paralelos entre sí. Como la rendija es infinita, la figura que se observe en cualquier plano perpendicular a ella será la misma. Por eso bastará investigar el carácter de la figura en uno de estos planos, por ejemplo, en el de la fig. 129.1. Todas las magnitudes que se introduzcan a continuación, en particular el ángulo φ que forma el rayo con el eje óptico de la lente, se refieren a este plano.

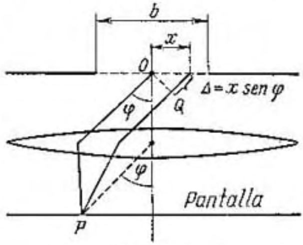


Fig. 129.1.

Dividamos la parte descubierta de la superficie de onda en zonas elementales de anchura dx paralelas a los bordes de la rendija. Las ondas secundarias que emiten las zonas en la dirección determinada por el ángulo φ, se reúnen en el punto P de la pantalla. Cada zona elemental crea en el punto P una oscilación dE. La lente hace convergir en su plano focal ondas planas (no esféricas). Por eso el factor $1/r$ de la expresión (126.1) para dE, en el caso de la difracción de Fraunhofer estará ausente. Limitándonos a considerar ángulos φ no demasiado grandes, podemos suponer que el coeficiente K de la fórmula (126.1) es constante. Entonces la amplitud de la oscilación que excita una zona en un punto cualquiera de la pantalla dependerá únicamente del área de la zona. Esta área es proporcional a la anchura dx de dicha zona, por lo tanto, la amplitud dA de la oscilación dE excitada por una zona de anchura dx en un punto cualquiera de la pantalla tiene la forma

$$dA = C\,dx,$$

donde C es una constante.

[1]) En la práctica es suficiente que la longitud de la rendija sea muchas veces mayor que su anchura.

Designemos por A_0 la suma algebraica de las amplitudes de las oscilaciones excitadas en un punto determinado de la pantalla por todas las zonas. Su valor puede hallarse integrando dA sobre toda la anchura b de la rendija

$$A_0 = \int dA = \int_0^b C\,dx = Cb.$$

De aquí $C = A_0/b$ y, por consiguiente,

$$dA = \frac{A_0}{b}\,dx.$$

Determinemos ahora las relaciones de fase entre las oscilaciones dE. Se comparan las fases de las oscilaciones que excitan en el punto P las zonas elementales de coordenadas O y x (fig. 129.1). Los caminos ópticos OP y QP son tautócronos (véase la fig. 117.2). Por eso la diferencia de fase entre las oscilaciones que consideramos se origina en el recorrido Δ, igual a x sen φ. Si la fase inicial de la oscilación excitada en el punto P por la zona elemental que se encuentra en el centro de la rendija ($x = 0$) se supone igual a cero, la fase inicial de la oscilación que excita la zona de coordenada x será

$$-2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}\,x \operatorname{sen}\varphi$$

(λ es la longitud de la onda en el medio dado).

De este modo, la oscilación excitada por la zona elemental de coordenada x en el punto P (cuya posición está determinada por el ángulo φ) se puede representar en la forma

$$dE_\varphi = \left(\frac{A_0}{b}\,dx\right)\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\,x \operatorname{sen}\varphi\right)\right] \qquad (129.1)$$

(se tiene en cuenta la parte real de esta expresión).

Integrando la expresión (129.1) sobre toda la anchura de la rendija, obtenemos la oscilación resultante, excitada en el punto P por la parte de la superficie de onda que descubre la rendija:

$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b}\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\,x \operatorname{sen}\varphi\right)\right]dx.$$

Sacamos fuera del signo de integral los factores que no dependen de x. Además, introducimos la designación

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi. \qquad (129.2)$$

Como resultado se obtiene

$$E_\varphi = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2i\gamma x}\, dx = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{(-2i\gamma)} e^{-2i\gamma x} \Big|_{-b/2}^{+b/2} =$$

$$= e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{(-2i)} [e^{-i\gamma b} - e^{i\gamma b}] \right\} = e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{2i} [e^{i\gamma b} - e^{-i\gamma b}] \right\}.$$

La expresión entre llaves determina la amplitud compleja $\hat{A}_\varphi$ de la oscilación resultante. Tomando en consideración que la diferencia de exponentes dividida por $2i$ es igual a sen γb[1]), se puede escribir:

$$\hat{A}_\varphi = A_0 \frac{\text{sen}\, \gamma b}{\gamma b} = A_0 \frac{\text{sen}\,(\pi b\, \text{sen}\, \varphi/\lambda)}{\pi b\, \text{sen}\, \varphi/\lambda} \tag{129.3}$$

(hemos sustituido γ por su valor (129.2)).

La expresión (129.3) es real. Su módulo es la amplitud ordinaria de la oscilación resultante:

$$A_\varphi = \left| A_0 \frac{\text{sen}\,(\pi b\, \text{sen}\, \varphi/\lambda)}{\pi b\, \text{sen}\, \varphi/\lambda} \right|. \tag{129.4}$$

Para el punto que se encuentra enfrente del centro de la lente, $\varphi = 0$. La sustitución de este valor en la fórmula (129.4) da para la amplitud el valor A_0[2]). Este resultado se puede obtener de un modo más fácil. Cuando $\varphi = 0$, las oscilaciones de todas las zonas elementales llegan al punto P en una misma fase. Por eso la amplitud de la oscilación resultante es igual a la suma algebraica de las amplitudes de las oscilaciones que se componen.

Para valores de φ que satisfagan la condición πb sen $\varphi/\lambda = \pm k\pi$, es decir, en el caso en que

$$b\, \text{sen}\, \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{129.5}$$

la amplitud A_φ se anula. De este modo, la condición (129.5) determina las posiciones de los mínimos de intensidad. Advertimos que b sen φ es la diferencia de marcha Δ de los rayos que van al punto P desde los bordes de la rendija (véase la fig. 129.1).

La condición (129.5) es fácil de obtener de los siguientes razonamientos. Si la diferencia de marcha Δ desde los bordes de la rendija es igual a $\pm k\lambda$, la parte descubierta de la superficie de onda se puede dividir en $2k$ zonas de igual anchura, de modo que la diferencia de marcha desde los bordes de cada zona sea $\lambda/2$ (véase la fig. 129.2, construida para $k = 2$). Las oscilaciones de cada par de zonas contiguas se extinguen una a otra, con lo que la amplitud

[1]) Véase el § 61 del tomo 1º.

[2]) Se recordará que $\lim\limits_{u \to 0}$ (sen u/u) = 1 (cuando las u son pequeñas se puede suponer que sen $u \approx u$).

resultante es nula. Si para el punto P la diferencia de marcha Δ es igual a $\pm(k+{}^1/_2)\lambda$, el número de zonas será impar, la acción de una de ellas resultará no compensada y se obtendrá un máximo de intensidad.

La intensidad de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por consiguiente, de acuerdo con (129.4)

$$I_\varphi = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(\pi b \operatorname{sen}\varphi/\lambda)}{(\pi b \operatorname{sen}\varphi/\lambda)^2}, \tag{129.6}$$

donde I_0 es la intensidad en medio de la figura de interferencia (enfrente del centro de la lente), e I_φ es la intensidad en el punto cuya posición la determina el valor dado de φ.

De la fórmula (129.6) se obtiene que $I_{-\varphi} = I_\varphi$. Esto significa que la figura de interferencia es simétrica con respecto al centro

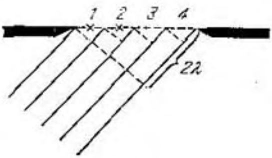


Fig. 129.2.

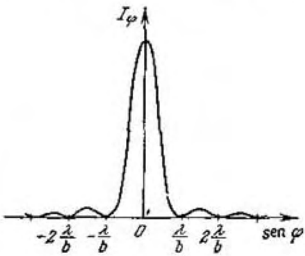


Fig. 129.3.

de la lente. Advertimos que si la rendija se desplaza paralelamente a la pantalla (a lo largo del eje x en la fig. 129.1), la figura de difracción que se observa en esta última no se mueve (su punto medio se encuentra frente al centro de la lente). Y al contrario, el desplazamiento de la lente sin mover la rendija va acompañado de un desplazamiento igual de la figura por la pantalla.

La gráfica de la función (129.6) se representa en la fig. 129.3. Sobre el eje de abscisas se han tomado los valores de sen φ, y sobre el de ordenadas, la intensidad I_φ. La cantidad de mínimos de intensidad se determina por la razón de la anchura de la rendija b a la longitud de la onda λ. De la condición (129.5) se deduce que sen $\varphi = \pm k\lambda/b$. El módulo de sen φ no puede ser mayor que la unidad. Por eso, $k\lambda/b \leqslant 1$, de donde

$$k \leqslant \frac{b}{\lambda}. \tag{129.7}$$

Cuando la anchura de la rendija es menor que la longitud de la onda, los mínimos no se producen en absoluto. En este caso la inten-

sidad de la luz disminuye monótonamente desde el centro de la figura hacia sus bordes.

A los bordes del máximo central corresponden los valores del ángulo φ que se obtienen de la condición b sen $\varphi = \pm\lambda$. Estos valores son iguales a $\pm$arc sen (λ/b). Por lo tanto, la anchura angular del máximo central será

$$\delta\varphi = 2 \text{ arc sen } \frac{\lambda}{b}. \tag{129.8}$$

En el caso de $b \gg \lambda$, el valor de sen (λ/b) se puede suponer igual a λ/b. Entonces la fórmula de la anchura angular del máximo central se simplifica del modo siguiente:

$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}. \tag{129.9}$$

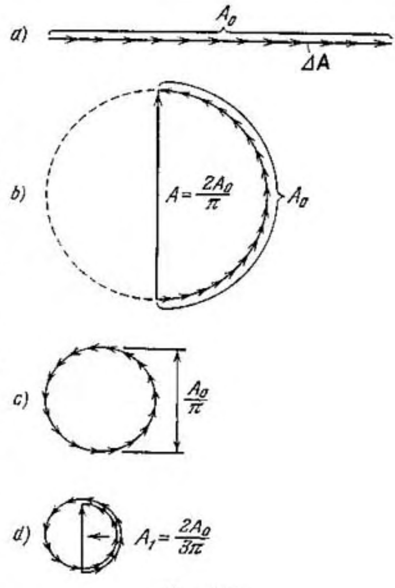


Fig. 129.4.

Resolvamos ahora el problema de la difracción de Fraunhofer por una rendija por el método de la composición gráfica de las amplitudes. La parte descubierta de la superficie de onda se divide en zonas muy estrechas de igual anchura. La oscilación que excita cada una de estas zonas tiene la misma amplitud ΔA y se retrasa en fase de la oscilación precedente en una misma magnitud δ, dependiente del ángulo φ, que determina la dirección al punto de observación P. Si $\varphi = 0$, la diferencia de fase δ es nula y el diagrama vectorial tiene la forma que muestra la fig. 129.4, *a*. La amplitud de la oscilación resultante A_0 es igual a la suma de las amplitudes de las ondas que se componen. Cuando $\Delta = b$ sen $\varphi = \lambda/2$, las oscilaciones de los bordes de la rendija están en oposición de fase. Respectivamente, los vectores $\Delta \mathbf{A}$ se disponen a lo largo de una semicircunferencia de longitud A_0 (fig. 129.4, *b*). Por consiguiente, la amplitud resultante es igual a $2A_0/\pi$. En el caso en que $\Delta = b$ sen $\varphi = \lambda$, entre las oscilaciones de los bordes de la rendija hay una diferencia de fase de 2π. El correspondiente diagrama vectorial se representa

en la fig. 129.4, *c*. Los vectores $\Delta\mathbf{A}$ se disponen a lo largo de una circunferencia de longitud A_0. La amplitud resultante es nula y se obtiene el primer mínimo. El primer máximo se obtiene para $\Delta = b \operatorname{sen} \varphi = 3\lambda/2$. En este caso las oscilaciones de los bordes de la rendija difieren en fase en 3π. Construyendo sucesivamente los vectores $\Delta\mathbf{A}$ daremos vuelta y media a una circunferencia de diámetro $A_1 = (2/3\pi) A_0$ (fig. 129.4, *d*). El diámetro de esta circunferencia es la amplitud del primer máximo. De este modo, la intensidad del primer máximo es $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx 0{,}045\ I_0$. Análogamente se puede hallar la intensidad relativa de los demás máximos. En definitiva se obtiene la relación siguiente:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \ldots =$$

$$= 1 : 0{,}045 : 0{,}016 : 0{,}008 : \ldots \qquad (129.10)$$

De este modo, la intensidad del máximo central es mucho mayor que la de los demás máximos; en él se concentra la parte fundamental del flujo luminoso que pasa a través de la rendija.

En el caso de que la rendija sea muy pequeña en comparación con la distancia desde ella hasta la pantalla, los rayos que van al punto P desde los bordes de la rendija también serán prácticamente paralelos en ausencia de la lente entre ésta y la pantalla. Por lo tanto, si sobre la rendija incide una onda plana, se observará la difracción de Fraunhofer. Todas las fórmulas obtenidas antes serán válidas, debiéndose entender por φ en estas fórmulas el ángulo entre la dirección de cualquiera de los bordes al punto P y la normal al plano de la rendija.

Establezcamos el criterio cuantitativo que permita determinar qué tipo de difracción se observará en cada caso concreto. Para esto, hallemos la diferencia de marcha de los rayos desde los bordes de la rendija hasta el punto P (fig. 129.5). Aplicamos el teorema de los cosenos al triángulo de lados r, $r + \Delta$ y b:

$$(r+\Delta)^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Después de hacer transformaciones fáciles se obtiene

$$2r\,\Delta + \Delta^2 = b^2 + 2rb \operatorname{sen} \varphi. \qquad (129.11)$$

Nos interesa el caso en que los rayos que van de los bordes de la rendija al punto P son casi paralelos. Con esta condición, $\Delta^2 \ll r\,\Delta$, por lo que en la ecuación (129.11) se puede despreciar el sumando Δ^2. En esta aproximación

$$\Delta = \frac{b^2}{2r} + b \operatorname{sen} \varphi. \qquad (129.12)$$

En el límite, cuando $r \to \infty$, se obtiene un valor de la diferencia de marcha $\Delta_\infty = b \operatorname{sen} \varphi$ que coincide con la expresión que figura en la fórmula (129.5).

Para r finitas el carácter de la figura de difracción vendrá determinado por la relación entre la diferencia $\Delta - \Delta_\infty$ y la longitud de la onda λ. Si

$$\Delta - \Delta_\infty \ll \lambda, \tag{129.13}$$

la figura de difracción será prácticamente la misma que en el caso

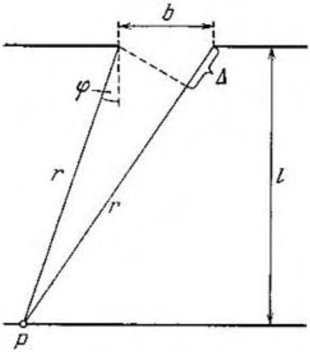


Fig. 129.5.

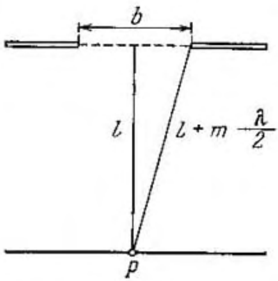


Fig. 129.6.

de la difracción de Fraunhofer. Y si $\Delta - \Delta_\infty$ es comparable con λ $(\Delta - \Delta_\infty \sim \lambda)$, se producirá la difracción de Fresnel.

De (129.12) se sigue que

$$\Delta - \Delta_\infty = \frac{b^2}{2r} \sim \frac{b^2}{l}$$

(l es la distancia desde la rendija hasta la pantalla). La sustitución de esta expresión en (129.13) lleva a la condición $(b^2/l) \ll \lambda$ o

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \tag{129.14}$$

De este modo, el carácter de la difracción depende del valor del parámetro adicional

$$b^2/l\lambda. \tag{129.15}$$

Si este parámetro es mucho menor que la unidad, se observa la difracción de Fraunhofer, y si es del orden de la unidad, la difracción de Fresnel; finalmente, si este parámetro es mucho mayor que la unidad, resulta aplicable la aproximación de la óptica geométrica. Para comodidad de las comparaciones representamos lo expuesto

en la forma siguiente:

$$\frac{b^2}{l\lambda}\begin{cases} \ll 1 \text{ — difracción de Fraunhofer,} \\ \sim 1 \text{ — difracción de Fresnel,} \\ \gg 1 \text{ — óptica geométrica.} \end{cases} \quad (129.16)$$

Al parámetro (129.15) se le puede dar una interpretación intuitiva Tomemos un punto P que se encuentre frente a la mitad de la rendija (fig. 129.6). Para este punto el número m de zonas de Fresnel descubiertas se determina por la relación

$$\left(l+m\frac{\lambda}{2}\right)^2=l^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Abriendo los paréntesis y omitiendo el sumando proporcional a λ^2, obtenemos[1])

$$m=\frac{b^2}{4l\lambda}\sim\frac{b^2}{l\lambda}. \quad (129.17)$$

Así, el parámetro (129.15) está relacionado directamente con el número de zonas de Fresnel descubiertas (para los puntos que se encuentran enfrente de la mitad de la rendija).

Si la rendija descubre una parte pequeña de la zona central de Fresnel ($m \ll 1$), se observa la difracción de Fraunhofer. La distribución de la intensidad en este caso se representa por la curva que se da en la fig. 129.3. Si la rendija descubre un número pequeño de zonas de Fresnel ($m \sim 1$), en la pantalla se obtiene una imagen de la rendija cuyos bordes están encuadrados por franjas brillantes y oscuras claramente visibles. Por último, en el caso en que la rendija descubre un gran número de zonas de Fresnel ($m \gg 1$), en la pantalla se obtiene una imagen de la rendija uniformemente iluminada. Sólo junto a los límites de la sombra geométrica hay unas franjas brillantes y oscuras muy estrechas que prácticamente no se distinguen a simple vista.

Veamos cómo varía la figura al alejar la pantalla de la rendija. Cuando las distancias de la pantalla a la rendija son pequeñas ($m \gg 1$), la imagen corresponde a las leyes de la óptica geométrica. Aumentando la distancia llegamos primero a una figura de difracción de Fresnel, que luego pasa a ser figura de difracción de Fraunhofer. Este mismo orden de transformaciones se observa en el caso de que, sin variar la distancia l, se disminuye la anchura b de la rendija.

De lo dicho queda claro que el criterio de aplicabilidad de la óptica geométrica no es la pequeñez de la longitud de onda compa-

---

[1]) Advertimos que para los puntos fuertemente desplazados en la región de la sombra geométrica, el número de zonas descubiertas será mayor.

rada con la dimensión característica del obstáculo (por ejemplo, la anchura de la rendija), sino el valor del parámetro (129.15) (que debe ser mucho mayor que la unidad). Supongamos, por ejemplo, que las dos relaciones b/λ y l/b son iguales a 100. En este caso $\lambda \ll b$, pero $b^2/l\lambda = 1$ y, por lo tanto, se observa claramente la difracción de Fresnel.

§ 130. Red de difracción

Se llama red de difracción el conjunto de un gran número de rendijas iguales que se encuentran a la misma distancia una de otra (fig. 130.1). La distancia d entre las mitades de las rendijas contiguas recibe el nombre de *período* de la red.

Coloquemos paralelamente a una red una lente convergente y en su plano focal pongamos una pantalla. Veamos qué carácter tiene la figura de difracción que se observa en la pantalla cuando sobre la red incide una onda luminosa plana (para simplificar supondremos que esta onda incide normalmente sobre la red). Cada una de las rendijas da sobre la pantalla la figura que describe la curva representada en la fig. 129.3. Las figuras de todas las rendijas vienen a

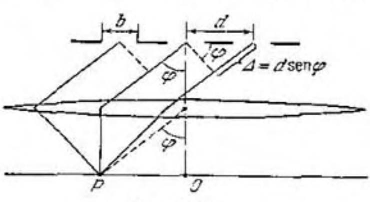


Fig. 130.1.

parar en un mismo punto de la pantalla (independientemente de las posiciones de dichas rendijas, el máximo central se encuentra enfrente del centro de la lente). Si las oscilaciones que llegan al punto P desde rendijas distintas no fueran coherentes, la figura resultante de las N rendijas se diferenciaría de la creada por una sola rendija únicamente en que todas las intensidades aumentarían N veces. Pero las oscilaciones de las distintas rendijas son, en mayor o menor grado, coherentes; por eso la intensidad resultante será diferente de NI_φ (I_φ es la intensidad que crea una rendija; véase (129.6)).

En adelante vamos a suponer que el radio de coherencia de la onda incidente es mucho mayor que la longitud de la red, de manera que las oscilaciones de todas las rendijas se pueden considerar coherentes entre sí. En este caso la oscilación resultante en el punto P, cuya posición viene determinada por el ángulo φ, es la suma de N oscilaciones de igual amplitud A_φ, desplazadas en fase una de otra en la misma magnitud δ. Según la fórmula (124.5) la intensidad

en estas condiciones es

$$I_{\text{red}} = I\varphi \frac{\operatorname{sen}^2 (N\delta/2)}{\operatorname{sen}^2 (\delta/2)} \qquad (130.1)$$

(en el caso dado el papel de I_0 lo desempeña I_φ).

En la fig. 130.1 se ve que la diferencia de marcha desde las rendijas vecinas es $\Delta = d \operatorname{sen} \varphi$. Por consiguiente, la diferencia de fase

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \varphi, \qquad (130.2)$$

donde λ es la longitud de la onda en el medio dado.

Sustituyendo en la fórmula (130.1) I_φ por su expresión (129.6) y δ por la suya (130.2), obtenemos

$$I_{\text{red}} = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 (\pi b \operatorname{sen} \varphi/\lambda)}{(\pi b \operatorname{sen} \varphi/\lambda)^2} \frac{\operatorname{sen}^2 (N\pi d \operatorname{sen} \varphi/\lambda)}{\operatorname{sen}^2 (\pi d \operatorname{sen} \varphi/\lambda)} \qquad (130.3)$$

(I_0 es la intensidad que crea una rendija frente al centro de la lente).

En (130.3) el primer factor se anula en los puntos para los cuales

$$b \operatorname{sen} \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (130.4)$$

En estos puntos la intensidad que crea cada una de las rendijas por separado es nula (véase la condición (129.5)).

El segundo factor toma en (130.3) el valor N^2 en los puntos que satisfacen la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (130.5)$$

(véase (124.7)). En las direcciones que determina esta condición las oscilaciones de las rendijas aisladas se refuerzan mutuamente, por lo que su amplitud en el punto correspondiente de la pantalla será

$$A_{\text{máx}} = NA_\varphi \qquad (130.6)$$

(A_φ es la amplitud de la oscilación emitida por una rendija bajo el ángulo φ).

La condición (130.5) determina la posición de los máximos de intensidad llamados *principales*. El número m da el *orden* del máximo principal. Máximos de orden nulo sólo hay uno; de 1°, 2°, etc., órdenes hay dos de cada orden.

Elevando al cuadrado la igualdad (130.6) obtenemos que la intensidad de los máximos principales $I_{\text{máx}}$ es N^2 veces mayor que la intensidad I_φ que crea en la dirección φ una rendija:

$$I_{\text{máx}} = N^2 I_\varphi. \qquad (130.7)$$

Además de los mínimos que determina la condición (130.4), en los intervalos entre los máximos principales vecinos hay $(N - 1)$ mínimos adicionales. Estos mínimos surgen en aquellas direcciones,

en las cuales las oscilaciones de distintas rendijas se extinguen mutuamente. De acuerdo con la fórmula (124.8), las direcciones de los mínimos adicionales se determinan por la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda$$

$$(k'=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ N+1,\ \ldots,\ 2N-1,\ 2N+1,\ \ldots). \tag{130.8}$$

En la fórmula (130.8) k' toma todos los valores de los números enteros excepto 0, N, $2N$, . . ., es decir, menos aquellos, con los cuales la ecuación (130.8) se transforma en la (130.5).

La condición (130.8) es fácil de obtener por el método de la composición gráfica de las oscilaciones. Las oscilaciones de las

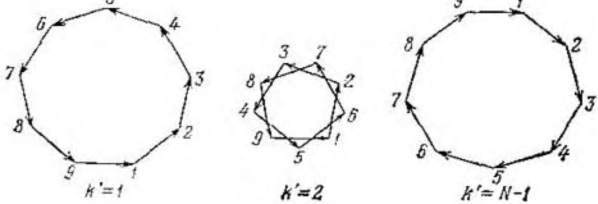


Fig. 130.2.

rendijas aisladas se representan por vectores de la misma longitud. Según (130.8), cada vector posterior forma con la dirección del anterior un mismo ángulo

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \varphi = \frac{2\pi}{N} k'.$$

Por eso, en aquellos casos en que k' no es múltiplo entero de N, tomando como origen del vector posterior el extremo del anterior, obtenemos una línea quebrada, cerrada, que da k' (cuando $k' < N/2$) o $N-k'$ (cuando $k' > N/2$) vueltas antes de que el extremo del N-ésimo vector se apoye en el origen del 1º. Respectivamente, la amplitud resultante es nula. Lo dicho se aclara en la fig. 130.2, que muestra la suma de los vectores para el caso de $N = 9$ y de los valores de k' iguales a 1, 2 y $N - 1 = 8$.

Entre los mínimos adicionales se encuentran máximos secundarios débiles. El número de estos máximos que corresponde al intervalo entre los máximos principales vecinos es igual a $N-2$. En el § 124 se demostró que la intensidad de los máximos secundarios no supera al $^1/_{22}$ de la intensidad del máximo principal más próximo.

En la fig. 130.3 se da la gráfica de la función (130.3) para $N = 4$ y $d/b = 3$. La curva de trazos que pasa por los vértices de los máximos principales representa la intensidad debida a una rendija multiplicada por N^2 (véase (130.7)). Con la relación, tomada en esta figura, entre el período de la red y la anchura de la rendija ($d/b = 3$), los máximos principales de 3°, 6°, etc., órdenes caen sobre los mínimos de intensidad debidos a una sola rendija, por lo que estos máximos se pierden. En general, de las fórmulas (130.4) y (130.5) se infiere que el máximo principal de m-ésimo orden caerá sobre el k-ésimo mínimo debido a una rendija si se cumple la igualdad $m/d = k/b$ o $m/k = d/b$. Esto es posible si d/b es igual a la razón de dos números enteros r y s (tiene interés práctico el caso en que

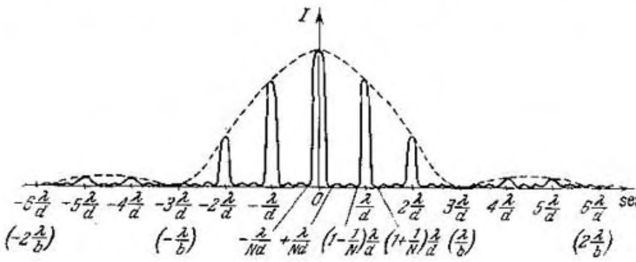


Fig. 130.3.

estos números no son grandes). Entonces el máximo principal de r-ésimo orden se superpone al s-ésimo mínimo correspondiente a una rendija; el máximo de $2r$-ésimo orden, al $2s$-ésimo mínimo y así sucesivamente, como resultado de lo cual los máximos de los órdenes r, $2r$, $3r$, etc., estarán ausentes.

La cantidad de máximos principales que se observan se determina por la razón del período d de la red a la longitud de onda λ. El módulo de sen φ no puede ser mayor que la unidad. Por lo tanto, de la fórmula (130.5) se sigue que

$$m \leqslant d/\lambda. \qquad (130.9)$$

Determinemos la anchura angular del máximo central (de orden nulo). La posición de los mínimos adicionales más próximos a él se determina por la condición d sen $\varphi = \pm\lambda/N$ (véase la fórmula (130.8)). Por consiguiente, a estos mínimos corresponden valores de φ iguales a $\pm$arcsen (λ/Nd). De aquí, para la anchura angular

del máximo central, se obtiene la expresión

$$\delta\varphi_0 = 2 \operatorname{arcsen} \frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{2\lambda}{Nd} \qquad (130.10)$$

(hemos aprovechado que $\lambda/Nd \ll 1$).

La posición de los mínimos adicionales más próximos al máximo principal de m-ésimo orden la determina la condición $d \operatorname{sen} \varphi = (m \pm 1/N)\lambda$. De aquí se obtiene para anchura angular del m-ésimo máximo la expresión siguiente:

$$\delta\varphi_m = \operatorname{arcsen}\left(m + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d} - \operatorname{arcsen}\left(m - \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}.$$

Introduciendo las designaciones $m\lambda/d = x$ y $\lambda/Nd = \Delta x$, se puede representar esta fórmula en la forma

$$\delta\varphi_m = \operatorname{arcsen}(x + \Delta x) - \operatorname{arcsen}(x - \Delta x). \qquad (130.11)$$

Si el número de rendijas es muy grande, el valor de $\Delta x = \lambda/Nd$ será muy pequeño. Por eso puede suponerse que $\operatorname{arcsen}(x \pm \Delta x) \approx$

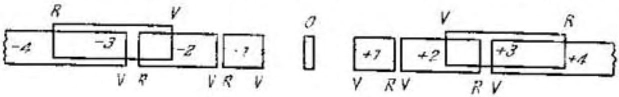


Fig. 130.4.

$\approx \operatorname{arcsen} x \pm (\operatorname{arcsen} x)' \Delta x$. La sustitución de estos valores en la fórmula (130.11) conduce a la expresión aproximada

$$\delta\varphi_m \approx 2(\operatorname{arcsen} x)' \Delta x = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2(\lambda/d)^2}} \frac{2\lambda}{Nd}. \qquad (130.12)$$

Cuando $m = 0$ esta expresión se transforma en la (130.10).

El producto Nd da la longitud de la red de difracción. Por lo tanto, la anchura angular de los máximos principales es inversamente proporcional a la longitud de la red. Cuando aumenta el orden m del máximo, la anchura $\delta\varphi_m$ crece.

La posición de los máximos principales depende de la longitud de onda λ. Por eso, cuando a través de la red se hace pasar luz blanca, todos los máximos, excepto el central, se descomponen en un espectro, cuyo extremo violeta da hacia el centro de la figura de difracción, y el rojo, hacia fuera. De este modo, una red de difracción es un instrumento espectral. Advertimos que así como un prisma de vidrio desvía más los rayos violetas, la red de difracción, al contrario, desvía más los rojos.

La fig. 130.4 representa esquemáticamente los espectros de distintos órdenes que produce la red de difracción cuando a través

de ella pasa luz blanca. En el centro se encuentra un estrecho máximo de orden nulo; este máximo sólo tiene coloreados los bordes (según (130.10) $\delta\varphi_0$ depende de λ). A ambos lados del máximo central hay dos espectros de 1er orden, después dos espectros de 2º orden y así sucesivamente. Las posiciones del extremo rojo del espectro de m-ésimo orden y del extremo violeta del espectro de $(m+1)$-ésimo orden se determinan por las relaciones

$$\operatorname{sen}\varphi_{\text{rojo}} = m\frac{0{,}76}{d}, \quad \operatorname{sen}\varphi_{\text{viol}} = (m+1)\frac{0{,}40}{d},$$

en las que d se toma en micrometros. A condición de que

$$0{,}76m > 0{,}40\,(m \pm 1),$$

los espectros de órdenes m-ésimo y $(m+1)$-ésimo se superponen parcialmente. De esta desigualdad se obtiene que $m > {}^{10}/_{9}$. Por consiguiente, la superposición parcial comienza desde los espectros de 2º y 3er orden (véase la fig. 130.4, en la cual, para mayor claridad, los espectros de distintos órdenes están desplazados uno respecto de otro en sentido vertical).

Las características principales de todo instrumento espectral son su *dispersión* y su *poder resolutivo* o *separador*. La dispersión determina la distancia angular o lineal entre dos rayos espectrales, cuyas longitudes de onda se diferencien en una unidad (por ejemplo, en 1 Å). El poder resolutivo determina la diferencia mínima de las longitudes de onda $\delta\lambda$ con la cual dos rayas se perciben separadas en el espectro.

Se llama *dispersión angular* la magnitud

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \tag{130.13}$$

donde $\delta\varphi$ es la distancia angular entre las rayas espectrales cuyas longitudes de onda se diferencian en $\delta\lambda$.

Para hallar la dispersión angular de la red de difracción derivamos la condición (130.5) de máximo principal hacia la izquierda respecto de φ y hacia la derecha respecto de λ. Omitiendo el signo menos, se obtiene

$$d\cos\varphi\delta\varphi = m\delta\lambda.$$

De aquí

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \tag{130.14}$$

Dentro de los límites de ángulos pequeños $\cos\varphi \approx 1$, por lo que se puede suponer que

$$D \approx \frac{m}{d}. \tag{130.15}$$

De la expresión obtenida se sigue que la dispersión angular es inversamente proporcional al período de la red. Cuanto más alto sea el orden m del espectro, tanto mayor será la dispersión.

Se da el nombre de *dispersión lineal* a la magnitud

$$D_{\text{lin}}=\frac{\delta l}{\delta\lambda}, \qquad (130.16)$$

en la que δl es la distancia lineal, sobre la pantalla o la placa fotográfica, entre las rayas espectrales, cuyas longitudes de onda se diferencian en $\delta\lambda$. En la fig. 130.5 se ve que, si los valores del ángulo φ son pequeños, se puede suponer que $\delta l \approx f'\delta\varphi$, donde f' es la

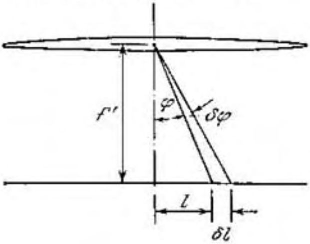


Fig. 130.5.

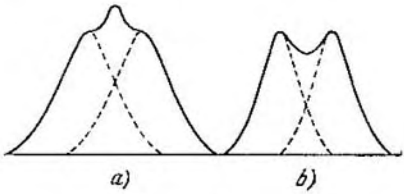


Fig. 130.5.

distancia focal de la lente que hace convergir sobre la pantalla los rayos difractados. Por consiguiente, la dispersión lineal está ligada con la dispersión angular D por la relación

$$D_{\text{lin}} = f'D.$$

Tomando en consideración la expresión (130.15), obtenemos para la dispersión lineal de la red de difracción (cuando los ángulos φ son pequeños) la fórmula siguiente

$$D_{\text{lin}}=f'\,\frac{m}{d}. \qquad (130.17)$$

El *poder resolutivo* o *separador* de un instrumento espectral es la magnitud adimensional

$$R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}. \qquad (130.18)$$

en la que $\delta\lambda$ es la diferencia mínima entre las longitudes de onda de dos rayas espectrales, con la cual estas rayas se perciben separadas.

La posibilidad de resolver (es decir, de percibir separadamente) dos rayas espectrales próximas no sólo depende de la distancia entre ellas (determinada por la dispersión del instrumento), sino también

de la anchura del máximo espectral. En la fig. 130.6 se muestra la intensidad resultante (curvas de línea continua) que se observa cuando se superponen dos máximos próximos (curvas de línea de trazos). En el caso *a* ambos máximos se perciben como uno solo. En el caso *b*, entre los máximos hay un mínimo. Dos máximos próximos son percibidos por el ojo separadamente si la intensidad en el intervalo entre ellos no es mayor que el 80% de la intensidad de los máximos. De acuerdo con el criterio propuesto por J. W. Rayleigh esta relación de las intensidades se produce si el centro de uno de los máximos coincide con el borde del otro (fig. 130.6, *b*). Esta disposición mutua de los máximos se obtiene con un valor determinado (para un instrumento dado) de $\delta\lambda$.

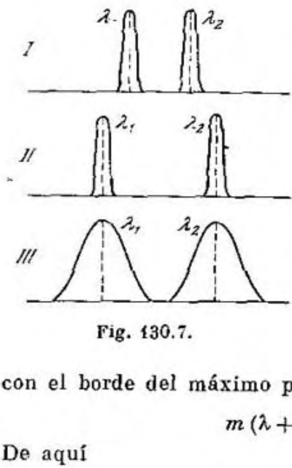


Fig. 130.7.

Hallemos el poder resolutivo de la red de difracción. La posición del centro del m-ésimo máximo para la longitud de onda $\lambda + \delta\lambda$ viene determinada por la condición

$$d \cdot \operatorname{sen} \varphi_{\text{máx}} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Los bordes del m-ésimo máximo para la longitud de onda λ están situados bajo ángulos que satisfacen la relación

$$d \cdot \operatorname{sen} \varphi_{\text{mín}} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

El centro del máximo para la longitud de onda $\lambda + \delta\lambda$ coincidirá con el borde del máximo para la longitud de onda λ si

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

De aquí

$$m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}.$$

Despejando esta razón respecto a $\lambda/\delta\lambda$, obtenemos la expresión del poder resolutivo

$$R = mN. \qquad (130.19)$$

De este modo el poder separador de una red de difracción es proporcional al orden m del espectro y al número N de rendijas.

En la fig. 130.7 se comparan las figuras de difracción que se obtienen para dos rayas espectrales con redes que se diferencian en los valores de la dispersión D y del poder resolutivo R. Las redes *I* y *II* poseen el mismo poder separador (tienen igual número N de rendijas), pero diferente dispersión (el período d de la red *I* es dos

veces mayor, y, respectivamente, la dispersión D dos veces menor, que el de la red *II*). Las redes *II* y *III* poseen igual dispersión (tienen el mismo período d), pero distinto poder resolutivo (el número N de rendijas y el poder separador R de la red *II* son dos veces mayores que los de la red *III*).

Las redes de difracción pueden ser de transmisión y de reflexión. Las primeras se hacen de láminas de vidrio o cuarzo en cuya superficie se marca, en una máquina especial con cuchilla de diamante, una serie de trazos paralelos. Los intervalos entre los trazos sirven de rendijas.

Las redes de reflexión se hacen también con cuchilla de diamante marcando los trazos sobre un espejo metálico. La luz incide oblicuamente sobre la red de difracción por reflexión. En estas condiciones una red cuyo período sea d actúa como lo haría una red por transmisión cuyo período fuera $d \cdot \cos \vartheta$, siendo ϑ el ángulo de incidencia, si la luz incidiera sobre ésta normalmente. Esto permite observar el espectro al reflejarse la luz, por ejemplo, en una placa de gramófono, que tiene en total varios surcos por milímetro, si se coloca de tal forma que el ángulo de incidencia se aproxime a $\pi/2$. Rowland inventó una red cóncava de difracción por reflexión que, ella misma (sin lente) enfoca los espectros de difracción.

Las mejores redes tienen hasta 1200 trazos por milímetro ($d \approx \approx 0{,}8$ µm). De la fórmula (130.9) se sigue que los espectros de segundo orden de la luz visible no se observan con este período. El número total de trazos que tienen estas redes alcanza 200 mil (su longitud es de cerca de 200 mm). Si la distancia focal del instrumento $f' = 2$ *m*, la longitud del espectro visible de 1er orden es, en este caso, de más de 700 mm.

§ 131. Difracción de rayos X

Pongamos dos redes de difracción una detrás de otra de manera que sus trazos sean perpendiculares entre sí. La primera red (de trazos verticales, por ejemplo) da en la dirección horizontal una serie de máximos, cuyas posiciones las determina la condición

$$d_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \ldots). \tag{131.1}$$

La segunda red (de trazos horizontales) divide cada uno de los haces formados de este modo en máximos dispuestos verticalmente cuyas posiciones vienen determinadas por la condición

$$d_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \ldots). \tag{131.2}$$

En definitiva la figura de difracción tendrá la forma de manchas regularmente dispuestas a cada una de las cuales le corresponden dos índices numéricos, m_1 y m_2, enteros (fig. 131.1).

Esta misma figura de difracción se obtiene si en vez de dos redes separadas se toma una lámina transparente en la cual se hayan marcado dos sistemas de trazos perpendiculares entre sí. Esta lámina será una *estructura periódica bidimensional* (la red ordinaria es una estructura unidimensional). Midiendo los ángulos φ_1 y φ_2 que definen la posición de los máximos, y conociendo la longitud λ de la onda, por las fórmulas (131.1) y (131.2) se pueden hallar los períodos d_1 y d_2 de la estructura. Si las direcciones, en las cuales la estructura es periódica (por ejemplo, las perpendiculares a los trazos de la red) forman un ángulo α distinto de $\pi/2$, los máximos de difracción no se encontrarán en los vértices de unos
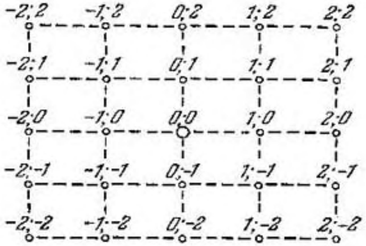


Fig. 131.1.

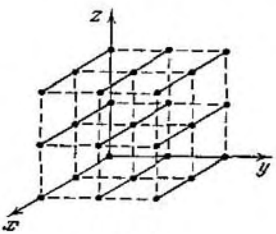


Fig. 131.2.

rectángulos (como en la fig. 131.1), sino en los vértices de unos paralelogramos. En este caso, por la figura de difracción se pueden determinar no sólo los períodos d_1 y d_2, sino también el ángulo α.

Una figura de difracción análoga a la representada en la fig. 131.1 la da cualquier estructura periódica bidimensional, como, por ejemplo, un sistema de pequeños orificios o un sistema de pequeñas esferas opacas.

Para que aparezcan los máximos de difracción es necesario que el período d de la estructura sea mayor que λ. En el caso contrario las condiciones (131.1) y (131.2) sólo pueden ser satisfechas con valores nulos de m_1 y m_2 (porque el módulo de sen φ no puede ser mayor que la unidad).

La difracción se observa también en las estructuras tridimensionales, es decir, en las formaciones espaciales que presentan periodicidad en tres direcciones que no están en un mismo plano. Estructuras de este tipo son todos los cuerpos cristalinos. Pero su período ($\sim 10^{-10}$ m) es demasiado pequeño para que se pueda observar la difracción con luz visible. En el caso de los cristales la condición $d > \lambda$ sólo se cumple por los rayos X. La difracción de rayos X por cristales se observó por primera vez en 1913 en el experimento de

Laue, Friedrich y Knipping (a Laue le pertenece la idea, a los otros dos autores, la realización práctica).

Hallemos las condiciones para la formación de los máximos de difracción por una estructura tridimensional. En las direcciones en que las propiedades de la estructura manifiestan periodicidad, se trazan los ejes de coordenadas x, y y z (fig. 131.2). La estructura podemos figurárnosla como un conjunto de cadenas lineales paralelas y equidistantes de elementos estructurales situadas a lo largo de uno de los ejes de coordenadas. Vamos a examinar la acción de una cadena aislada, paralela, por ejemplo, al eje x (fig. 131.3). Supongamos que sobre ella incide un haz de rayos paralelos que forman con el eje x un ángulo α_0. Cada elemento estructural es una fuente de ondas secundarias. A las fuentes vecinas llega la onda

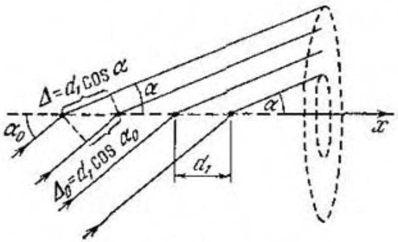


Fig. 131.3.

incidente con una diferencia de fase $\delta_0 = 2\pi\,\Delta_0/\lambda$, en la que $\Delta_0 = d_1 \cos\alpha_0$ (d_1 es el período de la estructura a lo largo del eje x). Además, entre las ondas secundarias que se propagan en las direcciones que forman con el eje x un ángulo α (todas estas direcciones se encuentran a lo largo de las generatrices de un cono, de eje del cual sirve el eje x), se produce una diferencia de marcha adicional $\Delta = d_1 \cos\alpha$. Las oscilaciones debidas a distintos elementos estructurales se reforzarán entre sí en aquellas direcciones para las cuales

$$d_1 (\cos\alpha - \cos\alpha_0) = \pm m_1\lambda \quad (m_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (131.3)$$

A cada valor de m_1 le corresponde su cono de direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de intensidad de una cadena, paralela al eje x, tomada por separado. El eje de este cono coincide con el eje x.

La condición de máximo para una cadena paralela al eje y tiene la forma

$$d_2 (\cos\beta - \cos\beta_0) = \pm m_2\lambda \quad (m_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (131.4)$$

en la que d_2 es el período de la estructura en la dirección del eje y; β_0, el ángulo entre el haz incidente y el eje y, y β, el ángulo que

forman con el eje y las direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de difracción. A cada valor de m_2 le corresponde un cono de direcciones cuyo eje coincide con el y.

En las direcciones que satisfacen simultáneamente las condiciones (131.3) y (131.4) se produce el reforzamiento mutuo de las oscilaciones de las fuentes que se encuentran en un mismo plano perpendicular al eje z (estas fuentes forman una estructura bidimensional). Las direcciones de los máximos de intensidad se encuentran a lo largo de las líneas de intersección de los conos de direcciones, uno de los cuales se determina por la condición (131.3) y el otro por la condición (131.4).

Finalmente, para una cadena paralela al eje z, las direcciones de los máximos se determinan por la condición

$$d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = \pm m_3 \lambda \quad (m_3 = 0, 1, 2, \ldots), \tag{131.5}$$

en la que d_3 es el período de la estructura en la dirección del eje z; γ_0, el ángulo entre el haz incidente y el eje z, y γ, el ángulo que forman con el eje z las direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de difracción. Como en los casos anteriores, a cada valor de m_3 le corresponde un cono de direcciones cuyo eje es el eje z.

En las direcciones que satisfacen simultáneamente las condiciones (131.3), (131.4) y (131.5) se produce el reforzamiento mutuo de las oscilaciones de todos los elementos que forman la estructura espacial. Como resultado surgen los máximos de difracción de la estructura tridimensional. Las direcciones de estos máximos se encuentran en las líneas de intersección de tres conos cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas.

Las condiciones que hemos hallado

$$\begin{aligned} d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= \pm m_1 \lambda, \\ d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) &= \pm m_2 \lambda, \quad (m_i = 0, 1, 2, \ldots) \\ d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= \pm m_3 \lambda \end{aligned} \tag{131.6}$$

se conocen con el nombre de *fórmulas de Laue*. A cada dirección (α, β, γ) determinada por estas fórmulas le corresponden tres índices numéricos m_1, m_2 y m_3 enteros. El valor máximo del módulo de la diferencia de los cosenos es igual a 2. Por eso las condiciones (131.6) pueden cumplirse con valores distintos de cero de los índices m sólo si λ no es mayor que $2d$.

Los ángulos α, β y γ no son independientes. Por ejemplo, en el caso de un sistema de coordenadas rectangulares están ligados por la relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \tag{131.7}$$

De este modo, cuando se dan α_0, β_0, γ_0 y λ, los ángulos α, β y γ que determinan las direcciones de los máximos se pueden hallar

resolviendo un sistema de cuatro ecuaciones. Si el número de ecuaciones supera al de incógnitas, el sistema sólo tiene solución si cumple determinadas condiciones (solamente cumpliendo estas condiciones los tres conos pueden cortarse uno a otro según una línea).

El sistema de ecuaciones (131.6) y (131.7) sólo tiene solución para ciertas longitudes de onda completamente determinadas (λ se puede considerar como la cuarta incógnita, cuyos valores, obtenidos de la solución del sistema, dan aquellas longitudes de onda con las cuales se observan los máximos). A cada uno de estos valores de λ le corresponde, en general, un solo máximo. Sin embargo, también se pueden obtener varios máximos dispuestos simétricamente.

Si la longitud de onda es fija (la radiación es monocromática), el sistema de ecuaciones se puede hacer compatible variando los

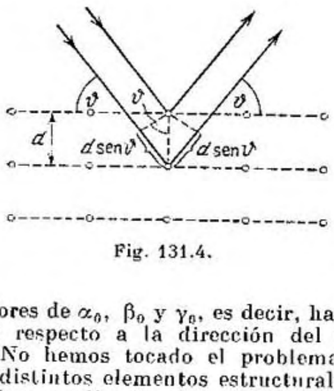


Fig. 131.4.

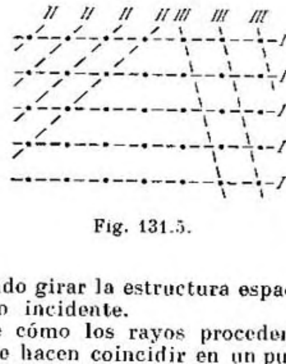


Fig. 131.5.

valores de α_0, β_0 y γ_0, es decir, haciendo girar la estructura espacial con respecto a la dirección del rayo incidente.

No hemos tocado el problema de cómo los rayos procedentes de distintos elementos estructurales se hacen coincidir en un punto de la pantalla. En el caso de la luz visible se consigue esto por medio de una lente. Cuando se trata de rayos X esto no se puede lograr con la lente, porque el índice de refracción de estos rayos en todas las substancias es prácticamente igual a la unidad. Por eso la interferencia de las ondas secundarias se logra utilizando haces muy estrechos de rayos, que sin lente dan sobre la pantalla (o placa fotográfica) manchas de dimensiones muy pequeñas.

El científico ruso G. V. Wulf y los físicos ingleses W. H. y W. L. Bragg demostraron, independientemente el uno de los otros, que el cálculo de la figura de difracción por una red cristalina se puede efectuar por el sencillo procedimiento siguiente. Por los nudos de la red cristalina se hacen pasar planos paralelos equidistantes (fig. 131.4), que llamaremos capas atómicas. Si la onda que incide sobre el cristal es plana, la envolvente de las ondas secundarias

generadas por los átomos que se encuentran en una de estas capas también será un plano. Por lo tanto, la acción total de los átomos de una capa podemos figurárnosla en forma de una onda plana que se refleja en una superficie cubierta de átomos de acuerdo con la ley de la reflexión ordinaria.

Las ondas planas secundarias reflejadas en distintas capas atómicas son coherentes e interferirán entre sí de un modo semejante a como lo hacen las ondas que emiten en una dirección dada distintas rendijas de una red de difracción. En este caso, lo mismo que en el de una red, las ondas secundarias se extinguen prácticamente una a otra en todas las direcciones, excepto en aquellas para las cuales la diferencia de marcha entre las ondas vecinas es múltiplo de λ. En la fig. 131.4 se ve que la diferencia de marcha de dos ondas reflejadas en capas atómicas contiguas es igual a $2d$ sen ϑ, donde d es el período de identidad del cristal en dirección perpendicular a las capas que se consideran, y ϑ, el ángulo, complementario del de incidencia, llamado *ángulo de deslizamiento* de los rayos incidentes. Por lo tanto, las direcciones en que se obtienen los máximos de difracción se determinan por la condición

$$2d \operatorname{sen} \vartheta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{131.8}$$

Esta relación se llama *fórmula de Bragg—Wulf.*

Las capas atómicas se pueden tomar en un cristal por muchos procedimientos (fig. 131.5). Cada sistema de capas puede dar un máximo de difracción si para él se cumple la condición (131.8). Pero sólo tienen una intensidad apreciable aquellos máximos que se obtienen a expensas de la reflexión en capas cubiertas con suficiente densidad de átomos (por ejemplo, las capas *I* y *II* en la fig. 131.5).

Advertimos que el cálculo por la fórmula de Bragg—Wulf y el cálculo por las fórmulas de Laue (véase (131.6)) conducen a resultados coincidentes.

La difracción de los rayos X por los cristales tiene dos aplicaciones fundamentales: la investigación de la composición espectral de la radiación X (*espectroscopia de rayos* X) y el estudio de la estructura de los cristales (*análisis estructural por rayos* X).

Determinando las dimensiones de los máximos que se obtienen en la difracción por cristales, cuya estructura se conoce, de la radiación X que se investiga, se pueden calcular las longitudes de onda. Inicialmente, para determinar las longitudes de onda se emplearon los cristales del sistema cúbico, hallando sus distancias interplanares por la densidad y la masa molecular relativa del cristal.

En el método de análisis estructural propuesto por Laue un haz de rayos X se dirige sobre un monocristal fijo. Para cada sistema de capas cubiertas con suficiente densidad de átomos, se encuentra en la radiación una longitud de onda con la cual se cumple

la condición (131.8). Por eso, en la placa fotográfica que se coloca detrás del cristal se obtiene (una vez revelada) un conjunto de manchitas negras. La disposición mutua de estas manchitas refleja la simetría del cristal. Por las distancias entre ellas y por su intensidad se consigue hallar la distribución de los átomos en el cristal y las distancias entre ellos. En la fig. 131.6 se da el diagrama de Laue del berilo (mineral del grupo de los silicatos).

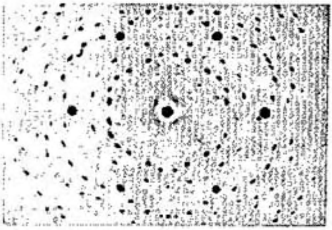


Fig. 131.6.

En el método de análisis estructural elaborado por Debye y Scherrer se utiliza una radiación X monocromática y muestras policristalinas. La substancia que se va a investigar se reduce a polvo, con el cual se prensa una muestra en forma del alambrito. Esta muestra se coloca coincidiendo con el eje de una cámara cilíndrica en cuya pared lateral se extiende una película fotográfica (fig. 131.7). En la enorme cantidad de cristalitos orientados al azar hay un conjunto de ellos para los cuales se cumple la condición (131.8), con la particularidad de que el rayo difractado por distintos cristalitos se

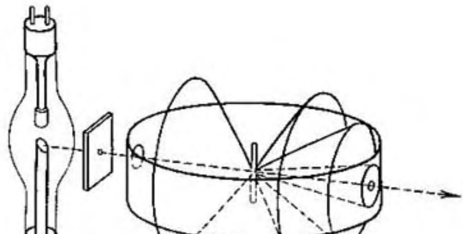


Fig. 131.7.

encontrará en todos los planos posibles. Como resultado, para cada sistema de capas atómicas y cada m se obtiene no una dirección de máximo, sino un cono de direcciones cuyo eje coincide con la dirección del rayo incidente (véase la fig. 131.7). La figura que se obtiene

en la película (diagrama de Debye) tiene la forma que muestra la fig. 131.8. Capa par de rayas situadas simétricamente corresponde



Fig. 131.8.

a uno de los máximos de difracción que satisfacen la condición (131.8) con un cierto valor de m. Descifrando el roentgenograma se puede determinar la estructura del cristal.

§ 132. Poder separador de un objetivo

Sea una pantalla opaca con un orificio circular de radio b, practicado en ella, sobre la cual incide una onda luminosa plana. El número de zonas de Fresnel que descubre el orificio para un punto P, que se encuentra enfrente de su centro y a la distancia l de él, se puede hallar por la fórmula (128.2), suponiendo en ella $a = \infty$, $r_0 = b$ y $b = l$. En definitiva se obtiene

$$m = \frac{b^2}{l\lambda} \qquad (132.1)$$

(compárese con (129.17)).

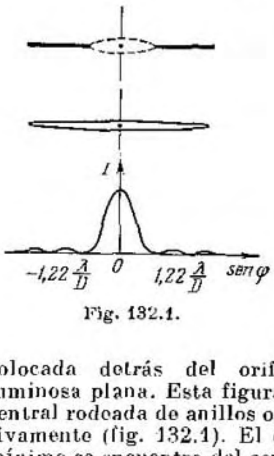


Fig. 132.1.

Lo mismo que en el caso de una rendija, en dependencia del parámetro (132.1) tiene lugar la aproximación de la óptica geométrica, la difracción de Fresnel o, finalmente, la difracción de Fraunhofer (véase (129.16)).

La figura de difracción de Fraunhofer por el orificio circular se puede observar sobre una pantalla situada en el plano focal de una lente colocada detrás del orificio, dirigiendo sobre él una onda luminosa plana. Esta figura tiene la forma de una mancha brillante central rodeada de anillos oscuros y brillantes que se suceden alternativamente (fig. 132.1). El cálculo correspondiente da que el primer mínimo se encuentra del centro de la figura de difracción a la distancia angular

$$\varphi_{\text{min}} = \operatorname{arcsen} 1,22\frac{\lambda}{D}, \qquad (132.2)$$

donde D es el diámetro del orificio (compárese con (129.8)). Si $D \gg \lambda$, se puede considerar que

$$\varphi_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}. \tag{132.3}$$

Una parte aplastante (cerca de un 84 %) del flujo luminoso que pasa por el orificio va a parar a la región de la mancha brillante central. La intensidad del primer anillo brillante es en total de un 1,74% y la del segundo, de un 0,41% de la intensidad de dicha mancha. La intensidad de los demás anillos brillantes es aún menor. Por eso, en primera aproximación, se puede considerar que la figura de difracción consta solamente de una mancha brillante cuyo radio angular viene determinado por la fórmula (132.2). Esta mancha es en esencia la imagen de una fuente puntual de luz infinitamente lejana (sobre el orificio incide una onda luminosa plana).

La figura de difracción no depende de la distancia entre el orificio y la lente. En particular, será la misma en el caso en que los bordes del orificio coincidan con los de la lente. De aquí se infiere que ni la lente más perfecta puede dar una imagen óptica ideal. A causa de la naturaleza ondulatoria de la luz, la imagen de un punto que dé la lente tiene la forma de una manchita, que es el máximo central de la figura de difracción. La dimensión angular de esta manchita disminuye a medida que aumenta el diámetro D de la montura de la lente.

Cuando la distancia angular entre dos puntos es muy pequeña, sus imágenes obtenidas con cualquier instrumento óptico se superponen una a otra y dan una sola mancha brillante. Por consiguiente, dos puntos muy próximos no serán percibidos por el instrumento separadamente o, como suele decirse, no serán resueltos por él. Por eso, por muy grandes que sean las dimensiones de la imagen, no se verán en ella los detalles correspondientes.

Designemos por $\delta\psi$ la distancia angular mínima entre dos puntos con la cual aún pueden ser separados por el instrumento óptico. La magnitud recíproca de $\delta\psi$ se llama *poder separador* o *de resolución del instrumento*:

$$R = \frac{1}{\delta\psi}. \tag{132.4}$$

Hallemos el poder separador de un anteojo o de un aparato fotográfico para el caso en que se observan o se fotografían objetos muy alejados. Con esta condición, los rayos que van al objetivo desde cada punto del objeto se pueden considerar paralelos y aplicar la fórmula (132.2). De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos puntos próximos se podrán aún distinguir separadamente si el centro del máximo de difracción central de uno de ellos coincide con el borde del máximo central del otro (es decir, con su primer

mínimo). En la fig. 132.2 se ve que esto ocurre si la distancia angular $\delta\psi$ entre los puntos es igual al radio angular (132.2). El diámetro del portaobjetivo D es mucho mayor que la longitud de onda λ. Por lo tanto, se puede considerar que

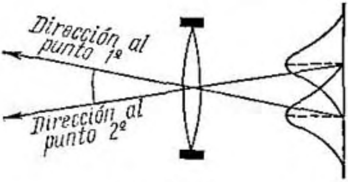


Fig. 132.2.

$$\delta\psi = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}.$$

De donde

$$R = \frac{D}{1{,}22\lambda}. \qquad (132.5)$$

De esta fórmula se deduce que el poder separador del objetivo será tanto mayor cuanto mayor sea su diámetro.

El diámetro de la pupila del ojo humano, cuando la iluminación es normal, es igual, aproximadamente, a 2 mm. Sustituyendo este valor en la fórmula (132.5) y tomando $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm, se obtiene:

$$\delta\psi = 1{,}22 \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}305 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \approx 1'.$$

Por consiguiente, la distancia angular mínima entre dos puntos, a la cual el ojo los percibe aún separadamente, es igual a un minuto angular. Es curioso que la distancia entre los elementos fotosensibles contiguos de la retina del ojo corresponde a esta distancia angular.

§ 133. Holografía

La holografía (del griego: *holos*, completo y *grafos*, escribir, es decir, «escritura completa») es un procedimiento especial de fijar en una placa fotográfica la estructura de una onda luminosa reflejada en un objeto. Cuando esta placa (*holograma*) se ilumina con un haz luminoso, la onda registrada en ella se reconstruye casi en su forma inicial, de manera que, al percibirla el ojo, la sensación visual es prácticamente igual que la sentida al observar el objeto mismo.

La holografía fue patentada en 1947 por el físico inglés D. Gabor. Pero la realización completa de su idea sólo fue posible después de que en 1960 se crearon las fuentes de luz de alto grado de coherencia llamadas láseres. El esquema inicial de Gabor fue perfeccionado por los físicos norteamericanos E. N. Leith y J. Upatnieks, los cuales obtuvieron en 1963 los primeros hologramas de láser. El científico soviético Yu. N. Denisiuk propuso en 1962 un método original de fijación de hologramas en una capa gruesa de emulsión. Por este procedimiento, a diferencia de los hologramas en capa de emulsión fina, se consigue una imagen en color del objeto.

Nosotros vamos a limitarnos a estudiar un método elemental de obtención de hologramas sobre emulsión en capa delgada. En la fig. 133.1, *a* se da el esquema de la instalación para obtener los hologramas, y en la fig. 133.1, *b*, el esquema de la reconstrucción de la imagen. El haz luminoso emitido por el láser, ensanchado por medio de un sistema de lentes, se divide en dos partes. Una de ellas se refleja en un espejo hacia la placa fotográfica y forma el denominado haz de referencia *1*. La otra parte incide sobre la placa después de reflejarse en el objeto que se fotografía; esta parte constituye el haz objeto *2*. Ambos haces deben ser coherentes. Este requisito se cumple, ya que la radiación de láser posee un alto grado de coherencia espacial (las oscilaciones luminosas son coherentes por toda la sección transversal del haz de láser). Los haces de referencia y objeto, superponiéndose, originan la figura de interferencia que se fija en la placa fotográfica. Esta, una vez expuesta y revelada es el *holograma*. En la formación del holograma participan dos haces de luz, por lo que el esquema descrito para obtener estos hologramas se llama de dos haces.

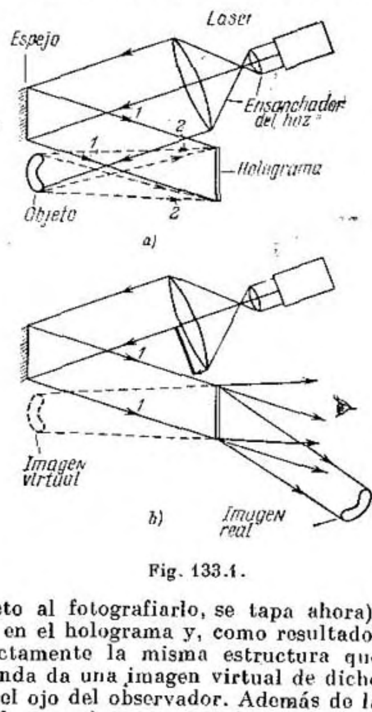


Fig. 133.1.

Para reconstruir la imagen, la placa fotográfica revelada se coloca, respecto de la fuente de luz, tal como estaba al hacer la fotografía y se ilumina con el haz de luz de referencia (la parte del haz de láser que iluminaba el objeto al fotografiarlo, se tapa ahora). El haz de referencia se difracta en el holograma y, como resultado, surge una onda que tiene exactamente la misma estructura que la reflejada en el objeto. Esta onda da una imagen virtual de dicho objeto, la cual es percibida por el ojo del observador. Además de la onda que forma la imagen virtual, se produce otra que da una imagen real del objeto. Esta imagen real es «seudoscópica», es decir, que su relieve es inverso al del objeto: los sitios convexos aparecen en ella cóncavos y viceversa.

Examinemos el carácter del holograma y el proceso de reconstruc-

ción de la imagen. Supongamos que sobre la placa fotográfica inciden dos haces luminosos, paralelos y coherentes, que marchan formando entre sí un ángulo ψ (fig. 133.2). El *1* es el haz de referencia y el *2*, el haz objeto (el objeto es en este caso un punto infinitamente lejano). Para simplificar supondremos que el haz *1* incide sobre la placa normalmente. Todos los resultados que se obtienen a continuación también son válidos cuando el haz de referencia incide oblicuamente, pero en este caso las fórmulas son más «voluminosas».

A causa de la interferencia del haz de referencia y el haz objeto, sobre la placa se forma un sistema de máximos y mínimos de intensidad, rectilíneos, que se suceden alternativamente. Supongamos

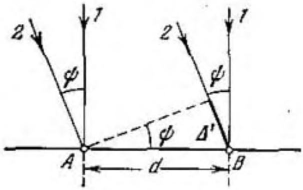


Fig. 133.2.

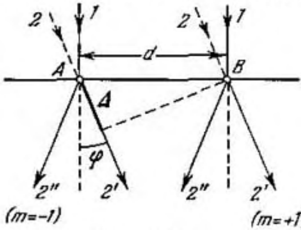


Fig. 133.3.

que los puntos A y B corresponden a los centros de dos máximos de interferencia vecinos. Entonces la diferencia de marcha Δ' es igual a λ. En la fig. 133.2 se ve que $\Delta' = d \operatorname{sen} \psi$, luego

$$d \operatorname{sen} \psi = \lambda. \qquad (133.1)$$

Una vez fijada en la placa (mediante la exposición y el revelado) la figura de interferencia, dirigimos sobre ella el haz de referencia *1*. Para este haz la placa desempeña el papel de red de difracción, cuyo período d se determina por la fórmula (133.1). Esta red tiene la peculiaridad de que su capacidad de transmisión varía en dirección perpendicular a los «trazos» según una ley cosinusoidal (en las redes que se estudiaron en el § 130 variaba a saltos: claro—oscuro—claro—oscuro y así sucesivamente). Esta peculiaridad hace que la intensidad de todos los máximos de difracción de orden superior al 1° sea prácticamente nula.

Al iluminar la placa con el haz de referencia (fig. 133.3) se produce una figura de difracción cuyos máximos forman con la normal a la placa los ángulos φ, determinables por la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1) \qquad (133.2)$$

(compárese con la fórmula (130.5)). El máximo correspondiente a $m = 0$ se encuentra en la prolongación del haz de referencia. El máximo correspondiente a $m = +1$ tiene la misma dirección

que tenía durante la exposición el haz objeto *2* (compárense las fórmulas (133.1) y (133.2)). Además surge el máximo que corresponde a $m = -1$. Puede demostrarse que el resultado obtenido es correcto también en el cato en que el haz objeto *2* no et paralelo sino divergente. Entonces el máximo correspondiente a $m = +1$ tiene el carácter de un haz de rayos divergente *2'* (que da una imagen virtual del punto de que partían los rayos *2* durante la exposición); en cambio, el máximo correspondiente a $m = -1$ tiene el carácter de un haz de rayos convergente *2"* (que forma la imagen real del punto de que partían los rayos *2* durante la exposición).

Para obtener el holograma, la placa se ilumina con el haz de referencia *1* y con el conjunto de haces divergentes *2* reflejados en distintos puntos del objeto. En la placa aparece una figura de interferencia compleja que se forma como resultado de la superposición de las figuras que dan cada uno de los haces *2* por separado. Cuando el holograma se ilumina con el haz de referencia *1* resultan reconstruidos todos los haces *2*, es decir, toda la onda luminosa que se reflejó en el objeto (a ella corresponde $m = +1$). Además de ésta, surgen otras dos ondas (correspondientes a $m = 0$ y $m = -1$). Pero estas ondas se propagan en otras direcciones y no impiden percibir la onda que origina la imagen virtual del objeto (véase la fig. 133.1).

La imagen del objeto que da el holograma es tridimensional. Puede observarse desde distintas posiciones. Si durante la exposición los objetos más próximos tapaban a los más lejanos, echándose hacia un lado se puede mirar por detrás del objeto más cercano (o mejor dicho, de su imagen) y ver los que él ocultaba. Esto se explica porque al desplazarnos hacia un lado percibimos la imagen reconstruida de la parte periférica del holograma, sobre la cual, durante la exposición, incidían también los rayos reflejados en los objetos ocultos. Al observar las imágenes de los objetos próximos y lejanos hay que acomodar la vista de distinto modo, lo mismo que cuando se observan los objetos mismos.

Si el holograma se rompe en varios trozos, cada uno de ellos, al ser iluminado, da la misma figura que el holograma inicial. Pero cuanto menor sea la parte del holograma que se utilice para la reconstrucción de la imagen, tanto menor será su nitidez. Esto es fácil de comprender teniendo en cuenta que si disminuye el número de trazos de una red de difracción, su poder separador también disminuye (véase la fórmula (130.19)).

Las posibles aplicaciones de la holografía son muy variadas. Una lista muy incompleta de ellas la forman el cine, la televisión y el microscopio holográficos y el control de la calidad del acabado de las piezas. En la literatura se puede encontrar la afirmación de que el invento de la holografía es comparable por sus consecuencias con el de la radiocomunicación.

CAPÍTULO XIX

POLARIZACIÓN DE LA LUZ

§ 134. Luz natural y luz polarizada

Recordaremos que se llama luz polarizada aquella, en la cual la dirección de las oscilaciones del vector luz están ordenadas de algún modo (véase el § 110). En la luz visible las oscilaciones en distintas direcciones se suceden unas a otras rápida y desordenadamente.

Consideremos dos oscilaciones eléctricas perpendiculares entre sí que se efectúen a lo largo de los ejes x e y y entre las cuales haya una diferencia de fase δ:

$$E_x = A_1 \cos \omega t, \quad E_y = A_2 \cos (\omega t + \delta). \qquad (134.1)$$

La intensidad resultante $\mathbf{E}$ es la suma vectorial de las intensidades $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ (fig. 134.1). El ángulo φ entre las direcciones de los vectores $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ se determina por la expresión

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos (\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}. \qquad (134.2)$$

Si la diferencia de fase δ sufre variaciones caóticas casuales, el ángulo φ, es decir, la dirección del vector luz $\mathbf{E}$ también experimentará variaciones bruscas desordenadas. De acuerdo con esto, la luz natural podemos figurárnosla como la superposición de dos ondas electromagnéticas no coherentes de igual intensidad, polarizadas en planos perpendiculares entre sí. Esta representación simplifica mucho el estudio del paso de la luz natural a través de los dispositivos polarizadores.

Supongamos que las ondas luminosas E_x y E_y son coherentes y que δ es igual a cero o a π. Entonces, según (134.2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = \text{const.}$$

Por consiguiente, la oscilación resultante se realiza en una dirección fija, es decir, la onda resulta polarizada plana.

En el caso en que $A_1 = A_2$ y $\delta = \pm\pi/2$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \operatorname{tg} \omega t$$

($\cos (\omega t \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} \omega t$). De aquí se infiere que el plano de oscilaciones gira alrededor de la dirección del rayo con una velocidad angular igual a la frecuencia de oscilación ω. La luz estará, en este caso, polarizada circularmente.

Para comprender el carácter de la oscilación resultante en el caso de un valor arbitrario constante de δ, tomamos en considera-

cón que la magnitud (134.1) es la coordenada del extremo del vector resultante **E** (fig. 134.2). Por el estudio de las oscilaciones (véase el § 57 del tomo 1°) sabemos que dos oscilaciones armónicas de igual frecuencia, perpendiculares entre sí, en el caso general dan al componerse un movimiento elíptico (en particular, se puede obtener un movimiento rectilíneo o un movimiento circular). Análogamente, el punto cuyas coordenadas vienen determinadas por la expresión (134.1), es decir, el extremo del vector **E**, se mueve siguiendo una elipse. Por consiguiente, dos ondas luminosas, planopolarizadas, coherentes, cuyos planos de oscilaciones sean perpendiculares entre sí, al superponerse dan una onda luminosa polarizada elípticamente. Cuando la diferencia de fase δ es igual a cero o a π,

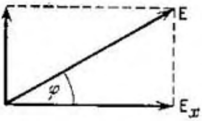


Fig. 134.1.

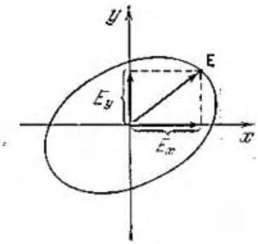


Fig. 134.2.

la elipse degenera en una recta y se obtiene luz polarizada plana. Si $\delta = \pm\pi/2$ y las amplitudes de las ondas que se componen son iguales, la elipse se transforma en circunferencia y se obtiene luz polarizada circularmente.

En dependencia del sentido en que gire el vector **E**, la polarización puede ser elíptica o circular dextrógira o levógira. Si con respecto a sentido contrario al del rayo, el vector **E** gira en el sentido de las agujas del reloj, la polarización es *dextrógira*, en el caso contrario será *levógira*.

Al plano en el cual oscila el vector luz de una onda polarizada plana le daremos el nombre de *plano de oscilaciones*. Por razones históricas se llamó *plano de polarización* no al plano en que oscila el vector **E**, sino al plano perpendicular a él.

La luz polarizada plana se puede obtener de la natural valiéndose de los dispositivos llamados *polarizadores*. Estos dispositivos dejan pasar libremente las oscilaciones paralelas al plano que llamaremos *del polarizador*, y detienen total o parcialmente las oscilaciones perpendiculares a dicho plano. Al polarizador que sólo detiene parcialmente las oscilaciones perpendiculares a su plano lo llamaremos *imperfecto*. Al polarizador ideal, que detiene totalmente las

oscilaciones perpendiculares a su plano y que no debilita las oscilaciones paralelas a éste, lo nombraremos simplemente polarizador.

A la salida de un polarizador imperfecto se obtiene luz en la cual las oscilaciones de una dirección prevalecen sobre las de otras direcciones. Esta luz se llama *polarizada parcialmente*. Se puede considerar como una mezcla de luz natural y polarizada plana. La luz parcialmente polarizada, lo mismo que la natural, se puede representar como la superposición de dos ondas polarizadas planas no coherentes cuyos planos de oscilaciones son perpendiculares

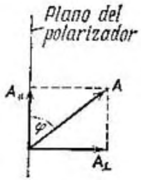


Fig. 134.3.

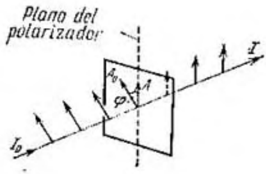


Fig. 134.4.

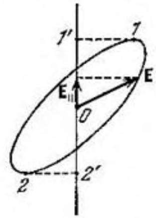


Fig. 134.5.

entre sí. La diferencia consiste en que, en el caso de la luz natural la intensidad de estas ondas es igual, mientras que en el caso de la parcialmente polarizada, es distinta.

Si a través de un polarizador se hace pasar luz parcialmente polarizada, al girar el dispositivo alrededor de la dirección del rayo, la intensidad de la luz transmitida variará entre los límites de $I_{máx}$ a $I_{mín}$, efectuándose el paso de uno de estos valores al otro durante el giro en un ángulo igual a $\pi/2$ (en una vuelta completa se alcanzará dos veces el valor máximo de la intensidad y dos veces el mínimo). La expresión

$$P=\frac{I_{máx}-I_{mín}}{I_{máx}+I_{mín}} \tag{134.3}$$

se llama *grado de polarización*. Para la luz polarizada plana $I_{mín}=0$ y $P=1$; para la luz natural $I_{máx}=I_{mín}$ y $P=0$. El concepto de grado de polarización es inaplicable a la luz polarizada elípticamente (en esta luz las oscilaciones están totalmente ordenadas).

Las oscilaciones de la amplitud A que se realizan en un plano que forma con el de polarización un ángulo φ se pueden descomponer en dos oscilaciones cuyas amplitudes sean $A_\parallel=A\cos\varphi$ y $A_\perp=$ $=A\operatorname{sen}\varphi$ (fig. 134.3; el rayo es perpendicular al plano del dibujo). La primera oscilación pasará a través del polarizador; la segunda será detenida. La intensidad de la onda transmitida será proporcional a $A_\parallel^2=A^2\cos^2\varphi$, es decir, igual a $I\cos^2\varphi$, donde I es la intensidad

de la oscilación cuya amplitud es A. Por lo tanto, la oscilación paralela al plano del polarizador lleva una parte de la intensidad igual a $\cos^2 \varphi$. En la luz natural todos los valores de φ son igualmente probables. Por eso, la parte de la luz transmitida por el polarizador será igual al valor medio de $\cos^2 \varphi$, es decir, a $^1/_2$. Cuando el polarizador se gira alrededor de la dirección del rayo natural, la intensidad de la luz transmitida sigue siendo la misma, varía solamente la orientación del plano de oscilaciones de la luz que sale del dispositivo.

Sea un polarizador sobre el cual incide luz polarizada plana de amplitud A_0 e intensidad I_0 (fig. 134.4). A través del dispositivo pasa la componente de la oscilación cuya amplitud es $A = A_0 \cos \varphi$, en la que φ es el ángulo entre el plano de oscilaciones de la luz incidente y el plano del polarizador. Por consiguiente, la intensidad I de la luz transmitida se determina por la expresión

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \tag{134.4}$$

La relación (134.4) es la *ley de Malus.*

Interpongamos en el camino de un rayo de luz natural dos polarizadores cuyos planos formen un ángulo φ. Del primer polarizador saldrá luz polarizada plana cuya intensidad I_0 constituirá la mitad de la intensidad I_{nat} de la luz natural. Según la ley de Malus, del segundo polarizador saldrá luz cuya intensidad será $I_0 \cos^2 \varphi$. De este modo, la intensidad de la luz transmitida por los dos polarizadores será:

$$I = \frac{1}{2} I_{nat} \cos^2 \varphi. \tag{134.5}$$

La intensidad máxima, igual a $^1/_2\, I_{nat}$, se obtiene cuando $\varphi = 0$ (los polarizadores son paralelos). Si $\varphi = \pi/2$, la intensidad es nula, porque los polarizadores cruzados no dejan pasar luz.

Supongamos que una luz polarizada elípticamente incide sobre un polarizador. El dispositivo deja pasar el componente $\mathbf{E}_{\parallel}$, del vector $\mathbf{E}$, cuya dirección es la del plano del polarizador (fig. 134.5). Este componente alcanza su valor máximo en los puntos *1* y *2*. Por lo tanto, la amplitud de la luz polarizada plana que sale del dispositivo es igual a la longitud del segmento *01'*. Haciendo girar el polarizador alrededor de la dirección del rayo, observaremos la variación de la intensidad entre los límites de $I_{máx}$ (que se obtiene cuando el plano del polarizador coincide con el semieje mayor de la elipse) a $I_{mín}$ (que se alcanza cuando el plano del polarizador coincide con el semieje menor de la elipse). Este mismo carácter tiene la variación de la intensidad de la luz que se obtiene al girar el polarizador en el caso de la luz polarizada parcialmente. Si la luz está polarizada circularmente, el giro del polarizador no va acompañado (como en el caso de la luz natural) de variación de la intensidad de la luz transmitida por el dispositivo.

§ 135. Polarización por reflexión y refracción

Si el ángulo de incidencia de la luz sobre el límite de separación de dos dieléctricos (por ejemplo, en la superficie de una lámina de vidrio) es distinto de cero, los rayos reflejado y refractado resultan parcilamente polarizados[1]). En el rayo reflejado prevalecen las oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia (en la fig. 135.1 estas oscilaciones se indican con puntos), y en el refractado, las oscilaciones paralelas al plano de incidencia (en la figura se representan con flechitas bilaterales). El grado de polarización depende del ángulo de incidencia.

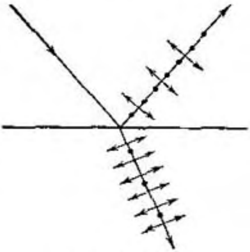


Fig. 135.1.

Designemos por θ_{Br} el ángulo que satisface la condición

$$\operatorname{tg} \theta_{Br} = n_{12} \qquad (135.1)$$

(n_{12} es el índice de refracción del segundo medio respecto del primero). Si el ángulo de incidencia ϑ_1 es igual a θ_{Br}, el rayo reflejado estará totalmente polarizado (contendrá únicamente oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia). El grado de polarización del rayo refractado, cuando el ángulo de incidencia es igual a θ_{Br}, alcanza su valor máximo, pero sigue estando polarizado sólo parcialmente.

La relación (135.1) se conoce con el nombre de *ley de Brewster*, y el ángulo θ_{Br} se llama *ángulo de Brewster*. Es fácil cerciorarse de que cuando la luz incide bajo el ángulo de Brewster los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.

El grado de polarización de los rayos reflejado y refractado para distintos ángulos de incidencia, se puede obtener por las *fórmulas de Fresnel*. Estas fórmulas se infieren de las condiciones que se imponen al campo electromagnético en el límite entre dos dieléctricos[2]). Al número de estas condiciones pertenece la igualdad de los componentes tangenciales de los vectores **E** y **H**, así como la igualdad de los componentes normales de los vectores **D** y **B** a ambos lados del límite de separación (por una parte hay que tomar la suma de los vectores correspondientes a las ondas incidente y reflejada, y por la otra, el vector para la onda refractada).

Las fórmulas de Fresnel establecen las relaciones entre las amplitudes complejas de las ondas incidente, reflejada y refractada. Se recordará que se llama amplitud compleja $\hat{A}$ la expresión $Ae^{i\alpha}$, en

[1]) En la reflexión por una superficie conductora (por ejemplo, la superficie de un metal) se obtiene luz polarizada elípticamente.

[2]) Fresnel obtuvo estas fórmulas basándose en la representación de la luz como ondas elásticas que se propagan en el éter.

la que A es la amplitud ordinaria, y α, la fase inicial de la oscilación. Por consiguiente, la igualdad de dos amplitudes complejas significa la igualdad tanto de las amplitudes ordinarias como de las fases iniciales de ambas oscilaciones:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2. \tag{135.2}$$

En el caso en que las amplitudes complejas se diferencian en el signo, las amplitudes ordinarias son iguales, pero las fases iniciales se diferencian en π ($e^{i\pi} = -1$):

$$\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \pi. \tag{135.3}$$

Imaginémonos la onda incidente en forma de superposición de dos ondas no coherentes, en una de las cuales las oscilaciones se efectúan en el plano de incidencia, y en la otra, perpendicularmente a este plano. La amplitud compleja de la primera onda la designaremos por $\hat{A}_{\parallel}$, y la de la segunda, por $\hat{A}_{\perp}$. De un modo análogo procedemos con las ondas reflejada y refractada, designando las amplitudes de las ondas reflejadas con los mismos símbolos y añadiéndoles un apóstrofo, y las amplitudes de las ondas refractadas, con dichos símbolos y añadiéndoles dos apóstrofos. Así,

$\hat{A}_{\parallel}$ y $\hat{A}_{\perp}$ son las amplitudes de las ondas incidentes,
$\hat{A}'_{\parallel}$ y $\hat{A}'_{\perp}$, las amplitudes de las ondas reflejadas, y
$\hat{A}''_{\parallel}$ y $\hat{A}''_{\perp}$, las amplitudes de las ondas refractadas.

Las fórmulas de Fresnel tienen la forma siguiente[1]):

$$\left.\begin{aligned}
\hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp} \frac{\operatorname{sen}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\hat{A}''_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{2 \operatorname{sen}\vartheta_2 \cos\vartheta_1}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \\
\hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp} \frac{2 \operatorname{sen}\vartheta_2 \cos\vartheta_1}{(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \vartheta_2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{135.4}$$

(ϑ_1 es el ángulo de incidencia, y ϑ_2 el ángulo de refracción de la onda luminosa). Subrayamos que las fórmulas (135.4) establecen las relaciones entre las amplitudes complejas en el límite de separación de los dieléctricos, es decir, en el punto de incidencia del rayo sobre dicho límite. De las fórmulas tercera y cuarta (135.4) se sigue que los signos de las amplitudes complejas de las ondas incidente y refractada son cualesquiera que sean los valores de los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 (porque la suma de ϑ_1 y ϑ_2 no puede ser mayor que π). Esto

[1]) Por lo general, las fórmulas de Fresnel se escriben sin «circunflejo» sobre las amplitudes. No obstante, para subrayar que nos referimos a las amplitudes complejas, hemos creído conveniente escribirlas con él.

significa que al penetrar en el segundo medio, la fase de la onda no cambia bruscamente.

Cuando se estudian las relaciones de fase entre las ondas incidente y reflejada se debe tener en cuenta que para la onda polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, a la ausencia de salto de fase durante la reflexión corresponde la coincidencia de los signos de $\hat{A}_\perp$ y $\hat{A}_\perp$ (fig. 135.2, *a*). En cambio, para la onda polarizada en el plano de incidencia, el salto de fase está ausente en el caso en que los signos de $\hat{A}_\parallel$ y $\hat{A}'_\parallel$ son contrarios (fig. 1.235 *b*).

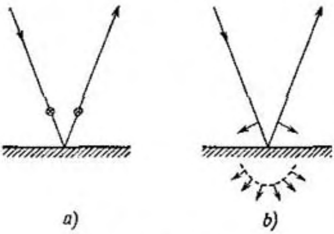


Fig. 135.2

Las relaciones de fase entre las ondas reflejada e incidente dependen de las relaciones entre los índices de refracción n_1 y n_2 de los medios primero y segundo, y de la relación entre el ángulo de incidencia ϑ_1 y el ángulo de Brewster θ_{Br} (se recordará que cuando $\vartheta_1 = \theta_{Br}$ la suma de los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 es igual a $\pi/2$). En la tabla 135.1 se dan los resultados que se deducen de las fórmulas primera y segunda (135.4) en los cuatro casos posibles. De esta tabla se sigue que en el caso de la incidencia bajo un ángulo menor que el de Brewster, la reflexión en el medio ópticamente más denso va

Tabla 135.1

	$\vartheta_1 < \theta_{Br}$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi/2)$	$\vartheta_1 > \theta_{Br}$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 > \pi/2)$
$n_2 > n_1$ $\vartheta_1 > \vartheta_2$	Los signos de $\hat{A}'_\parallel$ y $\hat{A}_\parallel$ son iguales (salto de fase igual a π) El signo de $\hat{A}'_\perp$ es contrario al de $\hat{A}_\perp$ (salto de fase igual a π)	El signo de $\hat{A}'_\parallel$ es contrario al de $\hat{A}_\parallel$ (no hay salto de fase) El signo de $\hat{A}'_\perp$ es contrario al de $\hat{A}_\perp$ (salto de fase igual a π)
$n_2 < n_1$ $\vartheta_1 < \vartheta_2$	El signo de $\hat{A}'_\parallel$ es contrario al de $\hat{A}_\parallel$ (no hay salto de fase) Los signos de $\hat{A}'_\parallel$ y $\hat{A}_\perp$ son iguales (no hay salto de fase)	Los signos de $\hat{A}'_\parallel$ y $\hat{A}_\parallel$ son iguales (salto de fase igual a π) Los signos de $\hat{A}'_\perp$ y $\hat{A}_\perp$ son iguales (no hay salto de fase)

acompañada de un salto de fase igual a π, y la reflexión en el medio ópticamente menos denso transcurre sin variación de fase. Este resultado, para $\vartheta_1 = 0$, se obtuvo en el § 112. En el caso en que $\vartheta_1 < \theta_{Br}$, las relaciones de fase para las dos componentos de la onda resultan distintas. De la primera fórmula (135.4) se obtiene que si $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$, es decir, cuando $\vartheta_1 = \theta_{Br}$, la amplitud $\hat{A}'_{\parallel}$ se anula. Por consiguiente, en la onda reflejada sólo están presentes las oscilaciones perpen-diculares al plano de incidencia, o sea, la onda reflejada está polarizada totalmente. De este modo, la ley de Brewster se deduce directamente de las fórmulas de Fresnel.

Si los ángulos de incidencia son pequeños, en las fórmulas (135.4) se pueden sustituir los senos y las tangentes por los ángulos mismos y suponer que los cosenos son iguales a la unidad. Además, en este caso se puede considerar que $\vartheta_1 = n_{12}\vartheta_2$ (esto se infiere de la ley de la refracción después de sustituir los senos por los ángulos). Como resultado, las fórmulas de Fresnel toman, para pequeños ángulos de incidencia, la forma

$$\left.\begin{aligned}
\hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel}\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel}\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1},\\
\hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp}\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} = -\hat{A}_{\perp}\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1},\\
\hat{A}''_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel}\frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel}\frac{2}{n_{12}+1},\\
\hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp}\frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} = \hat{A}_{\perp}\frac{2}{n_{12}+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (135.5)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (135.5) y multiplicando por el índice de refracción del medio correspondiente las expresiones obtenidas, resultan las relaciones entre las intensidades de los rayos incidente, reflejado y refractado para el caso de ángulos de incidencia pequeños (véase la fórmula (110.9)). Con esto, por ejemplo, la intensidad de la luz reflejada I' se puede calcular como la suma de las intensidades de sus componentes $I'_{\parallel}$ e $I'_{\perp}$. En definitiva se obtiene

$$I' = I\left(\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1}\right)^2, \quad I'' = n_{12}I\left(\frac{2}{n_{12}+1}\right)^2.$$

De estas fórmulas se deducen las expresiones (112.19) y (112.20) para ρ y τ.

§ 136. Polarización por doble refracción

Al pasar la luz a través de todos los cristales transparentes, excepto los que pertenecen al sistema cúbico, se observa el fenómeno llamado *doble refracción*[1]). Consiste este fenómeno en que la luz que

[1]) La doble refracción la observó por primera vez Erasmi Bartholinus, en 1669, con el espato de Islandia (variedad del carbonato de calcio $CaCO_3$, cuyos cristales pertenecen al sistema hexagonal).

incide sobre el cristal se divide dentro de él en dos rayos que se propagan en general con velocidades y direcciones distintas.

Los cristales que poseen doble refracción se subdividen en *uniáxicos* y *biáxicos*. En los cristales uniáxicos uno de los rayos refractados se subordina a la ley de la refracción ordinaria, en particular, se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie de refringencia. Este rayo se llama *ordinario* y se designa con la letra *o*. Para el otro rayo, denominado *extraordinario* (y que se designa con la letra *e*), la relación de los senos del ángulo de incidencia y del ángulo de refracción no permanece constante cuando varía el ángulo de incidencia. Incluso en el caso de la incidencia normal de la luz sobre el cristal, el rayo extraordinario se desvía, en general, de la normal (fig. 136.1). Además, el rayo extraordinario no se suele encontrar en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie refringente. De ejemplos de cristales uniáxicos pueden servir el espato de Islandia, el cuarzo y la turmalina. En los cristales biáxicos (mica, aljez), los dos rayos son extraordinarios, es decir, sus índices de refracción dependen de la direccíón en el cristal. En adelante nos limitaremos a estudiar solamente los cristales uniáxicos.

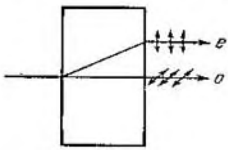


Fig. 136.1.

En estos cristales existe una dirección a lo largo de la cual los rayos ordinario y extraordinario se propagan sin separarse y con la misma velocidad[1]). Esta dirección se llama *eje óptico* del cristal. Debe tenerse en cuenta que el eje óptico no es una línea recta que pasa por cierto punto del cristal, sino una dirección determinada en el mismo. Cualquier recta paralela a esta dirección es eje óptico del cristal.

Todo plano que pase por el eje óptico recibe el nombre de *sección principal* o *plano principal* del cristal. Por lo general se utiliza la sección principal que pasa por el rayo luminoso.

La investigación de los rayos ordinario y extraordinario demuestra que ambos rayos están totalmente polarizados en direcciones perpendiculares entre sí (véase la fig. 136.1). El plano de oscilaciones del rayo ordinario es perpendicular a la sección principal del cristal. En el rayo extraordinario las oscilaciones del vector luz se efectúan en el plano que coincide con la sección principal. Al salir del cristal los dos rayos sólo se diferencian entre sí en la dirección de polarización, por lo que los nombres de «ordinario» y «extraordinario» únicamente tienen sentido dentro del cristal.

Algunos cristales absorben más intensamente uno de los rayos que el otro. Este fenómeno se llama *dicroismo*. Un dicroismo muy

---

[1]) En los cristales biáxicos existen dos de estas direcciones.

fuerte a los rayos visible tiene el cristal de turmalina (mineral de composición compleja). En la práctica, 1 mm de longitud de este cristal absorbe totalmente el rayo ordinario. En los cristales del sulfato yoduro de quinina uno de los rayos se absorbe en la longitud de 0,1 mm aproximadadamente. Esta circunstancia se aprovecha para fabricar el dispositivo polarizador denominado *polaroide*. Este consiste en una película de celuloide en la cual se introduce una gran cantidad de cristalitos de sulfato de iodoquinina igualmente orientados.

La doble refracción se explica por la anisotropía de los cristales. La permitividad ε de los cristales de sistemas no cúbicos depende de la dirección. En los cristales uniáxicos ε tiene distintos valores: $\varepsilon_{\parallel}$ en la dirección del eje óptico, y $\varepsilon_{\perp}$ en las direcciones perpendiculares a él. En otras direcciones ε posee valores intermedios. Según la fórmula (110,3), $n = \sqrt{\varepsilon}$. Por consiguiente, de la anisotropía de ε se infiere que a las ondas electromagnéticas con distintas direcciones de oscilación del vector **E** corresponden valores distintos del índice de refracción n. Por eso la velocidad de las ondas luminosas depende de la dirección de las oscilaciones del vector **E**.

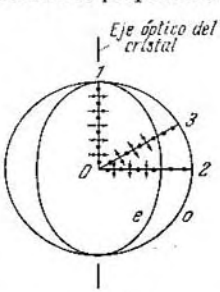


Fig. 136.2.

En el rayo ordinario las oscilaciones del vector luz se efectúan en dirección perpendicular a la sección principal del cristal (en la fig. 136.2 estas oscilaciones se representan por puntos sobre el rayo correspondiente). Por eso, cualquiera que sea la dirección del rayo ordinario (en la figura se indican tres direcciones: *1*, *2* y *3*), el vector **E** forma con el eje óptico del cristal un ángulo recto, y la velocidad de la onda luminosa será la misma e igual a $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Representando la velocidad del rayo ordinario en forma de segmentos tomados en distintas direcciones, se obtiene una superficie esférica. En la fig. 136.2 se muestra la intersección de esta superficie con el plano del dibujo. Una figura como la de este dibujo se observa en cualquier sección principal, es decir, en cualquier plano que pase por el eje óptico. Imaginémonos que en un punto O dentro del cristal se encuentra una fuente puntual de luz. Entonces la esfera que hemos construido será la superficie de onda de los rayos ordinarios

Las oscilaciones en el rayo extraordinario se efectúan en la sección principal. Por eso, para rayos distintos, las direcciones de oscilación del vector **E** (en la fig. 136.2 estas direcciones se representan con flechitas bilaterales) forman con el eje óptico diferentes ángulos α. Para el rayo *1*, el ángulo α es igual a $\pi/2$, por lo que la velocidad

tiene el valor $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$; para el rayo *2*, el ángulo $\alpha = 0$ y la velocidad $v = c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Para el rayo *3* la velocidad tiene un valor intermedio. Se puede demostrar que la superficie de onda de los rayos extraordinarios es un elipsoide de revolución. En los puntos de intersección con el eje óptico del cristal, este elipsoide y la esfera construida para los rayos ordinarios son tangentes.

Los cristales uniáxicos se caracterizan por tener el *índice de refracción del rayo ordinario* $n_o = c/v_o$, y el índice de refracción del rayo extraordinario, perpendicular al eje óptico, $n_e = c/v_e$. Esta última magnitud se llama simplemente *índice de refracción del rayo extraordinario*.

En dependencia de cuál de las velocidades, v_o o v_e, es mayor, los cristales uniáxicos pueden ser *positivos* o *negativos* (fig. 136.3). En

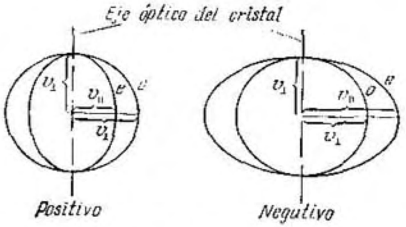


Fig. 136.3.

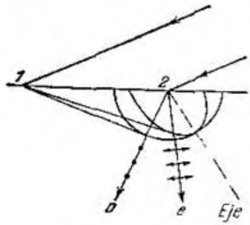


Fig. 136.4.

los cristales positivos $v_e < v_o$ (esto significa que $n_e > n_o$). En los negativos, $v_e > v_o$ ($n_e < n_o$). Es fácil recordar qué cristales son positivos y cuáles son negativos. En los cristales positivos el elipsoide de velocidades tiene su alargamiento a lo largo del eje óptico, lo que lo asocia con la idea de la raya vertical del signo «+»; y en los cristales negativos, el elipsoide de velocidades tiene el alargamiento en dirección perpendicular al eje óptico, asociándose con la idea del trazo del signo «—».

La marcha de los rayos ordinario y extraordinario en el cristal se puede determinar por medio del principio de Huygens. En la fig. 136.4 se han construido las superficies de onda de los rayos ordinario y extraordinario con centro en el punto *2*, que se encuentra en la superficie del cristal. La construcción se ha hecho para el instante en que el frente de la onda incidente alcanza el punto *1*. Las envolventes de todas las ondas secundarias (las ondas cuyos centros se hallan en el intervalo entre los puntos *1* y *2* no se muestran en la figura) para los rayos ordinario y extraordinario serán, evidentemente, planos. El rayo refractado *o* o *e*, que sale del punto *2*, pasa

por el punto de tangencia de la envolvente con la superficie de onda correspondiente.

Se recordará que se llaman rayos las líneas a lo largo de las cuales se propaga la energía de la onda luminosa (véase el § 110). De la fig. 136.4 se sigue que el rayo ordinario *o* coincide con la normal a la superficie de onda correspondiente. El rayo extraordinario *e*, en cambio, se desvía apreciablemente de la normal a la superficie de onda.

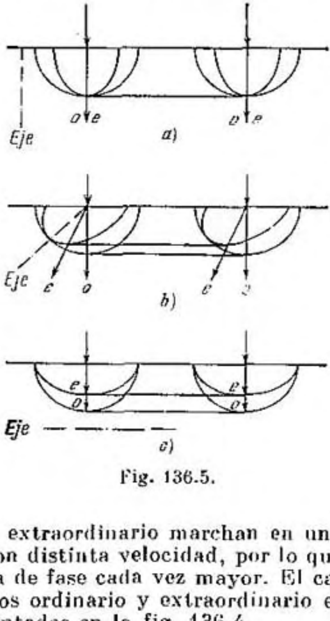


Fig. 136.5.

En la fig. 136.5 se representan tres casos de incidencia normal de la luz sobre la superficie del cristal, que se diferencian por la dirección del eje óptico. En el caso *a* los rayos *o* y *e* se propagan a lo largo del eje óptico y por eso marchan sin dividirse. En la fig. 136.5, *b* se ve que, incluso cuando la luz incide normalmente sobre la superficie refringente, el rayo extraordinario puede desviarse de la normal a esta superficie. En la fig. 136.5, *c* el eje óptico del cristal es paralelo a la superficie refringente. En este caso, cuando la luz incide normalmente, los rayos ordinario y extraordinario marchan en una misma dirección pero se propagan con distinta velocidad, por lo que entre ellos se produce una diferencia de fase cada vez mayor. El carácter de la polarización de los rayos ordinario y extraordinario es el mismo que para los rayos representados en la fig. 136.4.

§ 137. Interferencia de rayos polarizados

Si se superponen dos rayos coherentes, polarizados en direcciones perpendiculares entre sí, no se puede obtener ninguna figura de interferencia con su característica sucesión alternativa de máximos y mínimos de intensidad. La interferencia se produce únicamente si las oscilaciones en los rayos que interaccionan se efectúan a lo largo de una misma dirección. Las oscilaciones en dos rayos polarizados inicialmente en direcciones perpendiculares entre sí, se pueden reducir a un plano haciendo pasar estos rayos por un polarizador colocado de tal forma, que su plano no coincida con ninguno de los planos de oscilaciones de los rayos.

Veamos lo que ocurre cuando se superponen los rayos ordinario y extraordinario salidos de una lámina de cristal. Supongamos que la lámina está tallada paralelamente al eje óptico (fig. 137.1). Si la luz incide normalmente sobre la lámina, los rayos ordinario y extraordinario se propagan sin separarse, pero con velocidades distintas (véase la fig. 136.5, *c*). Durante el tiempo que tardan en pasar por la lámina, entre los rayos se produce la diferencia de marcha

$$\Delta = (n_o - n_e)\, d \qquad (137.1)$$

o la diferencia de fase

$$\delta = \frac{(n_0 - n_e)\, d}{\lambda_0} 2\pi \qquad (137.2)$$

(d es el espesor de la lámina, y λ_0, la longitud de la onda en el vacío).

De este modo, si a través de una lámina de cristal, tallada paralelamente al eje óptico, se hace pasar luz natural (fig. 137.1, *a*), de ella salen dos rayos, *1* y *2*, polarizados en planos mutuamente perpendiculares[1]), entre los cuales existirá la diferencia de fase que determina la fórmula (137.2). Interpongamos en el camino de estos rayos un polarizador. Las oscilaciones de ambos rayos, después de pasar por el polarizador, se encontrarán en un plano. Sus amplitudes serán iguales a las componentes de las amplitudes de los rayos *1* y *2* en la dirección del plano del polarizador (fig. 137.1, *b*).

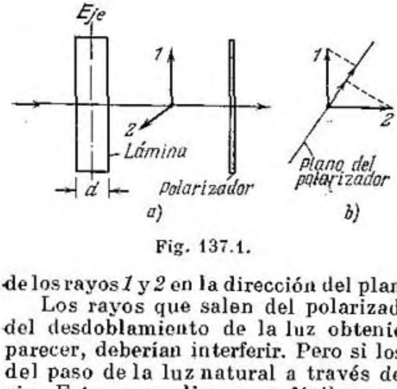


Fig. 137.1.

Los rayos que salen del polarizador han surgido como resultado del desdoblamiento de la luz obtenida de una fuente. Por eso, al parecer, deberían interferir. Pero si los rayos *1* y *2* surgen a expensas del paso de la luz natural a través de la lámina, no dan interferencia. Esto se explica muy fácilmente. Aunque los rayos ordinario y extraordinario fueron generados por una misma fuente de luz, contienen en lo fundamental oscilaciones que pertenecen a distintos trenes de ondas, emitidos por átomos separados. En el rayo ordinario las oscilaciones se deben principalmente a los trenes cuyos planos de oscilaciones están próximos a una dirección en el espacio, y en el rayo extraordinario, a los trenes cuyos planos de oscilaciones están próximos a otra dirección, perpendicular a la primera. Como los trenes de ondas aislados no son coherentes, los rayos ordinario y

[1]) En el cristal el rayo *1* era el extraordinario y podría haberse designado con la letra *e*, y el rayo *2* era el ordinario (*o*). Al salir del cristal desaparece el motivo de que estos rayos se llamen ordinario y extraordinario.

extraordinario, y, por lo tanto, los rayos *1* y *2*, surgidos de la luz natural, tampoco son coherentes.

De otra forma se plantea la cuestión si sobre la lámina de cristal incide luz polarizada en un plano. En este caso las oscilaciones de cada tren de ondas se dividen entre los rayos ordinario y extraordinario en igual proporción (dependiente de la orientación del eje óptico de la lámina respecto del plano de oscilaciones del rayo incidente). Por eso, los rayos *o* y *e*, y, por lo tanto, los *1* y *2*, resultan ser coherentes e interfieren.

§ 138. Paso de la luz polarizada plana a través de una lámina de cristal

Sea una lámina de cristal tallada paralelamente al eje óptico. En el párrafo anterior se explicó que cuando sobre esta lámina incide luz polarizada en un plano, los rayos ordinario y extraordinario son coherentes. Al entrar en la lámina la diferencia de fase δ de estos rayos es nula, y a la salida de ella

$$\delta=\frac{\Delta}{\lambda_0}2\pi=\frac{(n_o-n_e)d}{\lambda_0}2\pi \qquad (138.1)$$

(véase (137.1) y (137.2); se supone que la luz incide sobre la lámina normalmente).

Una lámina, tallada paralelamente al eje óptico, para la cual

$$(n_o-n_e)\,d=m\lambda_0+\lambda_0/4$$

(m es cualquier número entero o cero), se llama *lámina de cuarto de onda*. Al pasar por esta lámina, los rayos ordinario y extraordinario adquieren una diferencia de fase igual a $\pi/2$ (se recordará que la diferencia de fase se determina con una exactitud de hasta $2\pi m$). Una lámina para la cual

$$(n_o-n_e)\,d=m\lambda_0+\lambda_0/2,$$

se llama *lámina de media onda*, y así sucesivamente.

Consideremos el paso de la luz polarizada en un plano a través de una lámina de media onda. La oscilación de $\mathbf{E}$ en el rayo incidente, que se realiza en el plano P, excita al entrar en el cristal la oscilación de $\mathbf{E}_o$ en el rayo ordinario y de $\mathbf{E}_e$ en el rayo extraordinario (fig. 138.1). En el tiempo que dura el paso por la lámina, la diferencia de fase entre las oscilaciones de $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{E}_e$ cambia en π. Por eso, a la salida de la lámina, la relación de fase entre los rayos orinario y extraordinario corresponderá a la disposición mutua de los vectores $\mathbf{E}_e$ y $\mathbf{E}'_o$ (al entrar en la lámina correspondía a la disposición de los vectores $\mathbf{E}_e$ y $\mathbf{E}_o$). Por consiguiente, la luz que sale de la lámina estará polarizada en el plano P'. Los planos P y P' están situados simétricamente respecto del eje óptico O de la lámina. Por

lo tanto, la lámina de media onda hace girar un ángulo igual a 2φ el plano de oscilaciones de la luz que pasa por ella (φ es el ángulo entre el plano de oscilaciones del rayo incidente y el eje de la lámina).

Ahora hagamos pasar la luz polarizada por una lámina de cuarto de onda (fig. 138.2). Si la lámina se dispone de forma que el ángulo φ entre el plano de oscilaciones P del rayo incidente y el eje O de la lámina sea igual a 45°, las amplitudes de los dos rayos que salen de la lámina serán iguales (se supone que no existe dicroismo). El desfasaje entre las oscilaciones de estos rayos es de $\pi/2$. Por consiguiente, la luz que sale de la lámina estará polarizada circularmente. Si el valor de φ es otro, las amplitudes de los rayos que salen de la lámina

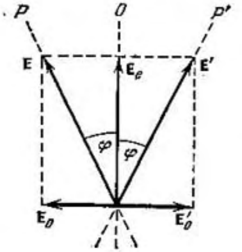


Fig. 138.1.

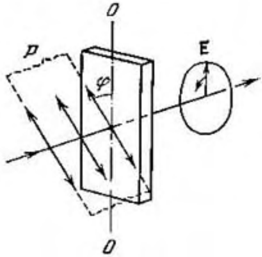


Fig. 138.2.

no serán iguales. Por eso, al superponerse estos rayos forman una luz polarizada según una elipse, uno de cuyos ejes coincide con el eje O de la lámina.

Si se hace pasar luz planopolarizada a través de una lámina de número fraccionario de ondas que no coincida con $m + 1/_4$ ó $m + 1/_2$, de ella emergerán dos ondas luminosas coherentes, polarizadas en planos perpendiculares entre sí, cuya diferencia de fase será distinta de $\pi/2$ y de π. Por lo tanto, cualquiera que sea la relación de las amplitudes de estas ondas, dependientes del ángulo φ (véase la fig. 138.2), a la salida de la lámina se obtiene luz polarizada elípticamente, y ninguno de los ejes de la elipse coincidirá con el eje O de la lámina. La orientación de los ejes de la elipse respecto del eje O se determina por la diferencia de fase δ y también por la relación de las amplitudes, es decir, por el ángulo φ entre el plano de oscilaciones de la onda incidente y el eje O de la lámina.

Advertimos que, independientemente del espesor de la lámina, si φ es igual a cero o a $\pi/2$, en la lámina sólo se propaga un rayo (en el primer caso será el extraordinario y en el segundo, el ordinario), de manera que al emerger de la lámina, la luz sigue siendo planopolarizada y su plano de oscilaciones coincide con P.

Si en el camino de una luz elípticamente polarizada se interpone una lámina de cuarto de onda, de tal modo que su eje óptico se encuentre a lo largo de uno de los ejes de la elipse, la lámina aportará una diferencia de fase adicional igual a $\pi/2$. Como resultado, la diferencia de fase de las dos ondas planopolarizadas cuya suma da la onda elípticamente polarizada, se hace igual a cero o a π, de forma que la superposición de estas ondas da una onda polarizada en un plano. Por consiguiente, la lámina de cuarto de onda, convenientemente girada, transforma la luz polarizada elíptica en luz polarizada plana. En esto se basa el método con el cual se puede distinguir la luz polarizada elípticamente de la polarizada parcialmente, o la luz polarizada circular de la natural. Para esto la luz que se analiza se hace pasar por una lámina de cuarto de onda y por un polarizador situado detrás de ella. Si el rayo que se estudia está elípticamente polarizado (o polarizado circularmente), girando la lámina y el polarizador alrededor de la dirección del rayo se logra oscurecer totalmente el campo visual. En cambio, si la luz está parcialmente polarizada (o es natural), en ninguna posición de la lámina y del polarizador es posible obtener la absorción del rayo que se investiga.

§ 139. Lámina de cristal entre dos polarizadores

Entre los polarizadores[1]) P y P' coloquemos una lámina de cristal uniáxico tallado paralelamente a su eje óptico O (fig. 139.1). Del polarizador P sale luz polarizada plana de intensidad I. Pasando por la lámina, esta luz, en el caso general, se polariza elípticamente. Y

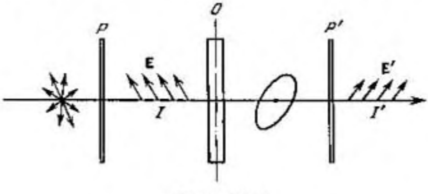


Fig. 139.1.

cuando emerge del polarizador P' vuelve a ser polarizada plana. Su intensidad I' depende de la orientación mutua de los planos de los polarizadores P y P' y el eje óptico de la lámina, así como de la diferencia de fase δ que adquieren los rayos ordinario y extraordinario al pasar por la lámina.

[1]) El segundo polarizador P' en el sentido de la marcha del rayo, se llama también *analizador*.

Supongamos que el ángulo φ entre el plano del polarizador P y el eje O de la lámina es igual a $\pi/4$. Conviene considerar dos casos particulares: primero, los polarizadores son paralelos (fig. 139.2, *a*); segundo, los polarizadores están cruzados (fig. 139.2, *b*). La oscilación luminosa que sale del polarizador P, se representa por el vector $\mathbf{E}$, que se encuentra en el plano P. Al entrar en la lámina, la oscilación $\mathbf{E}$ excita dos oscilaciones: la $\mathbf{E}_o$, perpendicular al eje óptico (rayo ordinario), y la $\mathbf{E}_e$, paralela a dicho eje (rayo extraordinario). Estas oscilaciones son coherentes y al pasar por la lámina adquieren una diferencia de fase δ que depende del espesor de la lámina y de

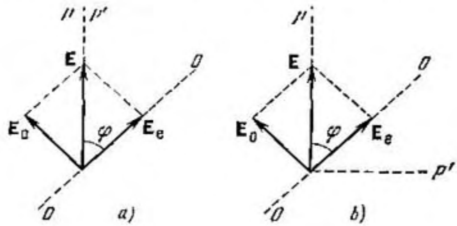


Fig. 139.2.

la diferencia entre los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario. Las amplitudes de estas oscilaciones son iguales entre sí y a $E/\sqrt{2}$:

$$E_0 = E_e = E\cos\frac{\pi}{4} = E/\sqrt{2}, \tag{139.1}$$

donde E es la amplitud de la onda que emerge del primer polarizador.

A través del segundo polarizador pasan las componentes de las oscilaciones $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{E}_e$ en dirección al plano P'. Las amplitudes de estas componentes son en ambos casos iguales a las amplitudes (139.1) multiplicadas por $\cos(\pi/4)$, es decir,

$$E'_o = E_e = E/2. \tag{139.2}$$

En el caso de los polarizadores paralelos (fig. 139.2, *a*) la diferencia de fase de las ondas que salen del polarizador P' es igual a δ, es decir, a la diferencia de fase adquirida al pasar por la lámina. En el caso de los polarizadores cruzados (fig. 139.2, *b*) las proyecciones de los vectores $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{E}_e$ sobre la dirección de P' tienen signos distintos. Esto significa que además de la diferencia de fase δ aparece una diferencia de fase adicional igual a π.

Las ondas emergidas del segundo polarizador interferirán. La amplitud $E_{\parallel}$ de la onda resultante, en el caso de los polarizadores

paralelos, se determina por la relación

$$E_{\parallel}^2 = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E_0'E_e' \cos\delta,$$

y en el caso de los polarizadores cruzados, por la relación

1248 $$E_{\perp} = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E_0'E_e' \cos(\delta + \pi).$$

Teniendo en cuenta (139.2), se puede escribir que

$$R_{\parallel}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos\delta = \frac{1}{2}E^2(1+\cos\delta) = E^2\cos^2\frac{\delta}{2},$$

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos(\delta+\pi) = \frac{1}{2}E^2(1-\cos\delta) = E^2\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}.$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por consiguiente,

$$I_{\parallel}' = I\cos^2\frac{\delta}{2}, \quad I_{\perp}' = I\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}. \tag{139.3}$$

Aquí $I_{\parallel}'$ es la intensidad de la luz que sale del segundo polarizador en el caso de los polarizadores paralelos; $I_{\perp}'$, idem, en el caso de los polarizadores cruzados, e I, la intensidad de la luz después de pasar por el primer polarizador.

De las fórmulas (139.3) se sigue que las intensidades $I_{\parallel}'$ e $I_{\perp}'$ con «complementarias», es decir, que sumadas dan la intensidad I. En particular, cuando

$$\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{139.4}$$

la intensidad $I_{\parallel}'$ será igual a I y la intensidad $I_{\perp}'$ será nula. Y para los valores

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{139.5}$$

la intensidad $I_{\parallel}'$ se anula y la $I_{\perp}'$ alcanza el valor de I.

La diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e$ depende de la longitud de onda λ_0 de la luz. Además, λ_0 figura directamente en la expresión (138.1) de δ. Vamos a suponer que la luz que incide sobre el polarizador P está constituida por una radiación con dos longitudes de onda, λ_1 y λ_2, tales que δ para λ_1 satisface la condición (139.4), y para λ_2, la condición (139.5). En este caso, si los polarizadores son paralelos, a través del sistema representado en la fig. 139.1 pasará sin dificultad la luz de longitud de onda λ_1 y será detenida totalmente la luz de longitud de onda λ_2. Y si los polarizadores están cruzados, pasará sin obstáculos la luz cuya longitud de onda es λ_2 y será detenida totalmente la de longitud de onda λ_1. Por lo tanto, con una disposición de los polarizadores, el color de la luz, después de atravesar el sistema, será el correspondiente a la longitud de onda λ_1, y con la otra disposición, el correspondiente a la longitud de onda λ_2. Estos colores se denominan *complementarios*. Si uno de los pola-

rizadores gira, el color varía continuamente, pasando cada cuarto de vuelta de un color complementario a otro. El cambio de color se observa también con φ distinto de $\pi/4$ (pero no igual a cero o a $\pi/2$), aunque en este caso los colores son menos brillantes.

La diferencia de fase δ depende del espesor de la lámina. Por eso, si la lámina birrefringente colocada entre los polarizadores tiene distinto espesor en diferentes partes, observando estas partes desde el lado del polarizador P', aparecerán con colores distintos. Al girar el polarizador P', estos colores variarán, pasando cada uno al complementario. El siguiente ejemplo servirá para esclarecer esto. En la

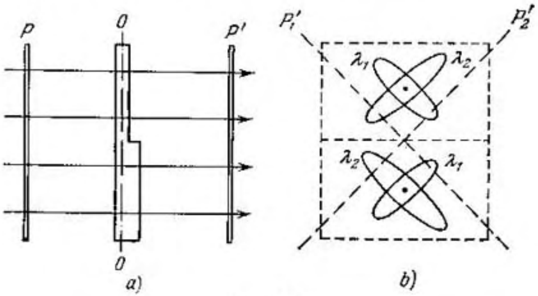


Fig. 139.3.

fig. 139.3, *a* se ha representado una lámina, cuya mitad inferior es más gruesa que la superior, colocada entre dos polarizadores. Supongamos que la luz que pasa por la lámina está constituida por una radiación que sólo tiene dos longitudes de onda: λ_1 y λ_2. En la fig. 139.3, *b* se da la «vista» desde el lado del polarizador P'. Al salir de la lámina de cristal, cada componente de la radiación estará, en general, polarizada elípticamente. La orientación y la excentricidad de las elipses será distinta para las longitudes de onda λ_1 y λ_2 y para las dos mitades de la lámina. Si el polarizador P' se coloca en la posición P'_1, en la radiación que pase a través de P' predominará la longitud de onda λ_1 en la mitad superior de la lámina, y la longitud de onda λ_2 en la mitad inferior. Por eso, estas mitades tendrán diferente color. Cuando el polarizador P' se coloca en la posición P'_2, el color de la mitad superior dependerá de la radiación cuya longitud de onda es λ_2, y el de la mitad inferior, de la que tiene la longitud de onda λ_1. De este modo, al girar 90° el polarizador P', sucede algo así como si las dos mitades intercambiaran sus colores. Está claro que esto sólo ocurrirá con una relación determinada de los espesores de ambas mitades de la lámina.

§ 140. Doble refracción artificial

En los cuerpos amorfos transparentes y en los cristales del sistema cúbico se puede observar la doble refracción bajo la influencia de acciones exteriores. En particular, esto ocurre cuando los cuerpos se deforman mecánicamente. De medida de la anisotropía óptica que se produce sirve la diferencia entre los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario. La experiencia da que esta diferencia es proporcional a la tensión σ en el punto dado del cuerpo (es decir, a la fuerza por unidad de superficie; véase el § 14 del tomo 1º):

$$n_o - n_e = k\sigma \tag{140.1}$$

(k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades de la substancia).

Coloquemos una lámina de vidrio Q entre dos polarizadores cruzados P y P' (fig. 140.1). Mientras el vidrio no se haya deformado,

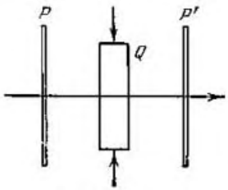


Fig. 140.1.

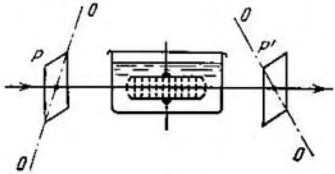


Fig. 140.2.

este sistema no dejará pasar la luz. Pero si la lámina se comprime, la luz comenzará a pasar a través del sistema y la figura que se observe en los rayos transmitidos resultará cubierta de franjas de colores. Cada una de estas franjas corresponderá a las partes de la lámina que tienen la misma deformación. Por consiguiente, la disposición de las franjas da idea de la distribución de las tensiones dentro de la lámina. En esto se basa el método óptico de investigación de las tensiones. El modelo de una pieza o estructura cualquiera, hecho de material transparente isótropo (por ejemplo, de plexiglás), se coloca entre dos polarizadores cruzados y se somete a la acción de cargas semejantes a las que debe soportar la pieza misma. La figura que se observa entonces a la luz blanca transmitida permite determinar la distribución de las tensiones y juzgar acerca de su magnitud.

La aparición de la doble refracción en los líquidos y en los sólidos amorfos sometidos a la acción de un campo eléctrico fue descubierta por J. Kerr en 1875. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto Kerr*. En 1930 este fenómeno se observó en los gases.

El esquema del dispositivo para estudiar el efecto Kerr en los líquidos se muestra en la fig. 140.2. Consiste en una *célula de Kerr* situada entre dos polarizadores P y P' cruzados. La célula de Kerr es un recipiente, herméticamente cerrado, que contiene el líquido, en el cual se han introducido las placas de un condensador. Cuando se hace llegar tensión a las placas, entre ellas surgen un campo eléctrico prácticamente homogéneo. Bajo su acción adquiere el líquido las propiedades de un cristal uniáxico cuyo eje óptico está orientado en el sentido del campo.

La diferencia que surge entre los límites de refracción n_o y n_e es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo E:

$$n_o - n_e = kE^2. \tag{140.2}$$

En el camino l se produce entre los rayos ordinario y extraordinario la diferencia d emarcha $\Delta = (n_o - n_e)\, l = klE^2$ o la diferencia de fase $\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} lE^2$.

Esta expresión suele escribirse en la forma

$$\delta = 2\pi BlE^2, \tag{140.3}$$

donde B es una magnitud característica de la substancia, llamada *constante de Kerr*.

De los líquidos conocidos. el que mayor constante de Kerr tiene es el nitrobenceno ($C_6H_5NO_2$). La constante de Kerr depende de la temperatura de la substancia y de la longitud de onda de la luz.

El efecto Kerr se explica porque la polarizabilidad de las moléculas es distinta en diferentes direcciones. En ausencia del campo las moléculas están orientadas caóticamente, por lo que el líquido en conjunto no manifiesta anisotropía. Bajo la acción del campo las moléculas giran de tal modo que en la dirección de aquél estén orientados sus momentos dipolares eléctricos (si las moléculas son polares) o las direcciones de máxima polarizabilidad (si las moléculas son neutras). Como resultado el líquido se hace ópticamente anisótropo. A la acción orientadora del campo se opone el movimiento térmico de las moléculas. Esto condiciona la disminución de la constante de Kerr cuando aumenta la temperatura.

El tiempo durante el cual se establece (al conectar el campo) o desaparece (al desconectarlo) la orientación predominante de las moléculas es aproximadamente igual a 10^{-10} s. Por eso una célula de Kerr situada entre dos polarizadores cruzados puede servir prácticamente de obturador óptico sin inercia. En ausencia de tensión en las placas del condensador, el obturador estará cerrado. Cuando se conecta la tensión, el obturador deja pasar una parte considerable de la luz que incide sobre el primer polarizador.

§ 141. Rotación del plano de polarización

Rotación natural. Algunas substancias, llamadas *ópticamente activas*, tienen la propiedad de producir una rotación del plano de polarización de la luz polarizada plana que pasa a través de ellas. A estas substancias pertenecen cuerpos cristalinos (como el cuarzo y el cinabrio), líquidos puros (esencia de trementina, nicotina) y las disoluciones de las substancias ópticamente activas en solventes no activos (soluciones acúosas de azucar, de ácido tartárico y otras).

En las substancias cristalinas la rotación del plano de polarización es máxima en el caso en que la luz se propaga a lo largo del eje óptico del cristal. El ángulo de rotación φ es proporcional al camino l recorrido por el rayo en el cristal:

$$\varphi = \alpha l. \qquad (141.1)$$

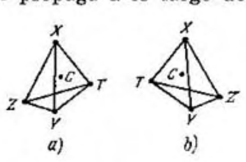


Fig. 141.1.

El coeficiente α recibe el nombre de *constante de rotación*. Esta constante depende de la longitud de la onda (dispersión de la capacidad de rotación).

En las disoluciones el ángulo de rotación del plano de polarización es proporcional al camino l recorrido por la luz en ellas y a la concentración de substancia activa c:

$$\varphi = [\alpha]\, cl. \qquad (141.2)$$

Aquí $[\alpha]$ es una magnitud llamada *constante de rotación específica*.

En dependencia del sentido en que gire el plano de polarización, las substancias ópticamente activas se dividen en *dextrógiras* y *levógiras*. El sentido de la rotación (respecto del rayo) no depende del sentido de éste. Por eso, si un rayo, que haya atravesado el cristal ópticamente activo pasando a lo largo de su eje óptico, se refleja en un espejo y se hace que vuelva a pasar por el cristal en sentido contrario, la posición inicial del plano de polarización se restablece.

De todas las substancias ópticamente activas existen dos variedades: la dextrógira y la levógira. Así, hay cuarzo dextrógiro y levógiro, azúcar dextrógira y levógira, y así sucesivamente. Las moléculas o cristales de una variedad son como la imagen especular de las moléculas o cristales de la otra variedad (fig. 141.1). Las letras C, X, Y, Z y T designan átomos o agrupaciones atómicas (radicales) que se diferencian entre sí. La molécula b es como la imagen especular de la molécula a. Si el tetraedro representado en la fig. 141.1 se mira a lo largo de la dirección CX, recorriendo el perímetro de su base en el sentido de las agujas del reloj se tiene la sucesión $ZYTZ$, en la molécula a, y la sucesión $ZTYZ$, en la molécula b. Esto mismo se observa cualquiera que sea la dirección CY, CZ o CT que se tome. La sucesión de los radicales X, Y, Z y T en la

molécula b es inversa a su sucesión en la molécula a. Por esta razón, si, por ejemplo, la substancia formada por moléculas a es dextrógira, la substancia constituida por moléculas b será levógira.

Si entre dos polarizadores cruzados se coloca una substancia activa (un cristal de cuerzo o una cubeta transparente con disolución de azúcar, por ejemplo), el campo visual se ilumina. Para restablecer la oscuridad hay que hacer que uno de los polarizadores gire el ángulo φ, determinado por la expresión (141.1) o (141.2). Si se trata de una disolución, conociendo la constante de rotación específica $[\alpha]$ de la substancia y la longitud l, se puede, después de medir el ángulo de rotación φ, determinar por la fórmula (141.2) la concentración c de la solución. Este procedimiento para determinar la concentración se utiliza en la industria productora de distintas substancias, en particular en la de fabricación de azúcar (el aparato que se emplea en este caso se llama sacarímetro).

Rotación magnética del plano de polarización. Las substancias ópticamente inactivas adquieren la propiedad de hacer girar el plano de polarización si se someten a la acción de un campo magnético. Este fenómeno fue descubierto por M. Faraday y en su honor se le da a veces el nombre de *efecto Faraday*. Dicho efecto sólo se observa cuando la luz se propaga a lo largo de la dirección de la imanación. Por eso, para observar el efecto Faraday, en las piezas polares del electroimán se perforan orificios a través de los cuales se hace pasar el rayo luminoso. La substancia que se analiza se coloca entre los polos de dicho electroimán.

El ángulo de rotación φ del plano de polarización es proporcional al camino l que recorre la luz por la substancia y a la imanación de esta última. La imanación, a su vez, es proporcional a la intensidad del campo magnético H (véase la fórmula (52.11)). Por lo tanto, se puede escribir que

$$\varphi = VlH. \tag{141.3}$$

El coeficiente V se denomina *constante de Verdet* o *rotación magnética específica*. La constante V, lo mismo que la constante de rotación α, depende de la longitud de la onda.

El sentido de giro está determinado por la dirección del campo magnético. El signo de este giro no depende del sentido del rayo. Por consiguiente, si este último se refleja en un espejo y se obliga a volver a pasar en sentido inverso por la substancia imanada, el giro del plano de polarización no se duplica.

La rotación magnética del plano de polarización se debe a la precesión de las órbitas electrónicas que se produce bajo la acción del campo magnético (véase el § 57).

Las substancias ópticamente activas sometidas a la acción de un campo magnético adquieren una capacidad adicional de rotación del plano de polarización, la cual se suma a su capacidad natural.

CAPÍTULO XX

INTERACCIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON LA SUBSTANCIA

§ 142. Dispersión de la luz

Se llama *dispersión de la luz* el fenómeno debido a la dependencia del índice de refracción de la substancia respecto de la longitud de la onda luminosa. Esta dependencia se puede caracterizar por la función

$$n = f(\lambda_0), \tag{142.1}$$

en la que λ_0 es la longitud de la onda luminosa en el vacío.

La dispersión por la substancia es la derivada de n respecto de λ_0.

Para todas las substancias incoloras transparentes la función (142.1) tiene en la parte visible del espectro el carácter que se muestra en la fig. 142.1. Con la disminución de la longitud de onda, el índice de refracción aumenta cada vez más rápidamente, de manera que la dispersión por la substancia $dn/d\lambda_0$ es negativa y su módulo crece al disminuir λ_0.



Fig. 141.2.

Si la substancia absorbe parte de los rayos, en la región de la absorción y cerca de ella la marcha de la dispersión pone de manifiesto una anomalía (véase la fig. 144.2). En cierto tramo de la curva la dispersión por la substancia $dn/d\lambda_0$ resulta positiva. Esta marcha de la dependencia de n respecto de λ_0 se llama *dispersión anómala*.

Los medios que poseen la propiedad de dispersar reciben el nombre *de dispersores*. En los medios dispersores la velocidad de las ondas luminosas depende de la longitud de onda λ_0 o de la frecuencia ω.

§ 143. Velocidad de grupo

En rigor, una onda monocromática de la forma

$$E = A \cos(\omega t - kx + \alpha) \tag{143.1}$$

es una sucesión infinita en el tiempo y en el espacio de «crestas» y «valles» que se desplazan a lo largo del eje x con la velocidad de fase

$$v = \omega/k. \tag{143.2}$$

(véase la fórmula (94.7)). Valiéndose de esta onda es imposible transmitir una señal, ya que cada «cresta» posterior en nada se distingue de la anterior. Para transmitir una señal hay que «marcar» la onda,

por ejemplo, interrumpiéndola durante cierto tiempo Δt. Pero en este caso la onda no vendrá ya descrita por la ecuación (143.1).

Lo más fácil es transmitir la señal por medio de un impulso luminoso (fig. 143.1). Según el teorema de Fourier, este impulso se puede representar como una superposición de ondas de la forma (143.1) cuyas frecuencias estén comprendidas en cierto intervalo $\Delta\omega$. Una superposición de ondas cuyas frecuencias se diferencian poco entre sí, se llama *paquete* o *grupo de ondas*. La expresión analítica de un grupo de ondas tiene la forma

$$E(x, t) = \int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega)\, d\omega \qquad (143.3)$$

(el subíndice ω de A, k y α indica que estas magnitudes son diferentes para distintas frecuencias). Si se fija t, la gráfica de la función

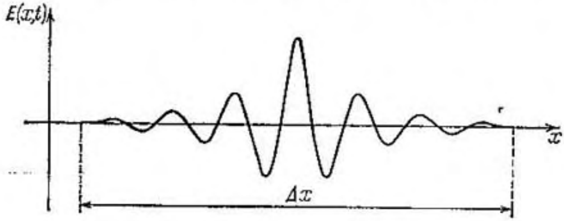


Fig. 143.1.

(143.3) tiene la forma que se muestra en la fig. 143.1. Cuando t varía, la gráfica se desplaza a lo largo del eje x. Dentro de los límites de un paquete, las ondas planas se refuerzan entre sí en mayor o menor grado, fuera del paquete se extinguen prácticamente unas a otras totalmente.

El cálculo correspondiente da, que cuanto menor sea la anchura Δx del paquete, tanto mayor será el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ o, respectivamente, será mayor el intervalo de números de onda Δk que se requiera para definir dicho paquete por medio de la expresión (143.3). Tiene lugar la relación

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi. \qquad (143.4)$$

Subrayamos que para que la superposición de ondas definida por la expresión (143.3) se pueda considerar un grupo de ondas es necesario que se cumpla la condición $\Delta\omega \ll \omega_0$.

En un medio no dispersor todas las ondas planas que forman un paquete se propagan con la misma velocidad de fase v. Es evidente que, en este caso, la velocidad de movimiento del paquete coincide

con v y la forma del paquete no varía con el tiempo. Se puede demostrar que en un medio dispersor el paquete se esparce, es decir, su anchura aumenta. Si la dispersión no es grande, la expansión del paquete no será demasiado rápida. En este caso a dicho paquete se la puede atribuir la velocidad u, entendiéndose por ella la velocidad con la cual se traslada el centro de paquete, o sea, el punto en el cual el valor de E es máximo. Esta velocidad se denomina *velocidad de grupo*. En un medio dispersor la velocidad de grupo u es distinta de la velocidad de fase v (se tiene en cuenta la velocidad de fase de la componente armónica de mayor amplitud, o en otros términos, la velocidad de fase de la frecuencia dominante). A continuación se

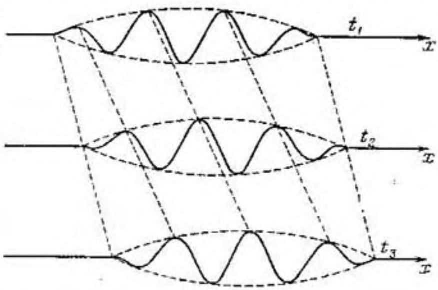


Fig. 143.2.

demostrará que cuando $dn/d\lambda_0 < 0$, la velocidad de grupo es menor que la de fase $(u < v)$, y cuando $dn/d\lambda_0 > 0$, la velocidad de grupo es mayor que la de fase $(u > v)$.

En la fig. 143.2 se dan las «fotografías» de un paquete de ondas en tres instantes sucesivos t_1, t_2 y t_3. Este dibujo se ha hecho para el caso en que $u < v$. En la figura se ve que, al mismo tiempo que avanza el paquete, se mueven las «crestas» y los «valles» dentro de él, engendrándose continuamente en su límite izquierdo nuevas «crestas» que, después de recorrer el paquete, desaparecen por su límite derecho. Como resultado, mientras que el paquete en conjunto se desplaza con la velocidad u, algunas «crestas» y «valles» lo hacen con la velocidad v.

En el caso en que $u > v$, el sentido en que se desplaza el paquete es opuesto al del movimiento de las «crestas» dentro de él.

Aclaremos esto con el ejemplo de la superposición de dos ondas planas de igual amplitud y distintas λ. En la fig. 143.3 se da la «fotografía instantánea» de estas ondas. Una de ellas se representa con línea continua y la otra, con línea de trazos. La intensidad es

máxima en el punto A, en el cual coinciden las fases de las dos ondas en un instante dado. En los puntos B y C ambas ondas están en oposición de fase, por lo que la intensidad de la onda resultante es nula. Supongamos que las dos ondas se propagan de izquierda a derecha y que la velocidad de la onda «continua» es menor que la de la onda «de trazos» (en este caso será $dv/d\lambda > 0$, y, por lo tanto, $dn/d\lambda < 0$). Entonces el punto en que estas ondas se refuerzan una a otra se desplazará con el tiempo hacia la izquierda, con relación a las ondas. Como resultado, la velocidad de grupo será menor que la de fase. Si la velocidad de la onda «continua» es mayor que la «de



Fig. 143.3.

trazos» (es decir, $dn/d\lambda > 0$), el punto en que se produce el reforzamiento de las ondas se desplazará hacia la derecha, de manera que la velocidad de grupo será mayor que la de fase.

Escribamos las ecuaciones de las ondas suponiendo, para simplificar las fórmulas, que las fases iniciales son iguales a cero:

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega) t - (k + \Delta k) x].$$

Aquí $k = \omega/v_1$, y $(k + \Delta k) = (\omega + \Delta\omega)/v_2$. Sea $\Delta\omega \ll \omega$ y, respectivamente, $\Delta k \ll k$. Entonces, sumando las oscilaciones y haciendo transformaciones de acuerdo con la fórmula de la suma de cosenos, se obtiene

$$E = E_1 + E_2 = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)\right] \cos(\omega t - kx) \quad (143.5)$$

(en el segundo factor se ha despreciado $\Delta\omega$ en comparación con ω y Δk en comparación con k).

El factor que figura entre corchetes varía con x y t mucho más lentamente que el segundo factor. Por eso la expresión (143.5) se puede considerar como la ecuación de una onda plana cuya amplitud varía según la ley[1])

$$\text{Amplitud} = \left|2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)\right|.$$

[1]) Compárese con las fórmulas (56.1) y (56.2) del tomo 1º. La dependencia de la función (143.5) respecto de x cuando t se fija, se representa por una curva análoga a la curva de la fig. 56.1, a del tomo 1º.

En este caso tenemos una serie de máximos de amplitud iguales, que se determinan por la condición

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_{\text{máx}} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (143.6)$$

Cada uno de estos máximos se puede considerar como centro del grupo de ondas correspondiente.

Despejando $x_{\text{máx}}$ en (143.6), obtenemos

$$x_{\text{máx}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \text{const}.$$

De aquí se sigue que los máximos se trasladan con la velocidad

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \qquad (143.7)$$

La expresión obtenida es la de la velocidad de grupo para el caso en que el grupo está formado por dos componentes.

Hallemos la velocidad con que se traslada el centro del grupo de ondas descrito por la expresión (143.3). Pasando de los cosenos a los exponentes, obtenemos

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp\left[i(\omega t - k_\omega x)\right] d\omega \qquad (143.8)$$

($\hat{A}_\omega = A_\omega e^{i\alpha_\omega}$ es la amplitud compleja).

Desarrollamos la función $k_\omega = k(\omega)$ en serie en el entorno de ω_0:

$$k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \ldots \qquad (143.9)$$

Aquí $k_0 = k(\omega)_0$, y $(dk/d\omega)_0$ es el valor de la derivada en el punto ω_0.

Pasamos a la variable $\xi = \omega - \omega_0$. Entonces $\omega = \omega_0 + \xi$, y $d\omega = d\xi$. Haciendo esta sustitución en (143.8) y poniendo en vez de k_ω su valor (143.9), se puede escribir que

$$E(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \qquad (143.10)$$

Hemos llegado a la ecuación de una onda plana de frecuencia ω_0, número de onda k_0 y amplitud compleja

$$\hat{A}(x, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \qquad (143.11)$$

De (143.11) se deduce que la ecuación

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x = \text{const} \qquad (143.12)$$

relaciona el tiempo t y la coordenada x del plano en el cual la amplitud compleja tiene el valor fijo dado y, en particular, también un valor con el cual el módulo de la amplitud compleja, o sea, la amplitud ordinaria $A(x, t)$, alcanza un máximo.

Tomando en consideración que $1/(dk/d\omega)_0 = (d\omega/dk)_0$, representamos (143.12) en la forma

$$x_{\text{máx}} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - \text{const}' \left(\text{const} = \frac{\text{const}}{(dk/d\omega)_0}\right). \qquad (143.13)$$

De (143.13) se deduce que el punto en el cual la amplitud del grupo de ondas es máxima, se traslada con la velocidad $(d\omega : dk)_0$. De este modo llegamos a la expresión siguiente de la velocidad de grupo:

$$u = \frac{d\omega}{dk} \qquad (143.14)$$

(el subíndice 0 se ha omitido por innecesario). Con anterioridad se obtuvo una expresión análoga (véase (143.7)) para un grupo de dos ondas.

Se recordará que en el desarrollo (143.9) se despreciaron los términos de altos grados de pequeñez. En esta aproximación la forma del paquete de ondas no varía con el tiempo. Si se tienen en cuenta los términos siguientes del desarrollo, se obtiene una expresión de la amplitud de la cual se sigue que la anchura del paquete crece con el tiempo, o sea, el paquete de ondas se extiende.

A la expresión de la velocidad de grupo se le puede dar otra forma. Sustituyendo ω por vk (véase (143.2)), representamos (143.14) del modo siguiente:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}. \qquad (143.15)$$

Después escribimos

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}.$$

De la relación $\lambda = 2\pi/k$ se infiere que $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Respectivamente, $dv/dk = -(dv/d\lambda)(\lambda/k)$. Sustituyendo este valor en (143.15), obtenemos

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (143.16)$$

Por esta fórmula se ve que, en dependencia del signo de $dv/d\lambda$, la velocidad de grupo u puede ser menor o mayor que la velocidad de fase v. En ausencia de dispersión $dv/d\lambda = 0$ y la velocidad de grupo coincide con la de fase.

El máximo de intensidad corresponde al centro del grupo de ondas. Por eso, en aquellos casos en que el concepto de velocidad de grupo tiene sentido, la velocidad de transporte de energía por la onda es igual a la velocidad de grupo.

El concepto de velocidad de grupo sólo es aplicable a condición de que la absorción de la energía de la onda por el medio dado sea pequeña. Si el amortiguamiento de las ondas es considerable, el concepto de velocidad de grupo pierde su sentido. Esto ocurre en la región de la dispersión anómala. En esta región la absorción es muy grande y, por lo tanto, el concepto de velocidad de grupo es inaplicable.

§ 144. Teoría elemental de la dispersión

La dispersión de la luz se puede explicar basándose en la teoría electromagnética y en la teoría electrónica de la substancia. Para esto hay que estudiar el proceso de la interacción de la luz con la substancia. El movimiento de los electrones en el átomo se subordina a las leyes de la mecánica cuántica. En particular, el concepto de trayectoria del electrón en el átomo pierde todo sentido. No obstante, como demostró H. A. Lorentz, para comprender cualitativamente muchos fenómenos ópticos basta limitarse a la hipótesis de la existencia de los electrones ligados casi elásticamente dentro de los átomos. Si estos electrones se sacan de sus posiciones de equilibrio, comienzan a oscilar y pierden paulatinamente la energía de oscilación en la radiación de ondas electromagnéticas. Como resultado, las oscilaciones se amortiguan. El amortiguamiento se puede tener en cuenta introduciendo la «fuerza de rozamiento de radiación», proporcional a la velocidad.

Cuando a través de una substancia pasan ondas electromagnéticas, cada electrón se encuentra sometido a la acción de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{vB}] = -e\mathbf{E} - e\mu_0[\mathbf{vH}] \qquad (144.1)$$

(véase la fórmula (43.5)); la carga del electrón es igual a $-e$). Según (105.13), la relación entre las intensidades de los campos magnético y eléctrico en una onda es $H/E = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$. Por consiguiente, para la relación entre las fuerzas magnética y eléctrica que actúan sobre un electrón se obtiene de (144.1) el valor

$$\frac{\mu_0 vH}{E} = \mu_0 v\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = v\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{v}{c}.$$

Incluso si la amplitud de las oscilaciones del electrón a alcanzara un valor del orden de 1 Å (10^{-10} m), o sea, del orden de las dimensiones del átomo, la amplitud de la velocidad del electrón $a\omega$ será igual aproximadamente a $10^{-10}\cdot 3\cdot 10^{15} = 3\cdot 10^{5}$ m/s (según (110.6), $\omega = 2\pi\nu$ es igual, aproximadamente, a $3\cdot 10^{15}$ s^{-1}). De este modo, la relación v/c es notoriamente menor que 10^{-3}, por lo que en (144.1) se puede despreciar el segundo sumando.

Así, se puede considerar que, al pasar a través de la substancia una onda electromagnética, cada electrón se encuentra sometido a la acción de la fuerza

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(α es una magnitud determinada por las coordenadas del electrón dado, y E_0, la amplitud de la intensidad del campo eléctrico de la onda).

Para simplificar los cálculos, al principio vamos a prescindir del amortiguamiento debido a la radiación. Más adelante tendremos en cuenta este amortiguamiento introduciendo en las fórmulas obtenidas las correcciones pertinentes. La ecuación del movimiento del electrón tiene la forma

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -(e/m) E_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(véase la fórmula (50.13) del tomo 1º; ω_0 es la frecuencia propia de las oscilaciones del electrón). Al segundo miembro de esta ecuación le añadimos el sumando $-i(e/m) E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ y, de este modo, pasamos a las funciones complejas $\hat{E}$ y $\hat{r}$:

$$\ddot{\hat{r}} + \omega_0^2 \hat{r} = -(e/m) \hat{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{144.2}$$

Aquí $\hat{E}_0 = E_0 e^{i\alpha}$ es la amplitud complela del campo eléctrico de la onda.

Vamos a buscar la solución de la ecuación en la forma $\hat{r} = \hat{r}_0 e^{i\omega t}$ en la que $\hat{r}_0$ es la amplitud compleja de las oscilaciones del electrón. Respectivamente, $\ddot{\hat{r}} = -\omega^2 \hat{r}_0 e^{i\omega t}$. La sustitución de estas expresiones en la ecuación (144.2) conduce, después de simplificar por el factor común $e^{i\omega t}$, a la relación

$$-\omega^2 \hat{r}_0 + \omega_0^2 \hat{r}_0 = -(e/m) \hat{E}_0.$$

De donde

$$\hat{r}_0 = \frac{(-e/m)\hat{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Le multiplicación del resultado obtenido por $e^{i\omega t}$, da que

$$\hat{r}(t) = \frac{-(e/m)\hat{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Finalmente, tomando las partes reales de las funciones complejas $\hat{r}$ y $\hat{E}$, hallamos r como función de t:

$$r(t) = \frac{-(e/m)E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{144.3}$$

Para simplificar el problema vamos a suponer que las moléculas no son polares. Además, como la masa de los núcleos es grande en comparación con la del electrón, despreciaremos los desplazamientos de los núcleos de sus posiciones de equilibrio bajo la acción del campo de la onda. En esta aproximación el momento dipolar eléctrico de la molécula se puede representar en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k [\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{r}_k(t)] = \\ &= \left\{\sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k \mathbf{r}_{0k}\right\} + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \\ &= \mathbf{p}_0 + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t),\end{aligned}$$

donde q_l y $\mathbf{R}_{0l}$ son, respectivamente, las cargas y los radios vectores de las posiciones de equilibrio de los núcleos; e_k y $\mathbf{r}_{0k}$, la carga y el radio vector de la posición de equilibrio del k-ésimo electrón; $\mathbf{r}_k(t)$, el desplazamiento del k-ésimo electrón de su posición de equilibrio bajo la acción del campo de la onda, y $\mathbf{p}_0$, el momento dipolar de la molécula en ausencia del campo, el cual, por suposición, es nulo. Todas las $\mathbf{r}_k(t)$ son colineares de $\mathbf{E}(t)$. Por eso, para la proyección de $\mathbf{p}(t)$ sobre la dirección de $\mathbf{E}(t)$ se obtiene la expresión

$$p(t) = \sum_k e_k r_k(t) = \sum_k (-e)\, r_k(t)$$

(hemos tenido en cuenta que las e_k de todos los electrones son iguales entre sí y a $-e$). Sustituyamos aquí el valor de $r(t)$ (144.3), tomando en consideración que las frecuencias propias ω_{0k} de los electrones que entran en la composición de la molécula no son iguales. Como resultado obtenemos

$$p(t) = \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} E(t). \qquad (144.4)$$

Designamos por N el número de moléculas que hay en la unidad de volumen. El producto $Np(t)$ da la polarización de la substancia $P(t)$. Según las fórmulas (19.5) y (16.2), la permitividad

$$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P(t)}{\varepsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \frac{p(t)}{E(t)}.$$

Sustituyendo aquí el valor de la relación $p(t)/E(t)$ que se obtiene de (144.4), y ε por n^2 (véase (110.3)), llegamos a la fórmula

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \qquad (144.5)$$

Si las frecuencias ω difieren sensiblemente de todas las frecuencias propias ω_{0k}, la suma que figura en la fórmula (144.5) será pe-

queña en comparación con la unidad, por lo que $n^2 \approx 1$. En las proximidades de cada una de las frecuencias propias, la función (144.5) sufre una discontinuidad: cuando ω tiende a ω_{0k} por la izquierda, se transforma en $+\infty$, y cuando tiende por la derecha, en $-\infty$ (véanse las curvas en línea de trazos de la fig. 144.1). Este comportamiento de la función (144.5) se debe a que hemos despreciado el rozamiento de radiación (recordamos que si se desprecia el rozamiento, la amplitud de las oscilaciones forzadas se hace infinita con la resonancia; véase la fórmula (60.18) del tomo 1°). La

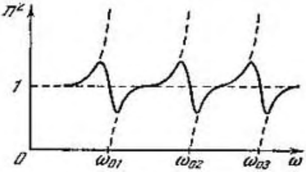


Fig. 144.1.

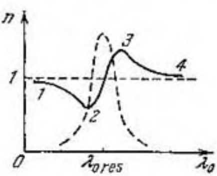


Fig. 144.2.

toma en consideración del rozamiento de radiación conduce a la dependencia de n^2 respecto de ω que muestra la curva de línea continua de la fig. 144.1.

Pasando de n^2 a n y de ω a λ_0, obtenemos la curva representada en la fig. 144.2 (en ella sólo se da un tramo de curva en la región de una de las longitudes de onda de resonancia). La curva de trazos representa en esta figura la marcha del coeficiente de absorción de la luz por la substancia (véase el párrafo siguiente). El trozo *3—4* es análogo a la curva dada en la fig. 142.1. Los trozos *1—2* y *3—4* corresponden a la dispersión normal ($dn/d\lambda_0 < 0$). En el trozo *2—3* la dispersión es anómala ($dn/d\lambda_0 > 0$).

En la región *1—2* el índice de refracción es menor que la unidad, por consiguiente, la velocidad de fase de la onda es mayor que c. Esta circunstancia no contradice la teoría de la relatividad, basada en la afirmación de que la velocidad de transmisión de una señal no puede ser mayor que c. En el párrafo anterior se explicó que es imposible transmitir una señal por medio de una onda monocromática ideal. La transmisión de la energía (o sea, de la señal) mediante una onda no totalmente monocromática (por un grupo de ondas) se efectúa con una velocidad igual a la de grupo, determinada por la fórmula (143.16). En la región de la dispersión normal $dv/d\lambda > 0$ (dn y dv tienen signos distintos, mientras que $dn/d\lambda < 0$), de manera que, aunque $v > c$, la velocidad de grupo es menor que c. En la región de la dispersión anómala, el concepto de velocidad de grupo pierde su sentido (la absorción es muy grande). Por eso, el valor de

u calculado por la fórmula (143.6) no caracteriza la velocidad de transmisión de la energía. El cálculo correspondiente da que también en esta región la velocidad de transmisión de la energía es menor que c.

§ 145. Absorción de la luz

Cuando una onda luminosa pasa a través de una substancia, parte de su energía se gasta en excitar las oscilaciones de los electrones. Una parte de esta energía vuelve a la radición en forma de ondas secundarias generadas por los electrones; pero otra parte se transforma en energía del movimiento de los átomos, es decir, en energía interna de la substancia. Por eso la intensidad de la luz disminuye al pasar la substancia, o sea, la luz es absorbida por dicha substancia. Las oscilaciones forzadas de los electrones y, por lo tanto, la absorción de la luz se hace particularmente intensa con la frecuencia de resonancia (véase la curva de resonancia que con línea de trazos se representa en la fig. 144.2).

La experiencia demuestra que la intensidad de la luz al pasar a través de una substancia disminuye según una ley exponencial:

$$I = I_0 e^{-\varkappa l}. \tag{145.1}$$

Aquí I_0 es la intensidad de la luz a la entrada en la capa absorbente (en el límite o en un punto determinado dentro de la substancia); l, el espesor de la capa, y $\varkappa$, una constante, que depende de las propiedades de la substancia absorbente, llamada *coeficiente de absorción*. La relación (145.1) se conoce con el nombre de *ley de Bouguer*.

Tomando la diferencial de la relación (145.1), obtenemos

$$dI = -\varkappa I_0 e^{-\varkappa l} dl = -\varkappa I\, dl. \tag{145.2}$$

De esta expresión se sigue que la pérdida de intensidad en el camino dl es proporcional a su longitud y al valor de la intensidad misma. De coeficiente de proporcionalidad sirve el coeficiente de absorción.

De la fórmula (145.1) se infiere que cuando $l = 1/\varkappa$, la intensidad I es e veces menor que I_0. De este modo, el coeficiente de absorción es la magnitud recíproca del espesor de una capa al atravesar la cual la intensidad de la luz disminuye e veces.

El coeficiente de absorción depende de la longitud de onda λ de la luz (o de la frecuencia ω). En una substancia cuyos átomos (o moléculas) no influyan unos sobre otros (gases o vapores de metales a presión moderada), el coeficiente de absorción para la mayoría de las longitudes de onda es próximo a cero, y sólo para regiones espectrales muy estrechas (de varias centésimas de angström de anchura) pone de manifiesto máximos bruscos (fig. 145.1). Estos máximos corresponden a las frecuencias de resonancia de los electrones dentro de los átomos. En el caso de moléculas poliatómicas también se

manifiestan las frecuencias correspondientes a las oscilaciones de los átomos dentro de ellas. Como la masa de los átomos es decenas de millares de veces mayor que la masa del electrón, las frecuencias moleculares son mucho menores que las atómicas y se encuentran en la región infrarroja del espectro.

Los gases a altas presiones, los líquidos y los sólidos dan bandas de absorción anchas (fig. 145.2). A medida que aumenta la presión de los gases, los máximos de absorción, que al principio eran muy estrechos (véase la fig. 145.1), se ensanchan cada vez más, y a altas



Fig. 145.1.



Fig. 145.2.

presiones el espectro de absorción de los gases se aproxima a los espectros de absorción de los líquidos. Este hecho indica que el ensanchamiento de las bandas de absorción es resultado de la interacción de los átomos entre sí.

Los metales son prácticamente opacos a la luz (su coeficiente $\varkappa$ tiene un valor del orden de 10^6 m^{-1}; para que pueda compararse, diremos que, para el vidrio, $\varkappa \approx 1$ m^{-1}). Esto se debe a la existencia de los electrones libres en los metales. Bajo la acción del campo eléctrico de la onda luminosa, los electrones se ponen en movimiento y en el metal se producen corrientes rápidamente variables acompañadas de desprendimiento de calor de Lenz-Joule. Como resultado, la energía de la onda luminosa disminuye rápidamente, transformándose en energía interna del metal.

§ 146. Difusión de la luz

Desde el punto de vista clásico, el proceso de la difusión de la luz consiste en que la luz que pasa a través de una substancia hace oscilar los electrones en los átomos. Los electrones que oscilan excitan ondas secundarias que se propagan en todas las direcciones. Este fenómeno, al parecer, en cualesquiera condiciones debería conducir a la difusión de la luz. Pero las ondas secundarias son coherentes, por lo que es necesario tener en cuenta su interferencia mutua.

El cálculo correspondiente da que, en el caso de un medio homogéneo, las ondas secundarias se extinguen totalmente unas a otras en todas las direcciones, excepto en la que se propaga la onda pri-

maria. Por lo tanto, no se produce la redistribución de la luz entre las direcciones, es decir, su difusión.

Las ondas secundarias no se destruyen entre sí en las direcciones laterales únicamente cuando la luz se propaga en un medio no homogéneo. Las ondas luminosas, difractándose en las heterogeneidades del medio, dan una figura de difracción que caracteriza la distribución, bastante uniforme, de la intensidad en todas las direcciones. Esta difracción en heterogeneidades pequeñas recibe el nombre de *difusión de la luz*.

Los medios con heterogeneidad óptica claramente manifiesta se dice que son *turbios*. A estos medios pertenecen: 1) los humos, es decir, las suspensiones en gases de partículas sólidas pequeñísimas;

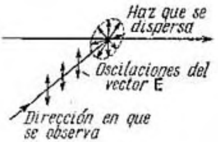


Fig. 146.1.

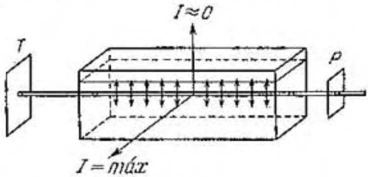


Fig. 145.2.

2) lasnieblas, o suspensiones en gases de gotas líquidas muy pequeñas; 3) las suspensiones formadas por partículas sólidas flotantes en líquidos; 4) las emulsiones, o sea, las suspensiones de pequeñas gotas de un líquido en otro que no disuelve al primero (de ejemplo de emulsión puede servir la leche, que es una mezcla de gotitas de grasa en agua); 5) los sólidos como el nácar, los ópalos, los vidrios opalinos, etc.

La luz difusa por partículas cuyas dimensiones son mucho menores que la longitud de la onda luminosa resulta polarizada parcialmente. Esto se explica porque las oscilaciones de los electrones, producidas por el haz de luz que se difunde, tienen lugar en un plano perpendicular a dicho haz (fig. 146.1). Las oscilaciones del vector **E** en la onda secundaria se producen en un plano que pasa por la dirección de las oscilaciones de las cargas (véase la fig. 109.2). Por eso, la luz que difunden las partículas en las direcciones perpendiculares al haz estará totalmente polarizada. En las direcciones que forman con el haz un ángulo distinto del recto, la luz difusa sólo está polarizada parcialmente.

Como resultado de la difusión de la luz en las direcciones laterales, la intensidad en la dirección de propagación disminuye con más rapidez que en el caso en que sólo actúa la absorción. Por esto, para una substancia turbia, en la expresión (145.1) debe figurar, además del coeficiente de absorción $\varkappa$, un coeficiente adicional $\varkappa'$ condicio-

nado por la difusión:

$$I = I_0 e^{-(\varkappa+\varkappa')l}. \tag{146.1}$$

La constante $\varkappa'$ se llama *coeficiente de extinción.*

Si las dimensiones de las heterogeneidades son pequeñas en comparación con la longitud de la onda luminosa (no mayores que $\sim 0{,}1\lambda$), la intensidad de la luz difusa I es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia o inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \tag{146.2}$$

Esta dependencia recibe el nombre de *ley de Rayleigh.* Su origen es fácil de comprender si se tiene en cuenta que la potencia de radiación de una carga oscilante es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia y, por lo tanto, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda (véase la fórmula (109.5)).

Si las dimensiones de las heterogeneidades son comparables con la longitud de onda, los electrones que se encuentran en distintos puntos de una heterogeneidad oscilan con desfasaje apreciable. Esta circunstancia complica el fenómeno y conduce a otras leyes: la intensidad de la luz difusa se hace proporcional sólo al cuadrado de la frecuencia (o inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de onda).

Una manifestación de la ley (146.2) se puede observar fácilmente haciendo pasar un haz de luz blanca a través de un recipiente con líquido turbio (fig. 146.2). A causa de la difusión de la luz, la traza del haz se ve bien en el líquido si se mira desde un lado, y como las ondas luminosas cortas sufren la difusión más intensamente que las largas, esta traza es azulina. El haz transmitido resulta ser rico en radiación de onda larga y la mancha que forma en la pantalla T no es blanca, sino amarillo-rojiza. Poniendo a la entrada del haz en el recipiente un polarizador P, descubrimos que la intensidad de la luz difusa no es la misma en distintas direcciones perpendiculares al rayo primario. La directividad de la radiación de dipolo (véase la fig. 109.3) hace que, en las direcciones que coinciden con el plano de oscilaciones del haz primario, la intensidad de la luz difusa sea prácticamente nula, mientras que en las direcciones perpendiculares al plano de oscilaciones la intensidad de la luz difusa es máxima. Girando el polarizador alrededor de la dirección del haz primario, observaremos el reforzamiento y debilitamiento alternativos de la luz difusa en la dirección dada.

Incluso los líquidos y los gases cuidadosamente depurados difunden la luz en cierto grado. Los físicos soviético L. I. Mandelshtam y polaco M. Smolujovski establecieron que la causa de la aparición de heterogeneidades ópticas son, en este caso, las fluctuaciones de la densidad (es decir, las desviaciones de la densidad, respecto de

su valor medio, que se observan dentro de los límites de volúmenes pequeños). Estas fluctuaciones son causadas por el movimiento desordenado de las moléculas de la substancia; por esta razón, la difusión de la luz condicionada por ella se llama *molecular*.

Por la difusión molecular se explica el color azul del cielo. Los puntos en que el aire se condensa o enrarece, que continuamente surgen en la atmósfera a causa del movimiento desordenado de las moléculas, producen la difusión de la luz solar. Al ocurrir esto, según la ley (146.2), los rayos celestes y azules se difunden más intensamente que los amarillos y rojos, lo que condiciona el color azul del cielo. Cuando el Sol está bajo, los rayos que se propagan directamente desde él atraviesan un gran espesor del medio difusor, por lo que resultan ricos en ondas de gran longitud. Esta es la causa de que al amanecer el cielo adquiera tonalidades rojas.

Condiciones especialmente favorables para que se produzcan fluctuaciones considerables existen en las proximidades del estado crítico de la substancia (en el punto crítico $dp/dV = 0$; véase el § 123 del tomo 1º). Estas fluctuaciones ocasionan una difusión de la luz tan intensa que, al «trasluz», una ampolla de vidrio llena de la substancia parece completamente negra. Este fenómeno se denomina *opalescencia crítica*.

§ 147. Efecto Vavílov—Cherenkov

En 1934, P.A. Cherenkov, bajo la dirección de S. I. Vavílov, descubrió un tipo especial de radiación de los líquidos sometidos a la acción de los rayos γ del radio. Vavílov expresó la suposición correcta de que la fuente de esta radiación son los electrones rápidos creados por los rayos γ. Este fenómeno recibió el nombre de *efecto Vavílov—Cherenkov*. Su explicación teórica completa fue dada en 1937 por I. E. Tamm e I. M. Frank[1]).

Según la teoría electromagnética, una carga en movimiento uniforme no radía ondas electromagnéticas (véase el § 109). Sin embargo, como demostraron Tamm y Frank, esto sólo es justo si la velocidad v de la partícula cargada no es mayor que la velocidad de fase c/n de las ondas electromagnéticas en el medio en que se mueve dicha partícula. Si $v > c/n$, incluso moviéndose uniformemente, la partícula radía ondas electromagnéticas. En realidad la partícula pierde energía en la radiación, por lo cual se mueve con aceleración negativa. Pero esta aceleración no es la causa (como en el caso en que $v < c/n$), sino la consecuencia de la radiación. Si la pérdida de energía debida a la radiación se compensara de algún modo, la partícula, moviéndose uniformemente con la velocidad $v > c/n$, sería, a pesar de todo, fuente de la radiación.

[1]) El trabajo de Cherenkov, Tamm y Frank fue distinguido con el premio Nobel de física 1958.

El efecto Vavílov—Cherenkov se ha observado experimentalmente con electrones, protones y mesones moviéndose en medios líquidos y sólidos.

En la radiación de Vavílov—Cherenkov predominan las ondas cortas, por lo que tiene color celeste. La propiedad más característica de esta radiación consiste en que no es emitida en todas las direcciones, sino únicamente a lo largo de las generatrices de un cono cuyo eje coincide con la dirección de la velocidad de la partícula (fig. 147.1). El ángulo ϑ entre las direcciones en que se propaga la radiación y el vector velocidad de la partícula se determina por la relación

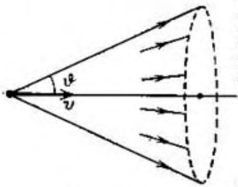


Fig. 147.1.

$$\cos\vartheta = \frac{c:n}{v} = \frac{c}{nv}. \qquad (147.1)$$

El efecto Vavílov—Cherenkov encuentra amplia utilización en la técnica experimental. En los llamados *contadores Cherenkov*, el destello producido por una partícula cargada rápida se transforma por medio de un fotomultiplicador[1]) en un impulso de corriente. Para que este contador entre en acción, la energía de la partícula debe ser mayor que el valor umbral determinado por la condición $v = c/n$. Por eso, los contadores Cherenkov no sólo permiten registrar las partículas, sino también juzgar acerca de su energía. Se consigue incluso determinar el ángulo ϑ entre la dirección del destello y la velocidad de la partícula, lo que da la posibilidad de calcular por la fórmula (147.1) la velocidad (y, por consiguiente, la energía) de la partícula.

[1]) Se llama fotomultiplicador un multiplicador electrónico, cuyo primer electrodo (fotocátodo) es capaz de emitir electrones bajo la acción de la luz.

CAPÍTULO XXI

ÓPTICA DE LOS MEDIOS EN MOVIMIENTO

§ 148. Velocidad de la luz

La velocidad de la luz en el vacío es una de las magnitudes físicas fundamentales. El establecimiento de la finitud de la velocidad de la luz tuvo una importancia esencial enorme. La finitud de la velocidad de transmisión de señales y de la transmisión de las interacciones se encuentra en la base de la teoría de la relatividad.

Debido a que el valor numérico de la velocidad de la luz es muy grande, la determinación experimental de esta velocidad constituye un problema muy complicado. Las primeras determinaciones de la velocidad de la luz se efectuaron basándose en las observaciones astronómicas. En 1676, el astrónomo danés O. Roemer halló la velocidad de la luz partiendo de la observación de los eclipses de los satélites de Júpiter. Obtuvo un valor igual a 215 000 km/s.

El movimiento de la Tierra por su órbita hace que la posición aparente de las estrellas en el firmamento varíe. Este fenómeno, llamado *aberración de la luz*, fue utilizado en 1727 por el astrónomo inglés J. Bradley para determinar la velocidad de la luz.

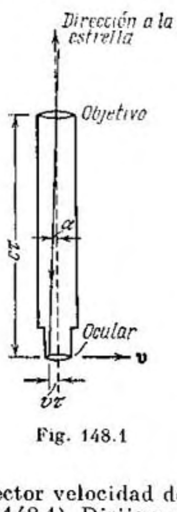


Fig. 148.1

Supongamos que la dirección a la estrella que se observa con un telescopio es perpendicular al plano de la órbita de la Tierra. Entonces el ángulo entre la dirección a la estrella y el vector velocidad de la Tierra **v** será durante todo el año igual a $\pi/2$ (fig. 148.1). Dirijamos el eje del telescopio exactamente a la estrella. Durante el tiempo τ que necesita la luz para recorrer la distancia desde el objetivo hasta el ocular, el telescopio se desplazará junto con la Tierra, en dirección perpendicular al rayo de luz, la distancia $v\tau$. Como resultado, la imagen de la estrella no se encontrará en el centro del ocular. Para que esta imagen se encuentre exactamente en dicho centro hay que hacer girar un ángulo α el eje del telescopio en dirección al vector **v**. La tangente de este ángulo se determina por la relación

$$\operatorname{tg} \alpha = v/c \qquad (148.1)$$

(véase la fig. 148.1). Del mismo modo las gotas de lluvia que caen perpendicularmente sólo pasarán a través de un tubo largo, montado verticalmente en una carretilla en movimiento, si el eje de dicho tubo se inclina en la dirección de la marcha de la carretilla.

Así, la posición aparente de la estrella resulta desplazada, respecto de su verdadera posición, un ángulo α. El vector velocidad de la Tierra gira continuamente en el plano de la órbita. Por lo tanto, el eje del telescopio también gira describiendo un cono alrededor de la dirección verdadera a la estrella. Respectivamente, la posición aparente de la estrella en el firmamento describe una circunferencia cuyo diámetro angular es igual a 2α. Si la dirección a la estrella forma con el plano de la órbita de la Tierra un ángulo distinto del

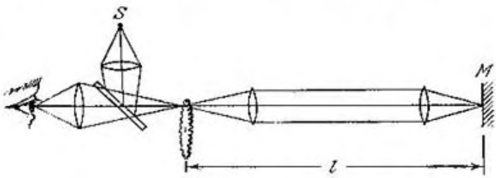


Fig. 148.2.

recto, su posición aparente describe una elipse cuyo eje mayor tiene la dimensión angular 2α. Para las estrellas que se encuentran en el plano de la órbita, la elipse degenera en una recta.

De las observaciones astronómicas halló Bradley que $2\alpha = 40{,}9''$. El valor respectivo de c, obtenido por la fórmula (148.1), resultó ser igual a 303 000 km/s.

En las condiciones de la Tierra la velocidad de la luz fue medida la primera vez, en el año 1849, por el científico francés H. L. Fizeau. El esquema de su experimento se da en la fig. 148.2. La luz del foco S incidía sobre un espejo semitransparente. La luz reflejada en el espejo iba a caer sobre el borde de un disco dentado que giraba rápidamente. Cada vez que frente al haz luminoso se encontraba un hueco entre los dientes, se producía un impulso luminoso que llegaba hasta el espejo M y se reflejaba en sentido contrario. Si en el instante en que la luz retornaba al disco, frente al haz había un hueco, el impulso reflejado pasaba parcialmente a través del espejo semitransparente y llegaba al ojo del observador. Si el impulso reflejado encontraba en su camino un diente del disco, el observador no veía la luz.

Durante el tiempo $\tau = 2l/c$ que tardaba la luz en recorrer el camino de ida y vuelta al espejo M, el disco tenía tiempo de girar un ángulo $\Delta\varphi = \omega\tau = 2l\omega/c$, donde ω es la velocidad angular de rotación del disco. Sea el número de dientes del disco igual a N. Entonces el ángulo entre los puntos medios de dos dientes vecinos

será $\alpha = 2\pi/N$. La luz no retornaba al ojo del observador cuando las velocidades de rotación del disco eran tales que durante el tiempo τ el disco tenía tiempo de girar los ángulos $\alpha/2$, $3\ \alpha/2, \ldots, (m-1/2)\,\alpha$ y así sucesivamente. Por lo tanto, la conditión del m-esimo oscurecimiento tiene la forma

$$\Delta\varphi = (m - 1/2)\,\alpha \quad \text{ó} \quad 2l\omega_m/c = (m - 1/2)\,2\pi/N.$$

Por esta fórmula, conociendo l, N y la velocidad angular ω_m con la cual se obtiene el m-ésimo oscurecimiento, se puede determinar c. En el experimento de Fizeau l era igual aproximadamente a 8,6 km. El valor de c que se obtuvo fue de 313 000 km/s.

En 1928 se utilizaron para medir la velocidad de la luz las células de Kerr (véase el § 140). Con ellas se pueden obtener intermitencias del haz luminoso con mucha más frecuencia ($\sim 10^7 s^{-1}$) que por medio del disco dentado. Esto dio la posibilidad de medir c con l del orden de varios metros.

A. A. Michelson realizó varias mediciones de la velocidad de la luz por el método del prisma giratorio. En la experiencia de Michelson efectuada en 1932, la luz se propagaba en un tubo de 1,6 km de longitud del cual se había extraído el aire.

En la actualidad la velocidad de la luz en el vacío se toma igual a

$$c = 299\,792{,}5 \pm 0{,}1 \text{ km/s}. \qquad (148.2)$$

Advertimos que en todos los experimentos realizados con intermitencias de la luz, no se determinó su velocidad de fase, sino la de grupo. En el aire estas dos velocidades son prácticamente iguales.

§ 149. Experimento de Fizeau

Hasta ahora hemos supuesto que las fuentes, los receptores y los demás cuerpos con respecto a los cuales se consideraba la propagación de la luz, estaban en reposo. Es natural que nos interese el problema de cómo influye en la propagación de la luz el movimiento de la fuente de ondas luminosas. En este caso se plantea la necesidad de indicar con respecto a qué se efectúa el movimiento. En el § 103 se explicó que el movimiento de una fuente o de un receptor de ondas sonoras respecto del medio en que estas ondas se propagan influye en el transcurso de los fenómenos acústicos (efecto Doppler) y, por lo tanto, puede ser descubierto.

La teoría ondulatoria consideró inicialmente la luz como ondas elásticas que se propagaban en cierto medio hipotético llamado éter universal. Después de la creación de la teoría de Maxwell, el éter elástico fue sustituido por el éter portador de las ondas y de los campos electromagnéticos. Se entendía por este último un medio especial que, lo mismo que su antecesor el éter elástico, llenaba todo el espacio universal y penetraba en todos los cuerpos. Como el éter era un me-

dio, era de esperar la posibilidad de descubrir el movimiento de los cuerpos, por ejemplo, de las fuentes y receptores de luz, con respecto a él. En particular, podía esperarse la existencia del «viento etéreo» que soplaría a la Tierra durante el movimiento de ésta alrededor del Sol.

En la mecánica se estableció el principio de la relatividad de Galileo, según el cual todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes desde el punto de vista de la mecánica. El descubrimiento del éter hubiera hecho posible destacar (valiéndose de los fenómenos ópticos) un sistema de referencia especial, preponderante, absoluto. El movimiento de los demás sistemas hubiera podido considerarse con respecto a este sistema absoluto.

De este modo, el esclarecimiento del problema de la interacción del éter universal con el movimiento de los cuerpos desempeñaba un papel esencial. Podían admitirse tres posibilidades: 1) el éter permanece totalmente impasible al movimiento de los cuerpos; 2) el éter es arrastrado parcialmente por los cuerpos en movimiento, adquiriendo una velocidad igual a αv, en la que v es la velocidad del cuerpo con respecto al sistema de referencia absoluto, y α, un coeficiente de arrastre, menor que la unidad; 3) el éter es arrastrado totalmente por los cuerpos en movimiento, como la Tierra, por ejemplo, de un modo semejante a como el cuerpo al moverse arrastra la capa de gas próxima a su superficie. Pero esta última posibilidad está en contradicción con la existencia del fenómeno de la aberración de la luz. En el párrafo anterior se aclaró que la variación de la posición aparente de las estrellas se puede explicar por el movimiento del telescopio con respecto al sistema (medio) de referencia, en el cual se propaga la onda luminosa.

Para esclarecer el problema de si el éter es arrastrado o no por los cuerpos en movimiento, Fizeau realizó en 1851 el experimento siguiente. El haz de luz paralelo procedente de un foco S (fig. 149.1) se dividía, por medio de una lámina plateada semitransparente P, en dos haces, designados con las cifras *1* y *2*. A expensas de la reflexión en los espejos M_1, M_2 y M_3, los haces, después de recorrer en total un camino L igual, volvían a incidir sobre la lámina P. El haz *1* pasaba parcialmente a través de P, y el haz *2* se reflejaba parcialmente, como resultado de lo cual surgían dos haces coherentes *1'* y *2'* que producían en el plano focal del anteojo una figura de interferencia en forma de franjas. En el camino de los haces *1* y *2* se colocaban dos tubos, por los cuales se podía hacer pasar agua con la velocidad u en las direcciones que indican las flechitas. El rayo *2* se propagaba en ambos tubos al encuentro del agua, y el *1*, a favor de la corriente.

Cuando el agua estaba en reposo, los haces *1* y *2* recorrían el camino L en el mismo tiempo. Si el agua al moverse arrastrara siquiera parcialmente al éter, al abrir la corriente de agua el rayo *2*, que se propagaba en contra de ella, debería tardar en recorrer el camino L

más tiempo que el rayo *1*, que se propagaba a favor de la corriente. Como resultado debería surgir entre los rayos cierta diferencia de marcha y la figura de interferencia se desplazaría.

La diferencia de marcha que nos interesa sólo podía producirse en el camino de los rayos que pasaban por el agua. Este camino tenía la longitud $2l$. Llamemos v a la velocidad de la luz con respecto al éter en el agua. Cuando el éter no es arrastrado por el agua, la velocidad de la luz con respecto al dispositivo coincidirá con v. Supongamos que el agua al moverse arrastra parcialmente al éter, comunicándole la velocidad αu con respecto al dispositivo (u es la velocidad del agua y α, el coeficiente de arrastre). Entonces la velocidad de la luz

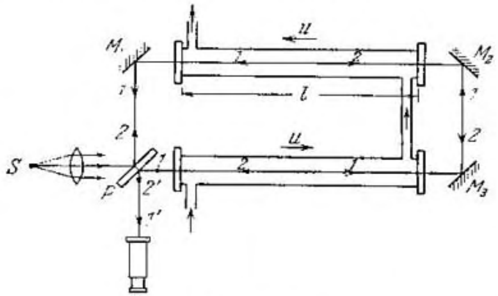


Fig. 149.1.

con respecto al dispositivo es igual a $v + \alpha u$ para el rayo *1* y a $v - \alpha u$ para el rayo *2*. El rayo *1* recorre el camino $2l$ en el tiempo $t_1 = 2l/(v + \alpha u)$, y el rayo *2*, en el tiempo $t_2 = 2l/(v - \alpha u)$. De la fórmula (115.4) se infiere que la longitud óptica del camino en recorrer el cual tarda la luz el tiempo t es igual a ct. Por consiguiente, la diferencia de marcha de los rayos *1* y *2* será $\Delta = c\,(t_2 - t_1)$. Dividiendo Δ por λ_0 se obtiene el número de franjas en que se desplaza la figura de interferencia cuando se abre la corriente de agua:

$$\Delta N = \frac{c\,(t_2 - t_1)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0}\left(\frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u}\right) = \frac{4cl\alpha u}{\lambda_0\,(v^2 - \alpha^2 u^2)}.$$

Fizeau descubrió que las franjas de interferencia se desplazan en realidad. El valor del coeficiente de arrastre correspondiente al desplazamiento resultó ser

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad (149.1)$$

donde n es el índice de refracción del agua. De este modo el experimento de Fizeau demostró que el éter (de existir) sólo es arrastrado parcialmente por el agua en movimiento.

Es fácil cerciorarse de que el resultado de la experiencia de Fizeau se explica por la ley relativista de composición de las velocidades. De acuerdo con la primera de las fórmulas (66.1) del tomo 1º, las velocidades v_x y v'_x de un cuerpo en los sistemas K y K' están ligadas por la relación

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x / c^2} \tag{149.2}$$

(v_0 es la velocidad del sistema K' respecto del sistema K).

Asociemos el dispositivo de Fizeau al sistema de referencia K, y el agua en movimiento al sistema K'. Entonces el papel de v_0 lo desempeñará la velocidad de la corriente de agua u; el de v'_x, la velocidad de la luz con respecto al agua, igual a c/n, y, finalmente, el de v_x, la velocidad de la luz con relación al dispositivo v_{disp}. La sustitución de estos valores en la fórmula (149.2), da

$$v_{\text{disp}} = \frac{c/n + u}{1 + u\,(c/n)\,c^2} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn}.$$

La velocidad de la corriente de agua u es mucho menor que c. Por lo tanto, la expresión obtenida se puede simplificar como sigue:

$$v_{\text{disp}} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn} \approx \left(\frac{c}{n} + u\right)\left(1 - \frac{u}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{149.3}$$

(hemos despreciado el término u^2/cn).

Según las representaciones clásicas, la velocidad de la luz con relación al dispositivo v_{disp} es igual a la suma de la velocidad de la luz respecto del éter, es decir, c/n, y la velocidad del éter respecto del dispositivo, o sea, αu: $w_{\text{disp}} = c/n + \alpha u$

La comparación con la fórmula (149.3) da para el coeficiente de arrastre α el valor obtenido por Fizeau (véase (149.1)).

Debe tenerse en cuenta que únicamente es igual en todos los sistemas de referencia la velocidad de la luz en el vacío. La velocidad de la luz en una substancia es distinta en diferentes sistemas de referencia. El valor c/n lo tiene en el sistema de referencia asociado al medio en el cual se propaga la luz.

§ 150. Experimento de Michelson

En 1881 efectuó A. A. Michelson el célebre experimento con que esperaba descubrir el movimiento de la Tierra respecto del éter (viento etéreo). Este mismo experimento, pero con un aparato más perfecto, volvió a realizarlo Michelson, en colaboración con E. W. Morley, en 1887. El dispositivo de Michelson y Morley se representa en la fig. 150.1. Sobre un fundamento de ladrillos descansaba un baño anular, de fundición, que contenía mercurio. En este mercurio nadaba un flotador de madera en forma de toro cortado lon-

gitudinalmente. Sobre este flotador se colocaba una pesada losa de piedra cuadrada. Este dispositivo permitía girar suavemente dicha losa alrededor del eje vertical del aparato. Sobre la losa se montaba un interferómetro de Michelson (véase la fig. 123.1) modificado de

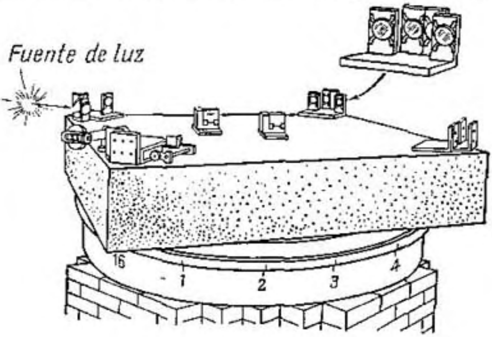


Fig. 150.1.

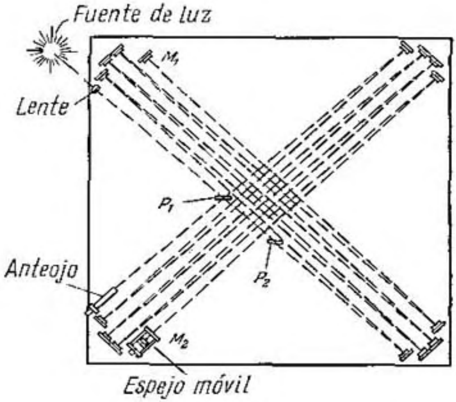


Fig. 150.2.

tal forma, que ambos rayos, antes de retornar a la lámina semitransparente, recorrían varias veces, yendo y viniendo, un camino que coincidía con la diagonal de la losa. El esuqema de la marcha de los rayos se muestra en la fig. 150.2. En esta figura las designaciones están de acuerdo con las de la fig. 123.1.

De base del experimento servían los razonamientos siguientes. Supongamos que el brazo PM_2 del interferómetro (fig. 150.3) coincide con la dirección del movimiento de la Tierra respecto del éter. En este caso el tiempo que tarda el rayo *1* en recorrer el camino de ida y vuelta hasta el espejo M_1 será distinto del tiempo que tarde el rayo *2* en recorrer el camino PM_2P. Como resultado, incluso si las longitudes de ambos brazos son iguales, los rayos *1* y *2* adquieren cierta diferencia de marcha. Si el aparato se hace girar 90°, los brazos cambian de sitio y la diferencia de marcha cambia de signo. Esto debía

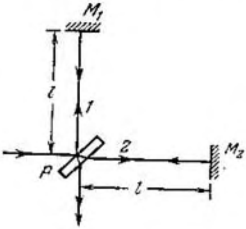


Fig. 150.2.

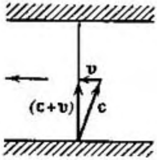


Fig. 150.4.

hacer que la figura de interferencia se desplazara en una magnitud que, según los cálculos de Michelson, se podría apreciar perfectamente.

Para calcular el desplazamiento esperado de la figura de interferencia hallamos el tiempo que tardan los rayos *1* y *2* en recorrer los caminos respectivos. Supongamos que la velocidad de la Tierra con respecto al éter sea v. Si el éter no fuera arrastrado por la Tierra y la velocidad de la luz con respecto a él fuera c (el índice de refracción del aire es prácticamente igual a la unidad), la velocidad de la luz con relación al aparato sería igual a $c - v$ en la dirección PM_2 y a $c + v$ en la dirección M_2P. Por lo tanto, para el rayo *2* el tiempo vendría determinado por la expresión

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-v^2/c^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (150.1)$$

(la velocidad con que se mueve la Tierra por su órbita es igual a 30 km/s, por lo que $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$).

Antes de empezar a calcular el tiempo t_1, consideremos el siguiente ejemplo de la mecánica. Una lancha de motor que desarrolla la velocidad c respecto del agua, tiene que cruzar un río, que fluye con la velocidad v, en dirección exactamente perpendicular a sus orillas (fig. 150.4). Para que la lancha se traslade en la dirección dada, su velocidad $\mathbf{c}$ respecto del agua debe estar dirigida como se indica

en la figura. Por consiguiente, la velocidad de la lancha respecto de las orillas debe ser igual a $|\mathbf{c}+\mathbf{v}|=\sqrt{c^2+v^2}$. Así mismo debía determinarse (supuso Michelson) la velocidad del rayo *1* con respecto al aparato. Por lo tanto, para el rayo *1* el tiempo sería[1])

$$t_1=\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\approx\frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (150.2)$$

Sustituyendo en la expresión $\Delta=c\,(t_2-t_1)$ los valores de t_2 y t_1 (150.1) y (150.2), obtenemos la diferencia de marcha de los rayos *1* y *2*:

$$\Delta=2l\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right]=l\frac{v^2}{c^2}.$$

Al girar 90° el aparato, la diferencia de marcha cambia de signo. Por consiguiente, el número de franjas de interferencia en que se desplaza la figura es

$$\Delta N=\frac{2\Delta}{\lambda_0}=2\frac{l}{\lambda_0}\frac{v^2}{c^2}. \qquad (150.3)$$

La longitud del brazo l (teniendo en cuenta la múltiple reflexión) era de **11** m. La longitud de onda de la luz, en el experimento de Michelson y Morley, era de 0,59μm. La sustitución de estos valores en la fórmula (150.3), da

$$\Delta N=\frac{2\cdot 11}{0,59\cdot 10^{-6}}10^{-8}=0,37\approx 0,4 \text{ franjas.}$$

El aparato permitía descubrir desplazamientos del orden de 0,01 franja. Pero no se manifestó desplazamiento alguno de la figura de interferencia. Para excluir la posibilidad de que en el instante de hacer las mediciones el plano del horizonte resultara perpendicular al vector velocidad orbital de la Tierra, el experimento se repitió a distintas horas del día. Después se volvió a hacer muchas veces en distintas estaciones del año (durante el año el vector velocidad orbital de la Tierra gira 360° en el espacio) y siempre dio resultados negativos. Fue imposible descubrir el viento etéreo. El éter universal siguió siendo «inatrapable».

Se hicieron varios intentos de explicar el resultado negativo del experimento de Michelson sin renunciar a la hipótesis del éter universal, pero todos ellos resultaron infundados. La explicación exhaustiva y sin contradicciones de todos los hechos experimentales, incluidos los resultados del experimento de Michelson, fue dada por A. Einstein en 1905. Este llegó a la conclusión de que el éter universal, es decir, el medio especial que podría servir de sistema absoluto de referencia, no existe. De acuerdo con esto, Einstein extendió el

[1]) Hemos aplicado las fórmulas $\sqrt{1-x}\approx 1-x/2$ y $1/(1-x)\approx 1+x$, que son válidas para valores pequeños de x.

principio mecánico de la relatividad a todos los fenómenos físicos sin exclusión. Más tarde, de acuerdo con los datos experimentales, Einstein postuló que la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia y no depende del movimiento de las fuentes y de los receptores de luz.

El principio de la relatividad y el de la constancia de la velocidad de la luz constituyen la base de la teoría especial de la relatividad creada por Einstein (véase el capítulo VIII del tomo 1º).

§ 151. Efecto Doppler

En la acústica, la variación de la frecuencia debida al efecto Doppler está determinada por las velocidades de movimiento de la fuente y del receptor respecto del medio portador de las ondas sonoras (véase la fórmula (103.2)). Para las ondas luminosas también existe efecto Doppler. Sin embargo, no existe un medio especial que sirva de portador de las ondas electromagnéticas. Por eso, el desplazamiento Doppler de las frecuencias de las ondas luminosas está determinado únicamente por la velocidad relativa de la fuente y el receptor.

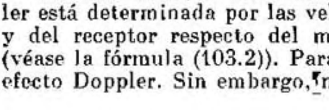


Fig. 151.1.

Asociemos a la fuente de luz el origen de coordenadas del sistema K, y al receptor, el origen de coordenadas del sistema K' (fig. 151.1). Los ejes x y x' los dirigimos, como de ordinario, a lo largo del vector velocidad $\mathbf{v}$ con que se mueve el sistema K' (es decir, el receptor) respecto del sistema K (o sea, de la fuente). La ecuación de la onda luminosa plana emitida por la fuente en dirección al receptor tendrá en el sistema K la forma

$$E(x, t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right]. \qquad (151.1)$$

Aquí ω es la frecuencia de la onda registrada en el sistema de referencia asociado a la fuente, es decir, la frecuencia con que oscila la fuente. Suponemos que la onda luminosa se propaga en el vacío, por lo que la velocidad de fase es c.

Según el principio de la relatividad, las leyes de la naturaleza tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por lo tanto, en el sistema K' la onda (151.1) se describe por la ecuación

$$E'(x', t') = A'\cos\left[\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha'\right], \qquad (151.2)$$

en la que ω' es la frecuencia registrada en el sistema de referencia K', es decir, la frecuencia que percibe el receptor. Hemos puesto

apóstrofos a todas las magnitudes, excepto c, que es igual en todos los sistemas de referencia.

La ecuación de la onda en el sistema K' se puede obtener de la ecuación en el sistema K, pasando de x y t a x' y t' por medio de las transformaciones de Lorentz. Sustituyendo en (151.1) x y t según las fórmulas (63.16) del tomo 1°, se obtiene

$$E(x', t') = A\cos\left\{\omega\left[\frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] + \alpha\right\}$$

(el papel de v_0 lo desempeña v). Esta expresión es fácil de reducir a la forma

$$E(x', t') = A\cos\left\{\omega\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha\right\}. \qquad (151.3)$$

La ecuación (151.3) describe en el sistema K' la misma onda que la ecuación (151.2). Por eso deberá cumplirse la relación

$$\omega' = \omega\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \omega\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}.$$

Hagamos los siguientes cambios en las designaciones: la frecuencia de la fuente ω, designémosla por ω_0, y la del receptor ω', por ω. Como resultado la fórmula toma la forma

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}. \qquad (151.4)$$

Pasando de la frecuencia angular a la ordinaria, obtenemos:

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}. \qquad (151.5)$$

La velocidad v del receptor respecto a la fuente, que figura en las fórmulas (151.4) y (151.5), es una magnitud algebraica. Cuando el receptor se aleja, $v > 0$ y, según (151.4), $\omega < \omega_0$; cuando el receptor se acerca a la fuente, $v < 0$, de manera que $\omega > \omega_0$.

En el caso en que $v \ll c$, la fórmula (151.4) se puede escribir aproximadamente así:

$$\omega \approx \omega_0\frac{1-(1/2)(v/c)}{1+(1/2)(v/c)} \approx \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{v}{c}\right).$$

De aquí, limitándonos a los términos del orden de v/c, se obtiene:

$$\omega = \omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right). \qquad (151.6)$$

De esta fórmula se puede hallar la variación relativa de la frecuencia

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \qquad (151.7)$$

(por $\Delta\omega$ se entiende $\omega - w_0$).

Se puede demostrar que, además del *efecto longitudinal* que hemos estudiado, en las ondas luminosas existe el *efecto Doppler transversal*. Este consiste en la disminución de la frecuencia percibida por el receptor, que se observa cuando el vector velocidad relativa está dirigido perpendicularmente a la recta que pasa por el receptor y por la fuente[1]) (por ejemplo, cuando la fuente se mueve siguiendo una circunferencia en cuyo centro se halla el receptor). En este caso la frecuencia ω_0 en el sistema de la fuente está ligada con la frecuencia ω en el sistema del receptor por medio de la relación

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{151.8}$$

La variación relativa de la frecuencia en el efecto Doppler transversal

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{151.9}$$

es proporcional al cuadrado de v/c y, por consiguiente, mucho menor que en el efecto longitudinal, en el cual dicha variación es proporcional a la primera potencia de v/c.

La existencia del efecto Doppler transversal fue demostrada experimentalmente por H. E. Ives en 1938. En los experimentos de Ives se determinaba la variación de la frecuencia de radiación de los átomos de hidrógeno en los rayos canales (véase el último párrafo del § 85). La velocidad de los átomos era aproximadamente de $2 \cdot 10^6$ m/s. Estos experimentos constituyen una confirmación empírica directa de la validez de las transformaciones de Lorentz.

En el caso general el vector velocidad relativa se puede descomponer en dos componentes, uno de los cuales está dirigido a lo largo del rayo y otro, perpendicularmente a él. El primer vector componente condiciona el efecto Doppler longitudinal, y el segundo, el transversal.

El efecto Doppler longitudinal se utiliza para determinar la velocidad radial de las estrellas. Midiendo el desplazamiento relativo de las rayas en los espectros de las estrellas se puede hallar v por la fórmula (151.4).

El movimiento térmico de las moléculas de un gas luminoso hace que, debido al efecto Doppler, se ensanchen las rayas espectrales. A causa del carácter caótico del movimiento térmico, todas las direcciones de las velocidades de las moléculas respecto del espectrógrafo son igualmente probables. Por eso, en la radiación que registra el instrumento están presentes todas las frecuencias comprendidas en el intervalo desde $\omega_0 (1 - v/c)$ hasta $\omega_0 (1 + v/c)$, donde ω_0 es la frecuencia radiada por las moléculas, y v, la velocidad del movimiento térmico (véase la fórmula (151.6)). De este modo, la anchura

[1]) Se recordará que en las ondas acústicas no existe efecto Doppler transversal.

registrada de una raya espectral es igual a $2\omega_0 v/c$. La magnitud

$$\delta\omega_D = 2\omega_0 \frac{v}{c} \tag{151.10}$$

se llama *anchura de la raya espectral debida al efecto Doppler* (se entiende por v la velocidad más probable de las moléculas). Por la magnitud del ensanchamiento Doppler de las rayas espectrales se puede juzgar acerca de la velocidad del movimiento térmico de las moléculas y, por lo tanto, acerca de la temperatura del gas luminoso.

APÉNDICES

I. Unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el SI y en el sistema de Gauss

Constante eléctrica

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\,(2{,}997925)^2 \cdot 10^9}\ \text{F/m} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \text{F/m}.$$

Constante magnética

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}.$$

Constante electrodinámica

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}997925 \cdot 10^8\ \text{m/s} \approx 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

Las relaciones entre las unidades se dan aproximadamente. Para obtener valores más exactos, en las relaciones que figuran en la última columna hay que sistituir 3 por 2,997925 y 9 por $(2{,}997925)^2$.

Magnitudes y sus símbolos	Unidades y sus símbolos		Relaciones entre las unidades
	SI	Sistema de Gauss	
Fuerza F	newton (N)	dina (din)	1 N $= 10^5$ din
Trabajo A y energía W	julio (J)	ergio (erg)	1 J $= 10^7$ erg
Carga q	culombio (C)	unid. CGSE	1 C $= 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Intensidad de campo eléctrico E	voltio por metro (V/m)	unid. CGSE	1 unid. CGSE $= 3 \cdot 10^4$ V/m
Potencial φ, tensión U y f.e.m. $\mathscr{E}$	voltio (V)	unid. CGSE	1 unid. CGSE $= 300$ V
Momento eléctrico dipolar p	C·m	unid. CGSE	1 C·m $= 3 \cdot 10^{11}$ unid. CGSE
Polarización P	C/m²	unid. CGSE	1 C/m² $= 3 \cdot 10^5$ unid. CGSE
Susceptibilidad dieléctrica $\varkappa$	unid. SI	unid. CGSE	1 unid. CGSE $= 4\pi$ unid. SI

Continuación

Magnitudes y sus símbolos	Unidades y sus símbolos		Relaciones entre las unidades
	SI	Sistema de Gauss	
Desplazamiento eléctrico (inducción eléctrica) D	culombio por metro cuadrado (C/m^2)	unid. CGSE	1 $C/m^2 = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ unid. GCSE
Flujo eléctrico de desplazamiento (flujo eléctrico de inducción) Φ	culombio (C)	unid. CGSE	1 $C = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Capacidad eléctrica C	faradio (F)	centímetro (cm)	1 $F = 9 \cdot 10^{11}$ cm
Intensidad de corriente I	amperio (A)	unid. CGSE	1 $A = 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Densidad de corriente j	amperio por metro cuadrado (A/m^2)	unid. CGSE	1 $A/m^2 = 3 \cdot 10^5$ unid. CGSE
Resistencia eléctrica R	ohmio (Ω)	unid. CGSE	1 unid. CGSE $= 9 \cdot 10^{11}\ \Omega$
Resistencia específica ρ	ohmio-metro ($\Omega \cdot m$)	unid. CGSE	1 unid. CGSE $= 9 \cdot 10^9\ \Omega \cdot m$
Conductividad específica σ	siemenio por metro (S/m)	unid. CGSE	1 $S/m = 9 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Inducción magnética B	tesla (T)	gaussio (Gs)	1 $T = 10^4$ Gs
Flujo de inducción magnética Φ y flujo magnético total o enlazado Ψ	weber (Wb)	maxwelio (Mx)	1 $Wb = 10^8$ Mx
Momento magnético p_m	amperio-metro cuadrado ($A \cdot m^2$)	unid. CGSM	1 $A \cdot m^2 = 10^3$ unid. CGSM
Imanación J	amperio por metro (A/m)	unid. CGSM	1 unid. CGSM $= 10^3$ A/m
Intensidad de campo magnético H	amperio por metro (A/m)	oerstedio (Oe)	1 $A/m = 4\pi \cdot 10^{-3}$ Oe 1 Oe = 79,6 A/m
Susceptibilidad magnética χ	unid. SI	unid. CGSM	1 unid. CGSM $= 4\pi$ unid. Si
Inductancia L e inductancia mutua L_{12}	henrio (H)	centímetro (cm)	1 $H = 10^9$ cm

II. Fórmulas fundamentales del electromagnetismo en el SI y en el sistema de Gauss

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Ley de Coulomb	$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$	$F=\frac{q_1q_2}{r^2}$
Intensidad de campo eléctrico (definición)	$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q}$	
Intensidad del campo de una carga puntual	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}$	$E=\frac{q}{\varepsilon r^2}$
Intensidad del campo entre planos cargados y cerca de la superficie de un conductor cargado	$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$	$E=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Potencial (definición)	$\varphi=\frac{W_p}{q}$	
Potencial del campo de una carga puntual	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi=\frac{q}{\varepsilon r}$
Trabajo de las fuerzas del campo sobre una carga	$A=q(\varphi_1-\varphi_2)$	
Relación entre E y φ	$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$	
Relación entre φ y E	$\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$	
Rotor del vector E para un campo electrostático	$[\nabla\mathbf{E}]=0$	
Circulación del vector E para un campo electrostático	$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0$	
Momento eléctrico de dipolo	$p=ql$	
Momento mecánico que actúa sobre un dipolo en un campo eléctrico	$\mathbf{N}=[\mathbf{pE}]$	
Energía de un dipolo en un campo eléctrico	$W=-\mathbf{pE}$	
Momento dipolar de una molécula "elástica"	$\mathbf{p}=\beta\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{p}=\beta\mathbf{E}$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Polarización (definición)	$\mathbf{P}=\frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}$	
Relación entre P y E	$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}$
Relación entre P y la densidad espacial de las cargas ligadas	$\rho'=-\nabla\mathbf{P}$	
Relación entre P y la densidad superficial de las cargas ligadas	$\sigma'=P_n$	
Desplazamiento eléctrico (inducción eléctrica) (definición)	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$
Divergencia del vector D	$\nabla\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\mathbf{D}=4\pi\rho$
Teorema de Gauss para D	$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S}=\sum q$	$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S}=4\pi\sum q$
Relación entre la permitividad ε y la susceptibilidad dieléctrica ϰ	$\varepsilon=1+\varkappa$	$\varepsilon=1+4\pi\varkappa$
Relación entre los valorse de ϰ en el SI y en el sistema de Gauss	$\varkappa_{SI}=4\pi\varkappa_{SG}$	
Relación entre D y E	$\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$
Relación entre D y E en el vacío	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}$
D del campo de una carga puntual	$D=\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}$	$D=\frac{q}{r^2}$
Capacidad de un condensador (definición)	$C=\frac{q}{U}$	
Capacidad de un condensador plano	$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$	$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Energía de un sistema de cargas	$W=\frac{1}{2}\sum q\varphi$	
Energía de un condensador cargado	$W=\frac{CU^2}{2}$	
Densidad de energía de un campo eléctrico	$w=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}$	$w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Intensidad de corriente (definición)	$I=\frac{dq}{dt}$	
Densidad de corriente (definición)	$j=\frac{dI}{dS_{\perp}}$	
Ecuación de continuidad	$\nabla\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$	
Tensión (definición)	$U=\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12}$	
Ley de Ohm	$I=\frac{1}{R}U$	
Ley de Ohm en forma diferencial	$\mathbf{j}=\frac{1}{\rho}\mathbf{E}=\sigma\mathbf{E}$	
Ley de Joule—Lenz	$Q=\int\limits_0^t RI^2dt$	
Ley de Joule—Lenz en forma diferencial	$D=\rho\mathbf{j}^2$	
Fuerza de interacción de dos corrients paralelas en el vacío (referida a la unidad de longitud)	$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}$	$F=\frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2}{b}$
Campo de una carga en movimiento libre	$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}$	$\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}$
Ley de Biot—Savart	$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{I\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{r}]}{r^3}$
Fuerza de Lorentz	$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\,[\mathbf{vB}]$	$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+\frac{q}{c}\,[\mathbf{vB}]$
Ley de Ampere	$d\mathbf{F}=I\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{B}]$	$d\mathbf{F}=\frac{1}{c}I\,[d\mathbf{l},\,\mathbf{B}]$
Momento magnético de un circuito con corriente	$p_m=IS$	$p_m=\frac{1}{c}IS$
Momento mecánico que actúa sobre el momento magnético en un campo magnético	$\mathbf{N}=[p_m\mathbf{B}]$	

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Energía "mecánica" del momento magnético en un campo magnético	$W=-p_m\mathbf{B}$	
Divergencia del vector **B**	$\nabla\mathbf{B}=0$	
Teorema de Gauss para **B**	$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0$	
Imanación (definición)	$\mathbf{J}=\frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V}$	
Intensidad de campo magnético (definición)	$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{J}$	$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{J}$
Relación entre **J** y **H**	$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}$	
Relación entre la permeabilidad magnética μ y la susceptibilidad magnética χ	$\mu=1+\chi$	$\mu=1+4\pi\chi$
Relación entre los valores de χ en el SI y en el sistema de Gauss	$\chi_{SI}=4\pi\chi_{SG}$	
Relación entre **B** y **H**	$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$
Relación entre **B** y **H** en el vacío	$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mathbf{H}$
Rotor del vector **H** en el caso de un campo estacionario	$[\nabla\mathbf{H}]=\mathbf{j}$	$[\nabla\mathbf{H}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$
Circulación del vector H en el caso de un campo estacionario	$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\sum I$	$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\sum I$
Intensidad del campo magnético de una corriente directa	$H=\frac{1}{4\pi}\frac{2I}{b}$	$H=\frac{1}{c}\frac{2I}{b}$
Intensidad del campo magnético en el centro de una corriente circular	$H=\frac{I}{2R}$	$H=\frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R}$
Intensidad del campo de un solenoide	$H=nI$	$H=\frac{4\pi}{c}nI$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Flujo de inducción magnética (definición)	$\Phi=\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$	
Trabajo realizado sobre un circuito con corriente al trasladarlo en un campo magnético	$A=I\Delta\Phi$	$A=\frac{1}{c}\,I\Delta\Phi$
Flujo enlazado o flujo magnético total (definición)	$\Psi=\sum\Phi$	
F.e.m. de inducción	$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathscr{E}_i=-\frac{1}{c}\,\frac{d\Psi}{dt}$
Inductancia (definición)	$L=\frac{\Psi}{I}$	$L=c\,\frac{\Psi}{I}$
Inductancia de un solenoide	$L=\mu_0\mu n^2\,lS$	$L=4\pi\mu n^2\,lS$
F.e.m. de autoinducción (en ausencia de materiales ferromagnéticos)	$\mathscr{E}_s=-L\frac{dI}{dt}$	$\mathscr{E}_s=-\frac{1}{c^2}\,L\,\frac{dI}{dt}$
Energía del campo magnético de una corriente	$W=\frac{LI^2}{2}$	$W=\frac{1}{c^2}\,\frac{LI^2}{2}$
Densidad de la energía de un campo magnético	$w=\frac{\mu_0\mu H^2}{2}$	$w=\frac{\mu H^2}{8\pi}$
Energía de los circuitos acoplados con corriente	$W=\frac{1}{2}\sum L_{ik}I_iI_k$	$W=\frac{1}{2c^2}\sum L_{ik}I_iI_k$
Densidad de corriente de desplazamiento	$\mathbf{j}_{des}=\dot{\mathbf{D}}$	$\mathbf{j}_{des}=\frac{1}{4\pi}\,\dot{\mathbf{D}}$
Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial	$[\nabla\mathbf{E}]=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$[\nabla\mathbf{E}]=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
	$\nabla\mathbf{B}=0$	$\nabla\mathbf{B}=0$
	$[\nabla\mathbf{H}]=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$[\nabla\mathbf{H}]=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$
	$\nabla\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\mathbf{D}=4\pi\rho$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Ecuaciones de Maxwell en forma integral	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{dt}\,d\mathbf{S}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$
	$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0$	$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0$
	$\oint_\Gamma \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$
	$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int_V \rho\,dV$	$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = 4\pi\int_V \rho\,dV$
Velocidad de las ondas electromagnéticas	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	
Relación entre las amplitudes de los vectores E y H en una onda electromagnética	$E_m\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu_0\mu}$	$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}$
Vector de Poynting	$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$
Densidad de impulso de un campo electromagnético	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{EH}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]$

III. Potencial vectorial

En el § 49 se indicó que la inducción magnética **B** se puede representar en la forma

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}], \tag{III.1}$$

en la que **A** es cierta función denominada *potencial vectorial* o *potencial vector*. Esta representación es posible debido a que la divergencia del rotor es siempre nula. Por eso la condición $\nabla\mathbf{B} = 0$ se cumple automáticamente en esta representación.

De un modo semejante al potencial escalar φ del campo eléctrico, el potencial vector **A** no se determina unívocamente. La adición a **A** del gradiente de una función arbitraria ψ no hace que varíe el valor de $[\nabla\mathbf{A}]$, es decir, de **B**. En efect sustituyamos **A** por $\mathbf{A} + \nabla\psi$. Según (11.38), el rotor del gradiente de

cualquier función es nulo. Por lo tanto,

$$[\nabla, (\mathbf{A} + \nabla\psi)] = [\nabla\mathbf{A}] + [\nabla, \nabla\psi] = [\nabla\mathbf{A}].$$

De este modo, la función

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \tag{III.2}$$

lo mismo que la **A**, será el potencial vector del campo magnético dado.

Tomando la divergencia de la función (III.2), obtenemos:

$$\nabla\mathbf{A}' = \nabla\mathbf{A} + \nabla(\nabla\psi) = \nabla\mathbf{A} + \Delta\psi.$$

Eligiendo la función ψ puede asignarse a $\nabla\mathbf{A}'$ cualquier valor prefijado, y, en particular, el de cero. Así, el potencial vector siempre se puede elegir de tal forma que su divergencia sea nula:

$$\nabla\mathbf{A} = 0, \tag{III.3}$$

es decir, de manera, que el campo **A** no tenga manantiales.

Advertimos que, incluso si se cumple la condición (III.3), la función **A** sigue siendo multiforme. Para que la determinación del potencial vector sea unívoca hay que dar las condiciones de frontera para **A**.

Ecuación de Poisson. De acuerdo con (13.5), para un campo en el vacío

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

Sustituyamos en esta relación **E** por $-\nabla\varphi$:

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

El primer miembro de esta fórmula es $\nabla^2\varphi = \Delta\varphi$, donde Δ es el operador de Laplace. De esta forma llegamos a la ecuación

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{III.4}$$

llamada *ecuación de Poisson*. En forma desarrollada esta ecuación tiene el aspecto siguiente:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{III.5}$$

El potencial del campo creado por un sistema de cargas distribuidas con la densidad $\rho(r)$ se puede obtener valiéndose del principio de superposición y de la expresión del potencial de una carga puntual. Indicando con un apóstrofo las variables respecto de las cuales se efectúa la integración, se obtiene

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{III.6}$$

La función (III.6) es la solución de la ecuación (III.4).

Sustituyamos en la fórmula (49.9) **B** por el rotor de **A**:

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{A}]] = \mu_0\mathbf{j}.$$

Transformando el primer miembro de acuerdo con la fórmula (11.40), obtenemos

$$\nabla(\nabla\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}.$$

Y eligiendo **A** de manera que se cumpla la condición (III.3), llegamos a la ecuación

$$\delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \qquad (III.7)$$

análoga a la (III.4), que es la ecuación de Poisson para el potencial vector.

La ecuación (III.7) equivale a tres ecuaciones escalares:

$$\Delta A_k = -\mu_0 j_k \quad (k = x, y, z). \qquad (III.8)$$

La solución de estas ecuaciones se puede obtener sustituyendo en (III.6) la función $(1/\varepsilon_0)\ \rho(\mathbf{r}')$ por la función $\mu_0 j_k(\mathbf{r}')$ (compárense las ecuaciones (III.4) y (III.8)). Como resultado obtenemos

$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{j_k(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (k = x, y, z). \qquad (III.9)$$

Las tres expresiones (III.9) se pueden unificar en una vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (III.10)$$

Advertimos que la integración en las fórmulas (III.9) y (III.10) sa extiende a toda la región por la cual pasan las corrientes que crean el campo.

La fórmula (III.10) permite, conociendo la distribución de las corrientes en el espacio, calcular el potencial vector del campo que dichas corrientes crean. Determinando luego el rotor del potencial vector, se halla la inducción magnética **B** del campo.

Ley de Biot — Savart. Calculemos el potencial vector creado por la corriente I que pasa por un conductor delgado. Para ello dividimos el conductor en elementos de longitud dl y equiparamos a cada elemento un vector $d\mathbf{l}$ cuyo módulo sea igual a dl y cuya dirección coincida con la del vector densidad de corriente $\mathbf{j}$ en el elemento dado del conductor (fig. III.1). La posición del elemento $d\mathbf{l}$ respecto del origen de coordenadas O se determina por el radio vector $\mathbf{r}'$, y la del punto P, en que se determina el potencial vector, por el radio vector $\mathbf{r}$.

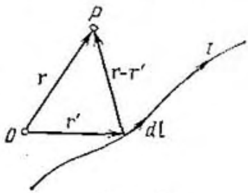


Fig. III.1.

Según la fórmula (III.10), el elemento de corriente dl hace al potencial vector, en el punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}$, la aportación

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, S'\, dl}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (III.11)$$

en la que S' es el área de la sección transversal del conductor en el punto $\mathbf{r}'$, y $S'\, dl = dV'$ es el volumen del elemento dl. Como los vectores $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ y $d\mathbf{l}$ tienen la misma dirección, el numerador de la fórmula (III.11) se puede transformar del modo siguiente:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') S'\, dl = j(\mathbf{r}')\, S'\, d\mathbf{l} = I\, d\mathbf{l},$$

donde I es la intensidad de la corriente que pasa por el conductor. Así, a la fórmula (III.11) se le puede dar la forma

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (III.12)$$

Advertimos que $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$ es el incremento del vector $\mathbf{r}'$ sobre el segmento $d\mathbf{l}$.

El potencial vector en el punto P es igual a la suma de las expresiones (III.12)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{III.13}$$

Para subrayar que la posición del segmento $d\mathbf{l}$ respecto del origen de coordenadas O está determinado por el radio vector $\mathbf{r}'$, la hemos escrito en la forma $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$. La integración se hace a todo lo largo del conductor.

La inducción magnética en el punto P se determina por el rotor de la función (III.13)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\nabla_r, \int \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \tag{III.14}$$

(las magnitudes escalares constantes las hemos sacado del signo de rotor).

En la fórmula (III.14) la integración se efectúa respecto de las coordenadas con apóstrofo (es decir, de las coordenadas el punto en que se halla el elemento $d\mathbf{l}$), y la derivación, al calcular el rotor, respecto de las coordenadas sin apóstrofo (o sea, de las coordenadas del punto P; para subrayar esto se le ha puesto al operador ∇ el subíndice r). Por esta razón, las operaciones de integración y de cálculo del rotor se pueden cambiar de sitio entre sí. Como resultado, la fórmula (III.14) toma la forma

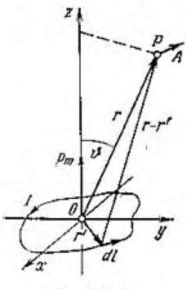


Fig. III.2.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left[\nabla_r, \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right]. \tag{III.15}$$

En la expresión (III.15) el rotor se toma del producto del vector $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ por el escalar $1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$. De acuerdo con las reglas de derivación, el rotor consta en este caso de dos componentes, en uno de los cuales el operador ∇_r actúa sobre el factor vectorial, y en el otro, sobre el factor escalar. El factor vectorial $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ no contiene coordenadas sin apóstrofo. Esto hace que el primer sumando sea nulo. Por lo tanto, la función subintegral en (III.15) se puede representar en la forma

$$\left[\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \right].$$

Unos cálculos fáciles dan para el gradiente de la función $1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}')| = 1/\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ (al hallar el gradiente la derivación se efectúa respecto de las coordenadas x, y, z) el valor $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3)$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula (III.15) toma la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\mathbf{l}, (\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{III.16}$$

Hemos llegado a la ley de Biot — Savart (véase la fórmula (42.3), en la que $\mathbf{r}$ corresponde a $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ en la fórmula (III.16).

Campo a grandes distancias de un circuito con corriente. Hallemos por medio del potencial vector la inducción magnética $\mathbf{B}$ del campo creado por un circuito plano con corriente a distancias mucho mayores que las dimensiones lineales del circuito.

Los ejes x e y se eligen en el plano del circuito de manera que el sentido de la corriente forme con el eje z un sistema dextrógiro (fig. III.2; en esta f[illegible]ura

las designaciones son las mismas que en la fig. III.1). Según la fórmula (III.13),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad \text{(III.17)}$$

La integral se toma ahora sobre el contorno cerrado.

Aprovechando que, por la condición impuesta, $r' \ll r$, conservamos en la expresión subintegral únicamente los términos de orden r'/r y omitimos los de órdenas de infinitud más altos. Teniendo esto en cuenta, la función $1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ se puede representar en la forma

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\mathbf{r}'+r'^2}} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2}} \qquad \text{(III.18)}$$

(hemos omitido bajo el signo de raíz el sumando $(r'/r)^2$). Como $2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 \ll 1$, la cadena de transformaciones (III.18) se puede continuar como sigue:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r(1-\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2)} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}\right). \qquad \text{(III.19)}$$

Sustituyendo en (III.17) la función subintegral por su expresión aproximada (III.19), obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^3}\oint (\mathbf{r}\mathbf{r}')\, d\mathbf{l}\right\} \qquad \text{(III.20)}$$

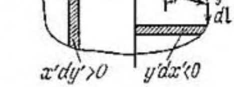


Fig. III.3.

(hemos aprovechado que r no depende de las coordenadas con apóstrofo). El primer sumando es nulo, puesto que $\oint d\mathbf{l} = 0$. Transformemos el segundo sumando expresando el producto escalar mediante los componentes de los vectores que se multiplican y representando $d\mathbf{l}$ en la forma $\mathbf{e}_x dx' + \mathbf{e}_y dy'$ (se recordará que x' e y' son las coordenadas del punto en que se encuentra dl; z' es igual a cero en este punto). Como resultado la expresión (III.20) toma la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint (xx'+yy')(\mathbf{e}_x\, dx' + \mathbf{e}_y\, dy') =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left\{\mathbf{e}_x\left(x\oint x'\, dx' + y\oint y'\, dx'\right) + \mathbf{e}_y\left(x\oint x'\, dy' + y\oint y'\, dy'\right)\right\}. \qquad \text{(III.21)}$$

Las coordenadas sin apóstrofo las hemos sacado del signo de las integrales porque la integración se efectúa respecto de las coordenadas con apóstrofo.

Bajo el signo de integral $\oint x'dx'$ figura la función diferencial $x'^2/2$. La integral de una diferencial total tomada sobre un camino cerrado es nula. Análogamente es nula $\oint y'dy'$. Por lo tanto, la expresión (III.21) se simplifica como sigue:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} = \left\{\mathbf{e}_x y \oint y'\, dx' + \mathbf{e}_y x \oint x'\, dy'\right\}. \qquad \text{(III.22)}$$

En la fig. III.3 se ve que la primera integral en (III.22) es igual al área del circuito S tomada con signo menos, y la segunda integral, al área S tomada

con signo más. De este modo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}(-\mathbf{e}_x y+\mathbf{e}_y x). \tag{III.23}$$

Introducimos la normal positiva n al plano del circuito, es decir, un vector de componentes (0, 0, 1), y calculamos el producto vectorial

$$[\mathbf{nr}]=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\mathbf{e}_x y+\mathbf{e}_y x.$$

La comparación con (III.23) muestra que la expresión del potencial vector se puede representar en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}[\mathbf{nr}]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[(IS\mathbf{n}),\mathbf{r}]}{r^3}.$$

El factor $IS\mathbf{n}$ es el momento magnético $\mathbf{p}_m$ del circuito (véase la fórmula (46.5)). Por consiguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{p}_m\mathbf{r}]}{r^3}. \tag{III.24}$$

De la expresión obtenida se infiere que el vector **A** es en cada punto P perpendicular al plano que pasa por la dirección del vector $\mathbf{p}_m$ y por el punto P (véase la fig. III.2).

Sustituyendo IS por p_m, representamos la expresión (III.23) en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}(-y\mathbf{e}_x+x\mathbf{e}_y). \tag{III.25}$$

Calculando el rotor de la función (III.25), hallamos la inducción magnética del campo:

$$\mathbf{B}=[\nabla\mathbf{A}]=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{r^3} & \frac{x}{r^3} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}\{3xz\mathbf{e}_x+3yz\mathbf{e}_y+(3z^2-r^2)\mathbf{e}_z\}. \tag{III.26}$$

Con la fórmula (III.26) se puede calcular **B** en cualquier punto que se encuentre del circuito a una distancia r mucho mayor que las dimensiones lineales de éste. Por esta fórmula, para los puntos $(0, 0, z)$ que se encuentran sobre el eje z, se obtiene el valor

$$\mathbf{B}(0,\ 0,\ z)=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}\{2z^2\mathbf{e}_z\}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \tag{III.27}$$

($p_m\mathbf{e}_z=\mathbf{p}_m$; $z^2=r^2$). La fórmula (III.27) coincide con la (47.2) obtenida para el circuito circular. Para los puntos $(x, y, 0)$ que se encuentran en el plano del circuito,

$$\mathbf{B}(x,\ y,\ 0)=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}(-r^2\mathbf{e}_z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_m}{r^3}$$

(compárese con las fórmulas (9.9) y (9.10)).

Hallemos el módulo del vector **B** en un punto de coordenadas x, y, z. Según la fórmula (III.26)

$$B^2=\left(\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\right)^2\{9x^2z^2+9y^2z^2+(3z^2-r^2)^2\}=$$

$$=\left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\right)^2\left\{\frac{9(x^2+y^2)z^2+(3z^2-x^2-y^2-z^2)^2}{r^4}\right\}.$$

Por medio de cómputos sencillos podemos cerciorarnos de que la expresión que figura entre llaves se puede representar en la forma

$$1+3\frac{z^2}{r^2}=1+3\cos^2\vartheta,$$

donde ϑ es el ángulo entre el vector $\mathbf{p}_m$ y la dirección al punto P (véase la fig. III.2). De este modo llegamos a la expresión

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$$

(véase la fórmula (47.6)).

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS